第4章 数值微积分

对于函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \qquad (4\text{-}1)$$

若能求得$f(x)$的原函数$F(x)$, 即$F'(x)=f(x)$

则由$Newton-Leibnitz$公式

$$I(f)=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

但由于实际情况中, $f(x)$的原函数很难求出,因此, 只能计算定积分的近似值.

数值积分

考虑用函数$f(x)$在一些数据点处的值的适当组合,作为定积分$I(f)$的近似

$$I(f) \approx Q(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (4\text{-}2)$$

其中:x_k是适当选取的点, 称为节点

A_k称为求积系数

公式(4-2)称为求积公式，以上方法称为**数值积分**

数值积分要考虑的问题

(1) 如何选择合适的节点x_k;

(2) 确定合适的求积系数A_k;

(3) 如何计算误差 $E(f)=I(f)-Q(f)$,并使其尽可能的小

求积公式可以分成两大类

（1） $Newton-Cotes$型公式,基于等距分布的节点

（2） $Gauss$型公式,取相应的正交多项式的根作为节点

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

对任意被积函数$f(x)$，在给定的节点$x_i(i=0,1,2,\ldots,n)$对应的函数值为$f(x_i)$，则可构造插值多项式$p_n(x)$来近似$f(x)$

$$f(x)=p_n(x)+R_n(x)$$

其中:$R(x)$为插值多项式的余项

对上式, 两边同时积分, 有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b p_n(x)dx+\int_a^b R_n(x)dx$$

由于$f(x)\approx p_n(x)$，不考虑误差项, 有

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx\approx\int_a^b p_n(x)dx=Q(f)$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

若取插值多项式为*Lagrange*多项式，得到

$$Q(f)=\int_a^b \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)dx = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b l_k(x)dx\right) f(x_k)$$

记$A_k=\int_a^b l_k(x)dx, k=0,1,2,\ldots,n$ ，有

$$Q(f)=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

误差

$$\begin{aligned} E(f) &= I(f)-Q(f) \\ &= \int_a^b R_n(x)dx \\ &= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)dx \end{aligned}$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

由$A_k=\int_a^b l_k(x)dx$确定的A_k，仅与节点$x_i(i=0,1,\ldots,n)$的选择有关，与被积函数$f(x)$无关，若节点$x_i(i=0,1,2,\ldots,n)$满足关系

$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，求积系数由$A_k=\int_a^b l_k(x)dx$确定，

则此种方法形成的计算$I(f)$的求积公式$Q(f)$称为内插求积公式

若被积函数$f(x)$是不超过n次的多项式，则$f^{(n+1)}(x)\equiv 0$，则有$E(f)=0$

即$I(f)=Q(f)$

定义4.1 如果对任一不超过m次的多项式$p_m(x)$，内插求积公式$Q(f)$总有$I(p_m)=Q(p_m)$，而对某一个$m+1$次多项式$p_{m+1}(x)$，$I(p_{m+1})\neq Q(p_{m+1})$则称此求积公式的代数精度为$m$，或称此公式具有$m$次代数精度

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.1 Newton-Cotes公式

在以上公式中，节点x_k按等距分布，

令$h=\dfrac{b-a}{n}$ $x_k=a+kh, k=0,1,2,\ldots,n$

则称内插求积公式为$Newton-Cotes$公式 通常取$n=1,2,4$等值

(1)$n=1$ 则$x_0=a, x_1=b$ 插值函数公式为

$$p_1(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

可求得$A_0=A_1=\dfrac{b-a}{2}$

求积公式为

$$Q(f)=T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

称为梯形求积公式

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.1 Newton-Cotes公式

定理4.1 设$f''(x)$在$[a,b]$上连续，则梯形求积公式的误差是

$$E_1 = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), a < \eta < b$$

证明：$E_1 = \int_a^b R_1(x)dx = \int_a^b f[a,b,x](x-a)(x-b)dx$

由于$f''(x)$存在，可知,关于x的二阶差商$f[a,b,x]$连续

在$[a,b]$上,有$(x-a)(x-b) \le 0$, 由积分中值定理, 差商性质2, 知

存在$\eta \in (a,b)$,使

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_a^b f[a,b,x](x-a)(x-b)dx \\ &= f[a,b,\xi]\int_a^b (x-a)(x-b)dx \quad \xi \in (a,b) \\ &= -\frac{1}{12} f''(\eta)(b-a)^3 \qquad \eta \in (a,b) \end{aligned}$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.1 Newton-Cotes公式

(2)$n=2$ 则$h=\dfrac{b-a}{2}, x_0=a, x_1=\dfrac{a+b}{2}, x_2=b$

插值多项式为

$$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$A_0=\int_a^b\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx$$

$$\overset{x-a=t}{=}\int_0^{2h}\frac{(t-h)(t-2h)}{(-h)\cdot(-2h)}dt=\left.\frac{\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2h+2h^2t}{2h^2}\right|_0^{2h}=\frac{h}{3}$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.1 Newton-Cotes公式

$$A_1=\int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx \overset{x-a=t}{=} \int_0^{2h}\frac{t(t-2h)}{h\cdot(-h)}dt = \left.\frac{\frac{1}{3}t^3-t^2h}{2h^2}\right|_0^{2h} = \frac{4}{3}h$$

$$A_2=\int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx \overset{x-a=t}{=} \int_0^{2h}\frac{t(t-h)}{2h\cdot h}dt = \left.\frac{\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2h}{2h^2}\right|_0^{2h} = \frac{1}{3}h$$

求积公式为

$$Q(f)=S_1=\frac{h}{3}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

称为Simpson求积公式

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.1 Newton-Cotes公式

定理4.2 设$f^{(4)}(x)$在$[a,b]$上连续，则Simpson求积公式的误差是

$$E_2=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta),a<\eta<b$$

证明：取 $R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$

则 $E_2=\int_a^b\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx$

$$\underset{dx=dt}{\overset{x-a=t}{=}}\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_0^{2h}t\left(t-\frac{b-a}{2}\right)^2(t-(b-a))dt$$

$$=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\left[\frac{32}{5}t^5-16t^5-4t^5+\frac{40}{3}t^5\right]\Bigg|_0^h$$

$$=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.1 Newton-Cotes公式

(3)$n=4$ 则$h=\dfrac{b-a}{4}, x_0=a, x_1=a+h, x_2=a+2h, x_3=a+3h, x_4=b$

插值多项式为

$$p_4(x)=l_0(x)f(x_0)+l_1(x)f(x_1)+l_2(x)f(x_2)+l_3(x)f(x_3)+l_4(x)f(x_4)$$

可求得$A_0=\int_a^b l_0(x)dx=\dfrac{14h}{45}, A_1=\int_a^b l_1(x)dx=\dfrac{64h}{45},$

$$A_2=\int_a^b l_2(x)dx=\frac{24h}{45}, A_3=\int_a^b l_3(x)dx=\frac{64h}{45}, A_4=\int_a^b l_4(x)dx=\frac{14h}{45}$$

求积公式为

$$Q(f)=C_1=\frac{b-a}{90}[7f(a)+32f(a+h)+12f(a+2h)$$
$$+32f(a+3h)+7f(b)]$$

称为Cotes求积公式

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.1 Newton-Cotes公式

定理4.3 设$f^{(6)}(x)$在$[a,b]$上连续，则Cotes求积公式的误差是

$$E_4 = -\frac{8}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^7 f^{(6)}(\eta) \qquad a<\eta<b$$

$$= -\frac{(b-a)^7}{1935360} f^{(6)}(\eta) \qquad a<\eta<b$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.1 Newton-Cotes公式

例4.1 求以下数值积分公式中的求积系数A,B,C,D,使公式具有尽可能高的代数精度,并求其误差

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx Af(-1)+Bf(0)+Cf(1)+Df'(0)$$

解:在$x=-1,0,1$点处构造差商表,建立$Hermit$型的插值多项式

-1	$f(-1)$			
0	$f(0)$	$f(0)-f(-1)$		
0	$f(0)$	$f'(0)$	$f'(0)-f(0)+f(-1)$	
1	$f(1)$	$f(1)-f(0)$	$f(1)-f(0)-f'(0)$	$\frac{1}{2}[f(1)-2f'(0)-f(-1)]$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.1 Newton-Cotes公式

可得插值多项式

$$p_3(x)=f(-1)+[f(0)-f(-1)](x+1)+[f'(0)-f(0)+f(-1)](x+1)x$$

$$+\frac{1}{2}[f(1)-2f'(0)-f(-1)](x+1)x^2$$

$$I(f)=\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx Q(f)=\int_{-1}^{1}p_3(x)dx$$

$$=f(-1)\times x\Big|_{-1}^{1}+[f(0)-f(-1)](\frac{1}{2}x^2+x)\Big|_{-1}^{1}+[f'(0)-f(0)+f(-1)](\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)\Big|_{-1}^{1}$$

$$+\frac{1}{2}[f(1)-2f'(0)-f(-1)](\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=2f(-1)+2[f(0)-f(-1)]+\frac{2}{3}[f'(0)-f(0)+f(-1)]+\frac{1}{3}[f(1)-2f'(0)-f(-1)]$$

$$=\frac{1}{3}f(-1)+\frac{4}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.5 待定系数法

因此, 有 $A=\frac{1}{3}, B=\frac{4}{3}, C=\frac{1}{3}, D=0$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]$$

$$E(R)=\int_{-1}^{1} R(x)dx = \int_{-1}^{1} f[-1,0,0,1,x](x-1)x^2(x+1)dx$$

$$= f[-1,0,0,1,\xi]\int_{-1}^{1}(x-1)x^2(x+1)dx$$

$$=\frac{f^{(4)}(\eta)}{(3+1)!}(-\frac{4}{15}) \qquad -1\le\eta\le 1$$

$$=-\frac{1}{90}f^{(4)}(\eta) \qquad -1\le\eta\le 1$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.1 Newton-Cotes公式

例:确定Simpson求积公式的代数精度

解:Simpson求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$$

令

$$f(x)=1 \quad \int_a^b 1dx = b-a = \frac{b-a}{6}[1+4+1]$$

$$f(x)=x \quad \int_a^b xdx = \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right) = \frac{b-a}{6}\left[a+4\frac{a+b}{2}+b\right]$$

$$f(x)=x^2 \quad \int_a^b x^2dx = \frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right) = \frac{b-a}{6}\left[a^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+b^2\right]$$

$$f(x)=x^3 \quad \int_a^b x^3dx = \frac{1}{4}\left(b^4-a^4\right) = \frac{b-a}{6}\left[a^3+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right]$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.1 Newton-Cotes公式

但是当$f(x)=x^4$ 时

$$\int_a^b x^4 dx=\frac{1}{5}\left(b^5-a^5\right)\neq\frac{b-a}{6}\left[a^4+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^4+b^4\right]$$

因此$Simpson$求积公式的代数精度$m=3$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.1 Newton-Cotes公式

代数精度

梯形公式的代数精度为1

Simpon求积公式的代数精度为3

Cotes求积公式的代数精度为5

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.1 Newton-Cotes公式

牛顿-柯特斯(Newton-cotes)求积公式

(1)梯形求积公式 $n=1, h=b-a$

$$Q[f]=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)], R[f]=-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

(2)Simpson求积公式 $n=2, h=(b-a)/2$

$$Q[f]=\frac{h}{3}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)] \qquad R[f]=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta)$$

(3)牛顿求积公式 $n=3, h=(b-a)/3$

$$Q[f]=\frac{3h}{8}[f(a)+3f(a+h)+3f(b-h)+f(b)] \qquad R[f]=-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\eta)$$

(4)Cotes求积公式 $n=4, h=(b-a)/4$

$$Q[f]=\frac{2h}{45}[7f(a)+32f(a+h)+12f(a+2h)+32f(b-h)+7f(b)]$$

$$R[f]=-\frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\eta)$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.5 待定系数法

对于任一函数$f(x)$,在区间$[a,b]$上,构造数值积分公式

$$Q(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$

若当$f(x)$是不超过m次的多项式(不妨记为$p_m(x)$)时,有

$$I(p_m(x))=Q(p_m(x))$$

而当$f(x)$是$m+1$次的多项式(不妨记为$p_{m+1}(x)$)时,有

$$I(p_{m+1}(x))\neq Q(p_{m+1}(x))$$

则称$Q(f)$的代数精度为m

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.5 待定系数法

定理4.7　求积公式$Q(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$具有$m$次代数精度的充分必要条件是$I(x^j)=Q(x^j), I(x^{m+1})\neq Q(x^{m+1}), j=0,1,\ldots,m,$

证明　充分性

对任意不超过m次的多项式$p_m(x)$，总可以表示为

$$p_m(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m=\sum_{j=0}^{m}a_jx^j$$

因此 $$I(p_m(x))=\int_a^b\left(\sum_{j=0}^{m}a_jx^j\right)dx=\sum_{j=0}^{m}a_j\int_a^b x^j dx$$

$$=\sum_{j=0}^{m}a_jI(x^j)=\sum_{j=0}^{m}a_jQ(x^j)=\sum_{j=0}^{m}a_j\left(\sum_{k=0}^{n}A_kx_k^j\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}A_k\left(\sum_{j=0}^{m}a_jx_k^j\right)=\sum_{k=0}^{n}A_kp_m(x_k)=Q(p_m(x))$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.5 待定系数法

所以, 求积公式$Q(f)$有至少m次代数精度.

又因为$I(x^{m+1}) \neq Q(x^{m+1})$,由代数精度的定义知, 公式的代数精度为$m$

必要性

由于$x^j\,(j=0,1,\ldots,m)$均为不超过m次的多项式, 如果 $I(x^{m+1})=Q(x^{m+1})$

则由充分性知, 其代数精度至少应为$m+1$次 , 与定义矛盾.

证毕.

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.5 待定系数法

定理4.8（广义Peano定理）

设由 $E(f)=I(f)-Q(f)$ 定义的误差$E(f)$是区间$[a,b]$上的连续函数,近似公式$Q(f)$具有的m次代数精度,则

$$E[f(x)]=E[R(x)]$$

其中 $R(x)=f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_m,x]\omega(x)$

$$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_m)$$

而$x_0,x_1,x_2,\ldots,x_m$是$[a,b]$上的$m+1$个任意点

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.5 待定系数法

例. 确定数值积分公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx Af(-1)+Bf(0)+Cf(1)+Df'(0)$

中的求积系数A,B,C,D,使公式具有尽可能高的代数精度,并求其误差

为使公式具有尽可能高的代数精度, 可期望其代数精度为3

$f(x)=1$时,左$=\int_{-1}^{1} 1dx=2=$右$=A+B+C$

$f(x)=x$时,左$=\int_{-1}^{1} xdx=0=$右$=-A+C+D$

$f(x)=x^2$时,左$=\int_{-1}^{1} x^2dx=\frac{2}{3}=$右$=A+B$

$f(x)=x^3$时,左$=\int_{-1}^{1} x^3dx=0=$右$=-A+C$

联立方程,解出$A=\frac{1}{3},B=\frac{4}{3},C=\frac{1}{3},D=0$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}\left(f(-1)+4f(0)+f(1)\right)$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.5 待定系数法

当$f(x)=x^4$时, 左$=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{5}\neq$ 右$=\frac{1}{3}(1+0+1)=\frac{2}{3}$

因此其代数精度$m=3$, 因此, 由广义Peano定理可以取4个点-1,0,0,1

$$R(x)=f[-1,0,0,1,x](x-1)x^2(x+1)$$

$$\begin{aligned}
E(f)&=E(R)\\
&=I(R)-Q(R)\\
&=\int_{-1}^{1}f[-1,0,0,1,x](x-1)x^2(x+1)dx-\frac{1}{3}\left[R(-1)+4R(0)+R(1)\right]\\
&=f[-1,0,0,1,\xi]\int_{-1}^{1}(x-1)x^2(x+1)dx \qquad -1\le\eta\le1\\
&=\frac{f^{(4)}(\eta)}{(3+1)!}\left(-\frac{4}{15}\right) \qquad -1\le\eta\le1\\
&=-\frac{1}{90}f^{(4)}(\eta) \qquad -1\le\eta\le1
\end{aligned}$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.5 待定系数法

对于$[a,b]$上的$Simpson$公式，由于其代数精度$m=3$，

由广义Peano定理知，可以取4个点$a,\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},b$

$$R(x)=f[a,\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},b,x](x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$$

则 $E(f)=E(R)$

$$=I(R(x))-Q(R(x))$$

$$=\int_{-1}^{1}R(x)dx-\frac{1}{3}[R(a)+4R(\frac{a+b}{2})+R(b)]$$

$$=\int_{-1}^{1}f[a,\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},b,x](x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx$$

$$=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)\qquad \eta\in(a,b)$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.5 待定系数法

例. 求以下数值积分公式求积系数A,B,C,D,使公式具有尽可能高的代数精度,并求其误差

$$\int_0^1 f(x)dx \approx Af(0)+Bf(1)+Cf'(0)+Df'(1)$$

例. 已知以下的数值积分公式,试确定其中的系数λ,使公式具有尽可能高的代数精度,并给出其代数精度及误差公式

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(0)+f(h)\right]+\lambda h^2\left[f'(0)-f'(h)\right]$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

例4.8 求公式系数A,B及节点x_0,x_1,使以下求积公式具有尽可能高的代数精度 $I=\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx Af(x_0)+Bf(x_1)$

解:使用待定系数法 由于有4个参数,因此可期望代数精度为3

分别取$f(x)=1,x,x^2,x^3$,代入可得到以下等式

$$\begin{cases} A+B=2 \\ Ax_0+Bx_1=0 \\ Ax_0^2+Bx_1^2=\dfrac{2}{3} \\ Ax_0^3+Bx_1^3=0 \end{cases}$$ 联立方程组 ,解得 $$\begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ x_0=-\sqrt{3}/3 \\ x_1=\sqrt{3}/3 \end{cases}$$

因此 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3})+f(\frac{\sqrt{3}}{3})$ 具有的代数精度为3

并且可以求得$E(f)=\frac{1}{135}f^{(4)}(\eta)$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.2 复化求积公式

利用定积分对区间的区间可加性,将求积公式分别应用于每一个小区间上

设$x_k\,(k=0,1,\ldots,n)$是区间$[a,b]$上满足

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

的$n+1$个点, 由于

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$$

可将$(4-7),(4-8),(4-9)$应用于任何一个子区间$[x_{k-1},x_k]$上的积分

$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$, 当$n$逐渐增大时, 区间长度越来越小, 则每个小区间上的求积公式误差很小, 且总的积分的误差也将减小

此方法称为复化求积分法

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.2 复化求积公式

取节点x_k按等距分布，令$h=\dfrac{b-a}{n}$ $x_k=a+kh, k=0,1,2,\ldots,n$

复化梯形公式

$$T_n=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

复化Simpson公式

$$S_n=\frac{h}{6}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{x_{k-1}+x_k}{2})+f(b)\right]$$

复化Cotes公式

$$S_n=\frac{h}{90}[7f(a)+32\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k+\frac{h}{4})+f(x_k+\frac{3h}{4})\right]$$

$$+12\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k+\frac{h}{2})\right]+14\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+7f(b)]$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.2 复化求积公式

定理4.4 设$f^{(2)}(x)$在$[a,b]$上连续，则复化梯形求积公式的误差是

$$E_T = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta), a<\eta<b$$

证明：在每个子区间$[x_{k-1}, x_k]$上，梯形求积公式的误差是

$$r_k = -\frac{h^3}{12}f''(\eta_k), x_{k-1}<\eta_k<x_k, k=1,2,\ldots,n$$

因此，复化梯形求积公式的误差为

$$E_T = \sum_{k=1}^{n} r_k = -\frac{h^3}{12}\sum_{k=1}^{n} f''(\eta_k)$$

因$f''(x)$在$[a,b]$上连续，由连续函数的介值定理，存在$\eta\in(a,b)$

使 $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f''(\eta_k) = f''(\eta)$$

因此 $$E_T = -\frac{h^3}{12}nf''(\eta) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta) \qquad a<\eta<b$$ 证毕

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.2 复化求积公式

定理4.5 设$f^{(4)}(x)$在$[a,b]$上连续，则复化Simpson求积公式的误差是

$$E_S = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta), a<\eta<b$$

定理4.6 设$f^{(6)}(x)$在$[a,b]$上连续，则复化Cotes求积公式的误差是

$$E_C = -\frac{b-a}{1935360}h^6 f^{(6)}(\eta), a<\eta<b$$

当$h \to 0$时，梯形公式，*Simpson*公式，*Cotes*公式的余项分别以$O(h^k)$ $k=2,4,6$的速度趋向于零，因此，分别称其为2阶，4阶，6阶方法

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.3 步长的选取

例4.2 计算积分$\int_0^1 e^x dx$

h	梯形公式	Simpson公式	Cotes公式
0.5	1.753925	1.71885	
0.25	1.7272219	1.7183188	1.7408548
0.125	1.7205186	1.7182841	1.7182818
0.0625	1.7188411	1.7182820	1.7182818
0.03125	1.7184216	1.7182818	1.7182818

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.3 步长的选取

对指定的误差界ε,如何选取h,能够使复化积分公式达到计算精度?

若$\varepsilon = 10^{-4}$，则由于 $M_K = \max\limits_{0 \le x \le 1} \left| f^{(k)}(x) \right| = e = 2.71828...$

由梯形公式的误差公式有

$$\left| E_T \right| = \frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta) \le \frac{1}{12} h^2 M_k \le 10^{-4}$$

因此,$h \le 2 \times 10^{-2} = 0.02$

同理, 对Simpson公式, 可得$h \le 0.0313$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.3 步长的选取

由于被积函数的导数的界很难估计，因此可在计算过程中自动选取步长，使之精度达到要求

在复化梯形公式中，有

$$I(f)-T_n=-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

将区间$[a,b]$作n等分

区间加密后，有

$$I(f)-T_{2n}=-\frac{b-a}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\eta')$$

将区间$[a,b]$作$2n$等分

假定$f''(x)$在区间$[a,b]$上变化不大，即$f''(\eta)\approx f''(\eta')$

$$I(f)-T_{2n}\approx\frac{1}{4}\left(I(f)-T_n\right)$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.3 步长的选取

因此 $I(f) \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$

$$\therefore \quad I(f) - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

即 当 $T_{2n} - T_n < \varepsilon$, 有 $I(f) - T_{2n} < \varepsilon$

计算步骤

(1) 先取 $n = 1, h = b - a$, 计算 T_n

(2) 缩小步长一半, 计算 T_{2n}

(3) 计算误差, 如果满足要求 $|T_{2n} - T_n| < \varepsilon$, 则停止,

否则转(2)

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.3 步长的选取

类似于梯形公式,可以得到自动选步长的Simpson公式

$$I-S_n=-\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta)$$

$$I-S_{2n}=-\frac{b-a}{2880}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta')$$

假定$f^{(4)}(x)$在$[a,b]$上变化不大时,可得

$$\frac{I-S_n}{I-S_{2n}}\approx 4^2$$

因此, $I-S_{2n}\approx\frac{1}{4^2-1}(S_{2n}-S_n)$,自动选步长的Simpson公式

同理, $I-C_{2n}\approx\frac{1}{4^3-1}(C_{2n}-C_n)$,自动选步长的Cotes公式

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.6 Romberg方法

获得高精度积分的方法

(1)减少步长

(2)使用高精度公式

缺点是函数计算量较大

考虑使用低精度公式，计算高精度积分的方法

在复化梯形求积公式中有

$$I(f) \approx T_n$$

$$I(f) \approx T_{2n}$$

$$I(f) - T_{2n} \approx \frac{1}{4-1}\left(T_{2n} - T_n\right)$$

因此，$I(f) \approx T_{2n} + \frac{1}{4-1}\left(T_{2n} - T_n\right)$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.6 Romberg方法

$$
\begin{aligned}
I(f) &= T_{2n} + \frac{T_{2n} - T_n}{4-1} \\
&= \frac{4T_{2n} - T_n}{4-1} \\
&= \frac{1}{3}\left[4\left(\frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\right) - T_n\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[T_n + 2h\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right) + 2h\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\right] \\
&= \frac{h}{6}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 4\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\right] \\
&= S_n
\end{aligned}
$$

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.6 Romberg方法

可见,使用复化梯形公式通过适当的组合,可以得到精度更高的Simpson公式,其代数精度可以由1提高到3

同理,由复化Simpson公式可以得到

$$I \approx S_{2n} + \frac{1}{4^2-1}(S_{2n} - S_n) = \frac{4^2 S_{2n} - S_n}{4^2-1} = C_n$$

即,可以得到计算精度为$O(h^6)$,代数精度为5的Cotes公式

同理,由复化Cotes公式可以得到

$$I \approx C_{2n} + \frac{1}{4^3-1}(C_{2n} - C_n) = \frac{4^3 C_{2n} - C_n}{4^3-1} = R_n$$

即,可以得到计算精度为$O(h^8)$,代数精度为7的*Romberg*公式

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.6 Romberg方法

*Romberg*方法:

通过使用以下公式

$$S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{4-1} \qquad (4\text{-}25)$$

$$C_n = \frac{4^2 S_{2n} - S_n}{4^2 - 1} \qquad (4\text{-}26)$$

$$R_n = \frac{4^3 C_{2n} - C_n}{4^3 - 1} \qquad (4\text{-}27)$$

逐步求积分的过程, 称为*Romberg*方法

以上公式称为*Romberg*公式

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.6 Romberg方法

*Romberg*计算图

$$
\begin{array}{ccccc}
T_1 & & & & \\
T_2 & S_1 & & & \\
T_4 & S_2 & C_1 & & \\
T_8 & S_4 & C_2 & R_1 & \\
T_{16} & S_8 & C_4 & R_2 & \\
T_{32} & S_{16} & C_8 & R_4 & \\
\cdots & & & &
\end{array}
$$

设ε为给定的误差限，当$\left|R_{2^{k+1}}-R_{2^k}\right|<\varepsilon$时，取$R_{2^{k+1}}$为积分的近似值

这样一个计算过程称为*Romberg*积分算法

4.1 内插求积 Newton-Cotes公式

4.1.6 Romberg方法

例4.6用*Romberg*积分方法计算积分，使精度$\varepsilon<10^{-4}$

$$I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$$

k	T	S	C	R
1	3			
2	3.1	3.13333		
3	3.13118	3.14157	3.14212	
4	3.13899	3.14159	3.14159	3.14158
5	3.14094	3.14159	3.14159	3.14159

由于$|R_2-R_1|=0.00001=10^{-5}$，满足精度要求

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

设取$2n+2$次多项式$p(x)$

$$p(x)=\omega^2(x)=(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$$

则有 $Q(p(x))=\sum_{i=0}^{n}A_i p(x_i)=0$ 而$I(p(x))=\int_a^b \omega^2(x)dx>0$

因此可知:

具有$n+1$个节点的求积公式,代数精度至多可以达到$n+1$

考虑如何选择节点x_i,使积分公式的代数精度尽可能高

考虑以下一般形式的积分问题

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx$$

其中:连续函数$\rho(x)\geq 0,\forall x\in[a,b]$,称为权函数

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.1 正交多项式

定义 设$f(x), g(x)$是(a,b)区间上的连续函数, $\rho(x)$为权函数, 称积分

$$\int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$$

为$f(x)$与$g(x)$的内积, 记作(f, g)

若$(f, g) = 0$, 则称$f(x)$与$g(x)$在区间(a,b)上按权函数$\rho(x)$正交

若函数族$\{\varphi_j(x), j = 0,1,\ldots\}$在$(a,b)$上两两正交, 即

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ A_i > 0, & i = j \end{cases}$$

则称$\{\varphi_j(x), j = 0,1,\ldots\}$为正交函数族

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.1 正交多项式

容易验证：函数族$\{\sin kx, k=1,2,\ldots\}$是区间$(0,\pi)$上权为1的正交函数族；

函数族$\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots\}$是区间$(-\pi,\pi)$上权为1的正交函数族；

若$\varphi_j(x)$是最高项系数为α_j的j次多项式，且$\{\varphi_j(x), j=1,2,\ldots\}$是$(a,b)$上以$\rho(x)$为权的正交多项式系

构造$\bar{\varphi}_j(x)=\dfrac{1}{\alpha_j}\varphi_j(x), j=1,2,\ldots,$形成权为$\rho(x)$的最高次项系数为1的正交多项式

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.1 正交多项式

对任何次数不超过n的多项式$p(x)$都可以由正交多项式$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$线性表示,即

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x) \qquad \text{其中}:c_j\text{为适当的常数.}$$

由此容易得到

$$\int_a^b \rho(x)p(x)\varphi_{n+1}(x)dx=0$$

若取, $p(x)=x^k, k=0,1,2,\ldots,n$, 有

$$\int_a^b \rho(x)x^k\varphi_{n+1}(x)dx=0$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.1 正交多项式

定理4.9 若取$\overline{\varphi}_{-1}(x)=0,\overline{\varphi}_0(x)=1$,则正交多项式系有如下递推关系

$$\overline{\varphi}_{k+1}(x)=(x-\alpha_k)\overline{\varphi}_k(x)-\beta_k\overline{\varphi}_{k-1}(x),k=1,2,\ldots$$

其中 $$\alpha_k=\frac{\left(x\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_k\right)}{\left(\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_k\right)},\quad \beta_k=\frac{\left(\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_k\right)}{\left(\overline{\varphi}_{k-1},\overline{\varphi}_{k-1}\right)}$$

证明：设$\overline{\varphi}_0(x)=1$与$\overline{\varphi}_1(x)=x-\alpha_0$正交

则有 $(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_0)=\int_a^b\rho(x)(x-\alpha_0)\times 1dx=0$ $\quad\therefore\int_a^b\rho(x)xdx-\int_a^b\rho(x)\alpha_0dx=0$

因此$\int_a^b\rho(x)xdx=\int_a^b\rho(x)\alpha_0dx=\alpha_0\int_a^b\rho(x)dx$ $\quad\alpha_0=\dfrac{(x\overline{\varphi}_0,\overline{\varphi}_0)}{(\overline{\varphi}_0,\overline{\varphi}_0)}$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.1 正交多项式

一般地,

$$
\begin{aligned}
(\overline{\varphi}_{k+1},\overline{\varphi}_k) &= ((x-\alpha_k)\overline{\varphi}_k-\beta_k\overline{\varphi}_{k-1},\overline{\varphi}_k) \\
&= ((x-\alpha_k)\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_k)-(\beta_k\overline{\varphi}_{k-1},\overline{\varphi}_k) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

由此函数系的正交性:$(\overline{\varphi}_{k-1},\overline{\varphi}_k)=0$

因此$((x-\alpha_k)\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_k)=0$,即$(x\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_k)=\alpha_k(\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_k)$

$$
\alpha_k=\frac{(x\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_k)}{(\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_k)}
$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.1 正交多项式

又因为 $(\overline{\varphi}_{k+1},\overline{\varphi}_{k-1})=0$

有 $((x-\alpha_k)\overline{\varphi}_k-\beta_k\overline{\varphi}_{k-1},\overline{\varphi}_{k-1})=0$

$$((x-\alpha_k)\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_{k-1})-(\beta_k\overline{\varphi}_{k-1},\overline{\varphi}_{k-1})=0$$

而$(\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_{k-1})=0$

$$(x\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_{k-1})+(-\alpha_k\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_{k-1})-(\beta_k\overline{\varphi}_{k-1},\overline{\varphi}_{k-1})=0$$

$$\therefore\quad \beta_k=\frac{(x\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_{k-1})}{(\overline{\varphi}_{k-1},\overline{\varphi}_{k-1})}$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.1 正交多项式

注意到$(x\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_{k-1})=(\overline{\varphi}_k,x\overline{\varphi}_{k-1})$

由于$x\overline{\varphi}_{k-1}$为$k$次多项式，展开后为

$$x\overline{\varphi}_{k-1}(x)=\overline{\varphi}_k(x)+c_{k-1}\overline{\varphi}_{k-1}(x)+\cdots+c_1\overline{\varphi}_1(x)+c_0\overline{\varphi}_0(x)$$

由正交性 $(x\overline{\varphi}_{k-1},\overline{\varphi}_k)=(\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_k)$

因此可得 $\beta_k=\dfrac{(\overline{\varphi}_k,\overline{\varphi}_k)}{(\overline{\varphi}_{k-1},\overline{\varphi}_{k-1})}$

证毕

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.1 正交多项式

推论4.10　对于最高项系数为α_j的正交多项式系$\{\varphi_j(x)\}$有如下递推关系

$$\varphi_{k+1}(x)=\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}(x-\hat{\alpha}_k)\varphi_k(x)-\frac{\alpha_{k+1}\alpha_{k-1}}{\alpha_k^2}\hat{\beta}_k\varphi_{k-1}(x),k=0,1,\ldots$$

其中

$$\hat{\alpha}_k=\frac{(x\varphi_k,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\quad,\quad\hat{\beta}_k=\frac{(\varphi_k,\varphi_k)}{(\varphi_{k-1},\varphi_{k-1})}$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.1 正交多项式

定理4.11 n次正交多项式$\overline{\varphi}_n(x)$有n个互异的实根,并且全部在区间(a,b)内

证明:(1)证明有根. 对于固定的$n(n\geq 1)$,若$\overline{\varphi}_n(x)$在(a,b)不变号

不妨设其恒为大于零,则

$$\int_a^b \rho(x)\overline{\varphi}_n(x)\overline{\varphi}_0(x)dx=\int_a^b \rho(x)\overline{\varphi}_n(x)dx>0$$ 与正交多项式矛盾

因此至少存在一个数$x_1\in(a,b)$使,$\overline{\varphi}_n(x_1)=0$

(2)证明根为单根. 假设x_1是$\overline{\varphi}_n(x)$的重根,则$\dfrac{\overline{\varphi}_n(x)}{(x-x_1)^2}$是$n-2$次多项式

由正交多项式有 $$\int_a^b \rho(x)\overline{\varphi}_n(x)\frac{\overline{\varphi}_n(x)}{(x-x_1)^2}dx=0$$

但$$\int_a^b \rho(x)\overline{\varphi}_n(x)\frac{\overline{\varphi}_n(x)}{(x-x_1)^2}dx=\int_a^b \rho(x)\frac{(\overline{\varphi}_n(x))^2}{(x-x_1)^2}dx>0$$ $\therefore x_1$为单根

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.1 正交多项式

(3) 证明根有n个

假设$\overline{\varphi}_n(x)$在(a,b)中只有l个根$(l<n), x_1, x_2, \ldots, x_l$

则$\overline{\varphi}_n(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_l)=\psi(x)(x-x_1)^2(x-x_2)^2\cdots(x-x_l)^2$

由于$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_l)$的次数低于$n$次

则由正交性$\int_a^b \rho(x)\overline{\varphi}_n(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_l)=0$

由$\psi(x)$在(a,b)上不变号

$$\int_a^b \rho(x)\psi(x)(x-x_1)^2(x-x_2)^2\cdots(x-x_l)^2 \neq 0$$

由此矛盾,因此可知$\overline{\varphi}_n(x)$在(a,b)上确有n个互异实根. 证毕

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

具有$n+1$个节点的数值积分公式,如果其代数精度达到$2n+1$,则称此类积分公式为$Gauss$型求积公式.

相应的求积公式节点$x_k\,(k=0,1,2,\ldots)$称为$Gauss$点

定理4.12 数值积分公式

$$Q(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$

的节点$x_k: a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$是$Gauss$点的充分必要条件是:它们是区间$(a,b)$上以$\rho(x)$为权的正交多项式$\varphi_{n+1}(x)$的$n+1$个根

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

证明：必要性

设$x_0, x_1, \ldots, x_n$为$Gauss$点 记$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

由于$Gauss$型求积公式具有$2n+1$次代数精度,因此对于不超过n次的多项式$p(x)$,有

$$\int_a^b \rho(x)\omega_n(x)p(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_j p(x_j)\omega_n(x_j) = 0$$

由$p(x)$的任意性可知, $\omega_n(x)$按权函数$\rho(x)$与任何不超过n次的多项式正交，即$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$正交

令 $\varphi_{n+1}(x) = \alpha_n \omega_n(x)$ （由于$p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_0$）

则 $\varphi_{n+1}(x)$为以$\rho(x)$为权的正交多项式, 并且 $x_0, x_1, \ldots, x_n$为$\varphi_{n+1}(x)$的根

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

充分性　　设$\varphi_k(x), k=0,1,\ldots,n$是$(a,b)$上以$\rho(x)$为权的正交多项式

取$\varphi_{n+1}(x)$的$n+1$个根$x_0, x_1, \ldots, x_n$为求积公式的节点,

则$\varphi_{n+1}(x)=\alpha_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

对任意不超过$2n+1$次多项式$q(x)$,有

$$q(x)=p(x)\varphi_{n+1}(x)+r(x)$$

其中,$p(x)$和$r(x)$均为不超过n次的多项式

由$\varphi_{n+1}(x)$的正交性

$$\int_a^b \rho(x)q(x)dx=\int_a^b \rho(x)p(x)\varphi_{n+1}(x)dx+\int_a^b \rho(x)r(x)dx$$
$$=\int_a^b \rho(x)r(x)dx$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

由于具有$n+1$个节点的插值型求积公式具有至少n次代数精度，而且

$$q(x_j)=r(x_j),\ j=0,1,2,\ldots,n$$

因此

$$\int_a^b \rho(x)r(x)dx=\sum_{j=0}^{n}A_j r(x_j)=\sum_{j=0}^{n}A_j q(x_j)$$

因此，求积公式具有$2n+1$次代数精度，即$x_j,\ j=0,1,2,\ldots,n$是$Gauss$点

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

由定理4.12可知,如果采用正交多项式的根作为求积公式的节点,则可以保证公式具有最高代数精度

确定了x_k之后,由以下公式计算系数A_k

$$A_j = \int_a^b \rho(x) l_j(x) dx$$

$$= \int_a^b \rho(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_j)\omega'(x_j)} dx$$

由正交多项式的零点均为单重

$$= \int_a^b \rho(x) \frac{\varphi_{n+1}(x)}{(x - x_j)\varphi'_{n+1}(x_j)} dx \quad j = 0,1,\ldots,n$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

Gauss型求积公式的误差

由广义*Peano*定理知，由于公式具有$2n+1$次代数精度，因此取

$$R(x)=f[x_0,x_0,x_1,x_1,\ldots,x_n,x_n,x][\overline{\varphi}_{n+1}(x)]^2$$

显然，$Q(R(x))=0$

$$\begin{aligned}E(f)&=E(R(x))=I[R(x)]-Q[R(x)]\\&=I[R(x)]\\&=\int_a^b\rho(x)f[x_0,x_0,x_1,x_1,\ldots,x_n,x_n,x][\overline{\varphi}_{n+1}(x)]^2dx\\&=f[x_0,x_0,x_1,x_1,\ldots,x_n,x_n,\xi]\int_a^b\rho(x)[\overline{\varphi}_{n+1}(x)]^2dx\\&=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b\rho(x)[\overline{\varphi}_{n+1}(x)]^2dx,a<\eta<b\end{aligned}$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

常用的正交多项式和相应的*Gauss*型求积公式

(1) *Legendre*(勒让德)多项式, *Gauss - Legendre*型求积公式

在区间(-1,1)上以$\rho(x)=1$为权函数的正交多项式称为*Legendre*多项式

它的表达式为:

$$P_0(x)=1 \qquad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n], n=1,2,\ldots$$

$P_n(x)$的首项系数为$\frac{(2n)!}{2^n n!}$, 因此得到首项系数为1的Legendre多项式:

$$\overline{P}_0(x)=1 \qquad \overline{P}_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n], n=1,2,\ldots$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

可以验证它的正交性

$$(P_m, P_n) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

得到递推关系式

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, P_1(x) = x \\ P_{n+1}(x) = \dfrac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \dfrac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \end{cases}$$

在区间[-1, 1]上权函数ρ(x)=1的正交多项式为

$$\left\{1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \ldots, \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n\right\}$$

它们的根在$(-1,1)$上都是单根, 并且关于原点对称

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

取*Legendre*多项式$P_{n+1}(x)$的零点作为*Gauss*点, 得到求积公式的系数

$$A_j = \int_{-1}^{1} \frac{p_{n+1}(x)}{(x-x_j)p'_{n+1}(x)}dx = \frac{2}{(1-x_j^2)[p'_{n+1}(x_j)]^2}$$

$$R(x) = p_{n+1}[x_0, x_0, x_1, x_1 \cdots, x_n, x_n, x](x-x_0)^2(x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2$$

$$\begin{aligned} E(f) &= E(r(x)) \\ &= I(r(x)) - Q(r(x)) \\ &= \frac{2^{2n+3}((n+1)!)^4}{[(2n+2)!]^2(2n+3)} f^{(2n+2)}(\xi) \qquad -1 < \xi < 1 \end{aligned}$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

(2) *Laguerre*(拉盖尔)多项式, *Gauss - Laguerre*型求积公式

在区间$(0,\infty)$上以$\rho(x)=e^{-x}$为权函数的正交多项式称为*Laguerre*多项式

它的表达式为:

$$L_0(x)=1 \qquad L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n), n=1,2,\ldots$$

具有正交性 $$(L_m,L_n)=\begin{cases}0, & m\neq n\\ (n!)^2, & m=n\end{cases}$$

递推关系式 $$\begin{cases}L_0(x)=1, L_1(x)=1-x\\ L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-x^2L_{n-1}(x)\end{cases}$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

在区间$(0,\infty)$上以$\rho(x)=e^x$为权函数的$Laguerre$正交多项式为

$$L_0(x)=1$$

$$L_1(x)=1-x$$

$$L_2(x)=x^2-4x+2$$

$$L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6$$

$$L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24$$

$$L_5(x)=-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120$$

……

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

取$Laguerre$多项式$L_{n+1}(x)$的零点作为$Gauss$点,则

$Gauss-Laguerre$求积公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$$

$$A_j = \frac{(n+1)!}{x_j[L'_{n+1}(x_j)]^2}, j = 0,1,2,\ldots,n$$

$$E(f) = \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)!]} f^{(2n+2)}(\xi), \xi \in (0,+\infty)$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

(3) *Chebyshev*(切比雪夫)多项式, *Gauss - Chebyshev*求积公式

在区间$(-1,1)$上以$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$为权函数的正交多项式称为

*Chebyshe*多项式

它的表达式为:

$$T_0(x)=1 \qquad T_n(x)=\cos(n\arccos x), x\in[-1,1], n=1,2,\ldots$$

具有正交性 $$(T_m,T_n)=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n=0\\ \pi/2, & m=n\neq 0\end{cases}$$

递推关系式 $$\begin{cases}T_0(x)=1, T_1(x)=x\\ T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)\end{cases}$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

在区间$(-1,1)$上以$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$为权函数的*Chebyshe*正交多项式

$$T_0(x)=1$$

$$T_1(x)=x$$

$$T_2(x)=\frac{1}{2}x^2-1$$

$$T_3(x)=4x^3-3x$$

$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$$

$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$$

……

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

取n+1次*Chebyshe*多项式$T_{n+1}(x)$的零点

$$x_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2n+2},\ j = 0,1,\ldots,n$$

作为*Gauss*点,则*Gauss-Chebyshe*求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \frac{\pi}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(x_j)$$

$$A_j = \frac{\pi}{n+1},\ j = 0,1,2,\ldots,n$$

$$E(f) = \frac{\pi}{(2n+2)!2^{2n+1}} f^{(2n+2)}(\xi), \xi \in (-1,1)$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

(4) *Hermit*多项式, *Gauss - Hermit*型求积公式

在区间$(-\infty,+\infty)$上以$\rho(x)=e^{-x^2}$为权函数的正交多项式称为*Hermit*多项式

它的表达式为:

$$\mathrm{H}_0(x)=1 \qquad \mathrm{H}_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), n=1,2,\ldots$$

递推关系式 $\begin{cases} H_0(x)=1, H_1(x)=1-x \\ H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x) \end{cases}$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

在区间$(-\infty,+\infty)$上以$\rho(x)=e^{-x^2}$为权函数的$Hermit$正交多项式为

$$H_0(x)=1$$

$$H_1(x)=2x$$

$$H_2(x)=4x^2-2$$

$$H_3(x)=8x^3-12x$$

$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$$

$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$$

……

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

取*Hermit*多项式$H_{n+1}(x)$的零点作为*Gauss*点,则

*Gauss - Hermit*求积公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$$

$$A_j = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{H'_{n+1}(x_j) H_n(x_j)}, j = 0,1,2,\ldots,n$$

$$E(f) = \frac{(n+1)! \sqrt{\pi}}{2^{n+1}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi), \xi \in (-\infty, +\infty)$$

4.4 Gauss型求积公式与正交多项式

4.4.2 Gauss型求积公式

*Gauss*型求积公式的构造

(1)求出区间$[a,b]$上权函数$\rho(x)$的正交多项式$\varphi_{n+1}(x)$

(2)求出$\varphi_{n+1}(x)$的n个根$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$,即为*Gauss*点

(3)求出积分系数

(4)求出*Gauss*积分公式的误差

*Gauss*型求积公式特点

(1)系数A_j总是正数

(2)当$n \to \infty$时,随着n的增大公式的误差迅速减少

4.5 数值微分

设函数$f(x)$定义在区间[a, b]上,且在此区间上可微,则有

对$\forall x \in [a,b]$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

因此, 可以使用以下公式, 当h足够小,计算$f(x)$在x处的导数近似值

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

但是当h足够小时, 计算的结果将是不准确的

4.5 数值微分

通过对计算精度较低的公式的适当的组合，获得较高计算精度的方法称为外推法

例4.13 求以下形式的数值导数公式的系数A,B,C，并求误差

$$f''(x)\approx Af(x-h)+Bf(x)+Cf(x+h)$$

解：将$f(x-h)$，$f(x+h)$在x外按Taylor公式展开，并分别乘系数A,C

$$Af(x-h)=Af(x)-Ahf'(x)+A\frac{h^2}{2}f''(x)-A\frac{h^3}{6}f'''(x)+A\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\ldots$$

$$Bf(x)=Bf(x)$$

$$Cf(x+h)=Cf(x)+Chf'(x)+C\frac{h^2}{2}f''(x)+C\frac{h^3}{6}f'''(x)+C\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\ldots$$

三式相加，有

$$\begin{aligned}f''(x)&\approx Af(x-h)+Bf(x)+Cf(x+h)\\&=(A+B+C)f(x)+(-A+C)hf'(x)\\&\quad+(A+C)\frac{h^2}{2}f''(x)+(-A+C)\frac{h^3}{6}f'''(x)+(A+C)\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\ldots\end{aligned}$$

4.5 数值微分

因此, 令

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A+C=0 \\ A+C=\dfrac{2}{h^2} \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} A=\dfrac{1}{h^2} \\ B=-\dfrac{2}{h^2} \\ C=\dfrac{1}{h^2} \end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{1}{h^2}\left[f(x-h)-2f(x)+f(x+h)\right]-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(x)-\frac{h^4}{360}f^{(6)}(x)\ldots$$

4.5 数值微分

记$D_h(x)=\frac{1}{h^2}\left[f(x-h)-2f(x)+f(x+h)\right]$

则其误差为

$$f''(x)-D_h(f)=-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(x)-\frac{h^4}{360}f^{(6)}(x)\ldots$$

若再取$\frac{h}{2}$为步长进行计算, 有

$$f''(x)-D_{\frac{h}{2}}(f)=-\frac{h^2}{4\times 12}f^{(4)}(x)-\frac{h^4}{4^2\times 360}f^{(6)}(x)\ldots$$

由以上两式可得

$$f''(x)-\frac{1}{3}\left[4D_{\frac{h}{2}}(f)-D_h(f)\right]=\frac{h^4}{4^2\times 360}f^{(6)}(x)+\cdots$$

记 $\overline{D}(f)=\frac{4D_{h/2}(f)-D_h(f)}{3}$,则可得到$f''(x)$更精确的结果

4.5 数值微分

因此,构造数值微分公式的比较普遍的方法是用一个易于计算其导数的函数近似替代问题中的函数f(x).

插值多项式是一个比较合适的选择

4.5 数值微分

设$x_0, x_1, \ldots, x_m$是$[a,b]$上的$m+1$个点，记$p_m(x)$为相应的插值多项式

则 $$f(x) = p_m(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_m, x]\omega(x)$$

对其求k阶导数

$$f^{(k)}(x) = p_m^{(k)}(x) + \left\{ f[x_0, x_1, \ldots, x_m, x]\omega(x) \right\}^{(k)}$$

若采用Lagrange插值多项式，则可知$f(x)$在$\bar{x}$处的k阶导数的近似计算式为

$$f^{(k)}(\bar{x}) \approx \sum_{i=0}^{n} l_i^{(k)}(\bar{x}) f(x_i)$$

误差为

$$E(f) = \frac{d^{(k)}}{dx^k} \left\{ f[x_0, x_1, \ldots, x_m, x]\omega(x) \right\} \Big|_{x=\bar{x}}$$

4.5 数值微分

定理:

$$\frac{d^{(k)}}{dx^k} f[x_0, x_1, \ldots, x_m, x] = k! f[x_0, x_1, \ldots, x_m, \underbrace{x, x, \ldots, x, x}_{k+1个}]$$

证明: 当k=1时

$$\frac{d}{dx} f[x_0, x_1, \ldots, x_m, x]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_m, x+\Delta x] - f[x_0, x_1, \ldots, x_m, x]}{(x+\Delta x) - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f[x_0, x_1, \ldots, x_m, x, x+\Delta x]$$

$$= f[x_0, x_1, \ldots, x_m, x, x]$$

4.5 数值微分

当$k=2$时

$$\frac{d^{(2)}}{dx^2}f[x_0,x_1,\ldots,x_m,x]$$

$$=\frac{d}{dx}f[x_0,x_1,\ldots,x_m,x,x]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x_0,x_1,\ldots,x_m,x+\Delta x,x+\Delta x]-f[x_0,x_1,\ldots,x_m,x,x]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{\frac{f[x_0,x_1,\ldots,x_m,x+\Delta x,x+\Delta x]-f[x_0,x_1,\ldots,x_m,x,x+\Delta x]}{\Delta x}$$

$$+\frac{f[x_0,x_1,\ldots,x_m,x,x+\Delta x]-f[x_0,x_1,\ldots,x_m,x,x]}{\Delta x}\}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{f[x_0,x_1,\ldots,x_m,x,x+\Delta x,x+\Delta x]+f[x_0,x_1,\ldots,x_m,x,x,x+\Delta x]\}$$

$$=2f[x_0,x_1,\ldots,x_m,x,x,x]\}$$

依此类推,可得结论

4.5 数值微分

因此, 当m=1时 ,得到使用2点构造的数值导数公式 由*Newton*插值公式

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x](x-x_0)(x-x_1)$$

得到

$$f'(x)=f[x_0,x_1]+f'[x_0,x_1,x](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x](2x-x_0-x_1)$$

$$=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x,x](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x](2x-x_0-x_1)$$

将$x=x_0$代入

$$f'(x_0)=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x,x](x_0-x_0)(x_0-x_1)+f[x_0,x_1,x](2x_0-x_0-x_1)$$

$$=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x](2x_0-x_0-x_1)$$

$$=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}+\frac{1}{2}f''(\xi)(x_0-x_1)$$

将$x=x_1$代入得

$$f'(x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}+\frac{1}{2}f''(\xi)(x_1-x_0)$$

4.5 数值微分

当m=2时,得到使用3点构造的数值导数公式 由*Newton*插值公式

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+f[x_0,x_1,x_2,x]\omega(x)$$

其中$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$$f'(x)=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x_2](2x-x_0-x_1)$$
$$+f[x_0,x_1,x_2,x,x]\omega(x)+f[x_0,x_1,x_2,x]\omega'(x)$$

设$x_1-x_0=x_2-x_1=h$,有

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)}{2h^2}$$

4.5 数值微分

将$x = x_0$代入

$$f'(x_0) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](2x_0 - x_0 - x_1)$$

$$+ f[x_0, x_1, x_2, x, x]\omega(x_0) + f[x_0, x_1, x_2, x]\omega'(x_0)$$

$$= \frac{1}{h}(f(x_1) - f(x_0)) - \frac{1}{2h^2}\left(f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)\right)h$$

$$+ f[x_0, x_1, x_2, x](2h^2)$$

$$= \frac{1}{2h}\left[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)\right] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

4.5 数值微分

将$x=x_1$代入

$$f'(x_1)=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x_2](2x_1-x_0-x_1)$$

$$+f[x_0,x_1,x_2,x,x]\omega(x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x]\omega'(x_1)$$

$$=\frac{1}{h}(f(x_1)-f(x_0))+\frac{1}{2h^2}\left(f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)\right)h$$

$$+f[x_0,x_1,x_2,x](-h^2)$$

$$=\frac{1}{2h}\left[-f(x_0)+f(x_2)\right]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

将$x=x_2$代入

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}\left[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)\right]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

4.5 数值微分

$$f''(x)=2f[x_0,x_1,x_2]+f[x_0,x_1,x_2,x,x,x]\omega(x)$$
$$+2f[x_0,x_1,x_2,x,x]\omega'(x)+f[x_0,x_1,x_2,x]\omega''(x)$$

将$x=x_0,x_1,x_2$分别代入有

$$\begin{cases} f''(x_0)=\dfrac{1}{h^2}\left[f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)\right]-hf'''(\xi_1)+\dfrac{h^2}{6}f^{(4)}(\xi_2) \\ f''(x_1)=\dfrac{1}{h^2}\left[f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)\right]-\dfrac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi) \\ f''(x_2)=\dfrac{1}{h^2}\left[f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)\right]+hf'''(\xi_1)+\dfrac{h^2}{6}f^{(4)}(\xi_2) \end{cases}$$

忽略误差项, 有

$$f''(x_i)\approx\frac{1}{h^2}\left[f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)\right],i=0,1,2$$

4.5 数值微分

对中点x_1,有

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \qquad E(f) = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \qquad E(f) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

4.5 数值微分

误差估计

由于在计算$f(x)$时，只能得到近似值 $\bar{f}(x_i)=f(x_i)+\varepsilon_i$，

ε_i是计算$f(x_i)$的舍入误差或测量误差

因此，在导数公式中，如(4-60)

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}$$

$$=\frac{\bar{f}(x_{i+1})+\varepsilon_{i+1}-(\bar{f}(x_i)+\varepsilon_i)}{h}=\frac{\bar{f}(x_{i+1})-\bar{f}(x_i)}{h}+\frac{\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i}{h}$$

由(4-62) 式可知，$\dfrac{\bar{f}(x_{i+1})-\bar{f}(x_i)}{h}-\bar{f}'(x_i)=\dfrac{1}{2}f''(\xi)h+\dfrac{\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i}{h}$

令$M_2=\max\left|f''(x)\right|,\varepsilon=\max\left|\varepsilon_i\right|$，有

$$\left|\frac{\bar{f}(x_{i+1})-\bar{f}(x_i)}{h}-f'(x_i)\right|\le\frac{M_2}{2}h+\frac{2\varepsilon}{h}$$

误差包括：公式误差和舍入误差

小结

- 数值微积分
  - 数值积分
    - 牛顿-Cotes方法
      - 基本数值积分方法
        - 梯形求积公式
        - Simpson求积公式
        - Cotes求积公式
      - 复化求积方法
        - 复化梯形公式
        - 复化Simpson公式
        - 复化Cotes公式
    - Romberg方法
    - 待定系数法
    - Gauss方法
  - 数值微分
    - 两点微分公式
    - 三点微分公式
    - 待定系数法

例.设$\{\varphi_k(x)\}$是定义在区间$[a,b]$上的关于权函数$\rho(x)$的正交多项式族,

并且$x_i(i=0,1,2,\ldots,n)$是$\varphi_{n+1}(x)$的零点,

$l_i(x)$是以$\{x_i\}$为插值点的$Lagrange$插值基函数.

$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$是高斯型求积公式.

证明:

(1) 当$0 \le k, j \le n, k \ne j$时, $\sum_{i=0}^{n} A_i \varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i) = 0$

(2) $\int_a^b \rho(x) l_k(x) l_j(x) dx = 0, k \ne j$

(3) $\sum_{k=0}^{n} \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx = \int_a^b \rho(x) dx$

设$f(x)=2009x^5+2007x^3+2006x+2005$,则以$-2,-1,0,1,2$为插值节点的不超过4次的插值多项式$L_4(x)=$ _____