

1

## 第六节 稳态误差分析

自动控制原理B  
面向专业：微电子系  
授课教师：刘剑毅

17 October 2013

2

控制系统的稳态误差是一项重要的技术指标。  
对于一个实际的控制系统，其稳态输出不可能在任何情况下都与输入量一致或相当，也不可能在任何形式的扰动作用下都能准确地恢复到原平衡位置。  
控制系统的稳态误差是不可避免的，系统设计的任务之一就是尽量减少系统的稳态误差。  
显然，只有当系统稳定时，研究稳态误差才有意义。

17 October 2013

3

### 一、误差及稳态误差的定义

**系统误差：**系统的输入  $r(t)$  和主反馈信号  $b(t)$  之差。即  $e(t) = r(t) - b(t)$

**系统稳态误差：**当  $t \rightarrow \infty$  时的系统误差，用  $e_{ss}$  表示。即  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$

17 October 2013

4

### 二. 计算方法

#### 2.1 最基本的负反馈系统

$$\begin{cases} Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} R(s) \\ E(s) = R(s) - Y(s)H(s) \end{cases} \Rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

其中  $G(s)H(s) = G_k(s)$  称为开环传函

利用拉式终值定理：

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$

17 October 2013

5

#### 2.2 具有扰动作用的系统

① 参考输入信号的作用

$$let \quad N(s) = 0$$

$$\Phi_R(s) = \frac{E_1(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

该误差也称为系统的给定稳态误差。

17 October 2013

6

② 扰动信号的作用

$$let \quad R(s) = 0$$

$$\begin{cases} E_2(s) = -Y(s)H(s) \\ \frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \end{cases}$$

$$\therefore \Phi_N(s) = \frac{E_2(s)}{N(s)} = -\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

③ 参考输入和扰动同时作用下的偏差表达式

$$E(s) = \Phi_R(s)R(s) + \Phi_N(s)N(s)$$

$$= \frac{R(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} + \frac{-G_2(s)H(s)N(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

17 October 2013

④ 最后，利用拉氏变换的终值定理计算稳态误差

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-sG_2(s)H(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

只有稳定的系统，才可计算稳态误差。

17 October 2013

7

## Summary

稳态误差计算步骤：

**Step1:** 推导出输出（误差信号）和输入（系统输入或扰动）之间的传函；

**Step2:** 在公式“输出信号（误差）= 传函 × 输入信号”中代入输入信号；

**Step3:** 利用拉式终值定理求得误差时域趋于无穷时的值，即为系统稳态误差。

17 October 2013

8

例1 系统结构图如图所示，当输入信号为单位斜坡函数时，求系统在输入信号作用下的稳态误差；调整K值能使稳态误差小于0.1吗？

解：只有稳定的系统计算稳态误差才有意义；所以先判稳

系统特征方程为  $2s^3 + 3s^2 + (1 + 0.5K)s + K = 0$

由劳斯判据知稳定的条件为： $0 < K < 6$

$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_k(s)} = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)}$$

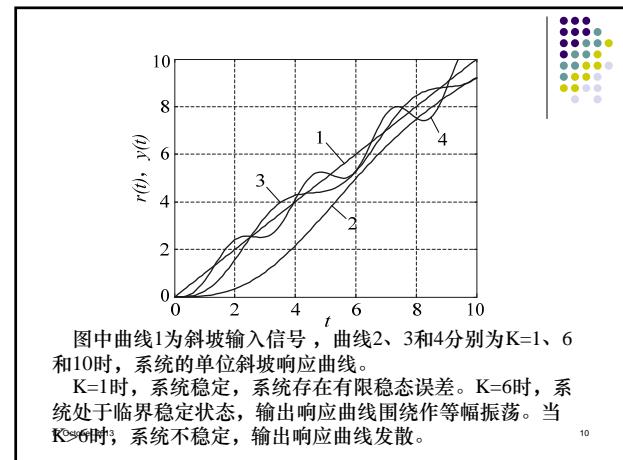
$$R(s) = \frac{1}{s^2} \quad E(s) = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K}$$

由稳定的条件知： $e_{ss} > \frac{1}{6}$  不能满足  $e_{ss} < 0.1$  的要求

17 October 2013

9



[例2]速度控制系统的结构图如下图所示。给定输入和扰动作用均为单位斜坡函数。求系统的稳态误差。

解：1、先令  $n(t) = 0, r(t) = t$ , 即  $R(s) = \frac{1}{s^2}$ ,

$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2}, E(s) = \Phi_E(s) \cdot R(s) = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ts + 1}{Ts^2 + s + k_1 k_2} = \frac{1}{k_1 k_2}$$

17 October 2013

11

2、再令  $R(s) = 0, N(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\therefore E(s) = -C(s)$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k_1 k_2}{s(T_n s + 1)}} = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2}$$

$$C(s) = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2} N(s) = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2} \cdot \frac{k_n}{T_n s + 1} \cdot N(s)$$

$$e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot C(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2} \cdot \frac{k_n}{T_n s + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = -\frac{k_n}{k_1 k_2}$$

3、总的稳态误差为：  $e_{ss} = \frac{1}{k_1 k_2} - \frac{k_n}{k_1 k_2} = \frac{1 - k_n}{k_1 k_2}$

17 October 2013

12

### 三、一般控制系统的稳态误差分析

假设开环传递函数  $G_k(s)$  的形式如下：

$$G_k(s) = \frac{K}{s^\nu} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{l=1}^{n_2} (T_l s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$$

式中：  $K$  – 开环放大系数；  $\nu$  – 积分环节的个数；

$$m_1 + 2m_2 = m, \quad \nu + n_1 + 2n_2 = n$$

系统的给定稳态误差为：

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)}$$

17 October 2013



13

### 系统的无差度阶数

通常称开环传递函数中积分环节的个数为系统的无差度阶数，并将系统按无差度阶数进行分类。

当  $\nu = 0$ ，无积分环节，称为0型系统

当  $\nu = 1$ ，有一个积分环节，称为I型系统

当  $\nu = 2$ ，有两个积分环节，称为II型系统

.....

当  $\nu > 2$  时，使系统稳定是相当困难的。因此除复杂超大型系统（如航天控制系统）外，III型及IV型以上的系统几乎不用。



14

□ 当输入为  $R(s) = \frac{1}{s}$  时（单位阶跃函数），该稳态误差也称位置误差。

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_k(s)} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

式中： $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s)$  称为位置误差系数；

$$\text{当 } \nu = 0 \text{ 时, } K_p = K, \quad \therefore e_{ssr} = \frac{1}{1 + K}$$

$$\text{当 } \nu \geq 1 \text{ 时, } K_p = \infty, \quad \therefore e_{ssr} = 0$$

稳态误差为零的系统称为无差系统，为有限值的称为有差系统。

17 October 2013

15

□ 当输入为  $R(s) = \frac{1}{s^2}$  时（单位斜坡函数），该稳态误差也称速度误差。

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_k(s)} \times \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_k(s)} = \frac{1}{K_v}$$

式中： $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_k(s)$  称为速度误差系数；

当  $\nu = 0$  时，  $K_v = 0$ ，  $\therefore e_{ssr} = \infty$

当  $\nu = 1$  时，  $K_v = K$ ，  $\therefore e_{ssr} = \frac{1}{K}$

当  $\nu \geq 2$  时，  $K_v = \infty$ ，  $\therefore e_{ssr} = 0$



16

□ 当输入为  $R(s) = \frac{1}{s^3}$  时（单位抛物线函数），该稳态误差也称加速度误差。

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s \cdot G_k(s)} = \frac{1}{K_a}$$

式中： $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s)$  称为加速度误差系数；

$$\text{当 } \nu = 0, 1 \text{ 时, } K_a = 0, \quad \therefore e_{ssr} = \infty$$

$$\text{当 } \nu = 2 \text{ 时, } K_a = K, \quad \therefore e_{ssr} = \frac{1}{K}$$

$$\text{当 } \nu \geq 3 \text{ 时, } K_a = \infty, \quad \therefore e_{ssr} = 0$$

17 October 2013

17

当系统的输入信号由位置、速度和加速度分量组成时，即当  $r(t) = A + Bt + \frac{Ct^2}{2}$  时，有  $e_{ssr} = \frac{A}{1 + K_p} + \frac{B}{K_v} + \frac{C}{K_a}$

小结：

- ① 给定作用下的稳态误差与外作用有关。对同一系统加入不同的输入，稳态误差不同。
- ② 与时间常数形式的开环增益有关；对有差系统， $K \uparrow$ ，稳态误差 $\downarrow$ ，但同时系统的稳定性和瞬态特性变差。
- ③ 与积分环节的个数有关。积分环节的个数 $\uparrow$ ，稳态误差 $\downarrow$ ，但同时系统的稳定性和瞬态特性变差。

所以稳态误差的要求与系统的稳定性和瞬态性的要求是矛盾的，实际中应折衷选择系统参数。



18

**典型输入作用下的稳态误差**

系统型别	静态误差系数	阶跃输入 $r(t) = A \cdot 1(t)$	斜坡输入 $r(t) = Bt$	抛物线输入 $r(t) = \frac{1}{2}Ct^2$
$K_p$	$K_p$	$K_p$	$\frac{A}{1+K_p}$	$\frac{B}{K_p}$
$K_v$	$K_v$	0	$\infty$	$\infty$
$K_a$	$K_a$	$\frac{A}{1+K_p}$	0	$\frac{C}{K_a}$
I	$\infty$	$K$	0	$\frac{B}{K}$
II	$\infty$	$\infty$	$K$	0

17 October 2013 19

**例3：计算典型一阶系统的稳态误差**

$$G_k(s) = \frac{K}{s}$$

$$\nu = 1, K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \text{ 阶跃输入时 } e_{ssr1} = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_k(s) = K, \text{ 斜坡输入时 } e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = 0, \text{ 抛物线输入时 } e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

此类题可直接代公式，也可以根据一般步骤自己推导计算。

17 October 2013 20

**例4：计算典型二阶系统的稳态误差**

$$G_k(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

$$\nu = 1, K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \text{ 阶跃输入时 } e_{ssr1} = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_k(s) = \frac{\omega_n}{2\zeta}, \text{ 斜坡输入时 } e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = 0, \text{ 抛物线输入时 } e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

17 October 2013 21

**例5：分别讨论典型二阶系统中，速度反馈控制和比例微分控制对稳态误差的影响。**

a. **速度反馈控制的稳态误差**

$$G_k(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n + \tau\omega_n)}$$

$$\nu = 1, K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \text{ 阶跃输入时 } e_{ssr1} = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_k(s) = \frac{\omega_n}{2\zeta\omega_n + \tau\omega_n}, \text{ 斜坡输入时 } e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = \tau + \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = 0, \text{ 抛物线输入时 } e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

17 October 2013 22

b. **比例+微分控制的稳态误差**

$$G_k(s) = \frac{\omega_n^2(1 + \tau s)}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

$$\nu = 1, K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \text{ 阶跃输入时 } e_{ssr1} = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_k(s) = \frac{\omega_n}{2\zeta}, \text{ 斜坡输入时 } e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = 0, \text{ 抛物线输入时 } e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

结论：PD不改变原系统稳态误差，而速度反馈控制的速度误差比原系统要大。

17 October 2013 23

**四、量纲转换**

稳态误差期望衡量的是输出跟踪输入的差距：

$$E_{ideal}(s) = R(s) - Y(s)$$

但系统两端的物理量往往是量纲不同的。如转速控制系统：输入电压，输出角速度。

从输入端定义的稳态误差：

$$E_{in}(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

从输出端定义的稳态误差：

$$E_{out}(s) = \frac{R(s)}{H(s)} - Y(s)$$

两者转换公式：

$$E_{out}(s) = \frac{E_{in}(s)}{H(s)}$$

本书采用的是从输入端定义的稳态误差。

17 October 2013 24

**例6:** 调速系统的方块图如图所示, 输出信号为转速  $y(t)$ , 单位为r/min, 若  $k_c=0.05V/(r/min)$ , 求当输入信号  $r(t)=1V$  时系统的稳态误差。

解: 开环传递函数为  

$$G_k(s) = \frac{2k_c}{(0.07s+1)(0.24s+1)} = \frac{0.1}{(0.07s+1)(0.24s+1)}$$

0型系统,  $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = 0.1$  系统无单位

输入信号为  $r(t)=1V$  信号有单位

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

17 October 2013 25

稳态误差为  $e_{ssr} = \frac{1V}{1+k_p} = \frac{1V}{1+0.1} \approx 0.9091V$

将其转换为输出端定义的稳态误差:  

$$e_{ss} = \frac{0.9091V}{H} = \frac{0.9091V}{0.005V/(r/min)} \approx 181.8r/min$$

这里,  $H=0.1k_c=0.005 V/(r/min)$

17 October 2013 26

**[减小稳态误差的措施]:**

**一. 复合控制系统:** 在控制系统中引入与给定作用和扰动作用有关的附加控制可构成复合控制系统, 可进一步减小给定误差和扰动误差。

**1.按给定作用补偿:**

图(a) 图(b)

在图(a)的基础上加上环节  $G_3(s)$ , 就构成了顺馈控制系统。

图(a)的误差:  $E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot R(s)$

17 October 2013 27

再来计算图(b)的误差函数  $E'(s)$ 。

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + [G_1(s) + G_3(s)G_2(s)]G_1(s)} = \frac{1 - G_2G_3(s)}{1 - G_2G_3(s)G_1(s)}$$

$$\therefore E'(s) = \frac{1 - G_2G_3(s)}{1 + G_1G_2} \cdot R(s)$$

若满足  $G_3 = \frac{1}{G_2}$ , 则  $E'(s) = 0$ ,

即由给定引起的稳态误差为零, 输出完全复现给定输入。该式称为按给定作用的完全不变性条件。

17 October 2013 28

**2.按扰动作用补偿**

令  $R(s)=0$ , 由于是单位反馈系统, 所以误差  $E(s)=-C(s)$ 。

未加前馈时,  $\Phi_N(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2}{1+G_1G_2}$   $E(s) = -C(s) = -\frac{G_2}{1+G_1G_2} \cdot N(s)$

$$C'(s) = \frac{[1 - G_1(s)G_3(s)]G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot N(s)$$

$$E'(s) = -C'(s) = -\frac{[1 - G_1(s)G_3(s)]G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot N(s)$$

17 October 2013 29

$$E'(s) = -C'(s) = -\frac{[1 - G_1(s)G_3(s)]G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot N(s)$$

若  $G_3(s) = \frac{1}{G_1(s)}$ , 则  $E'(s) = 0$ , 这个条件就是对扰动作用的完全不变性条件。即系统的输出完全不受扰动的影响。

从结构图可看出, 实际上是利用双通道原理使扰动信号经两条通道到达相加点时正好大小相等, 方向相反。从而实现了干扰的全补偿。

17 October 2013 30

[例]如图所示的复合系统。  $G_1(s) = \frac{K_1}{T_1 s + 1}$ ,  $G_2(s) = \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}$

顺馈补偿环节  $G_3(s) = \tau_d s$ 。试求位置误差和速度误差。并讨论位置误差、速度误差与  $\tau_d$  的关系。

[解]: 无补偿时误差为:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1 G_2} R(s)$$

有补偿时误差为:

$$E(s) = \frac{1 - G_2 G_3}{1 + G_1 G_2} R(s)$$

□ 位置误差:  $r(t) = A \cdot l(t)$ ,  $R(s) = \frac{A}{s}$

无补偿时,  $e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}} \cdot \frac{A}{s} = 0$

有补偿时,  $e'_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1 - \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)} \tau_d s}{1 + \frac{K_1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}} \cdot \frac{A}{s} = 0$

17 October 2013 31

□ 速度误差:  $r(t) = Bt$ ,  $R(s) = \frac{B}{s^2}$

无补偿时,  $e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}} \cdot \frac{B}{s^2} = \frac{B}{K_1 K_2}$

有补偿时,  $e'_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1 - \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)} \tau_d s}{1 + \frac{K_1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}} \cdot \frac{B}{s^2} = \frac{(1 - K_2 \tau_d) B}{K_1 K_2}$

分析:

- 当  $\tau_d = 0$  时, 没有顺馈补偿, 速度误差等于  $e_{ssr} = \frac{B}{K_1 K_2}$ 。
- 当  $0 < \tau_d < \frac{1}{K_2}$  时, 还有速度误差, 但比补偿前要小。
- 当  $\tau_d = \frac{1}{K_2}$  时, 速度误差为零, 实现了完全补偿。
- 当  $\tau_d > \frac{1}{K_2}$  时, 速度误差为负, 过度补偿。表示输出量大于要求值。

17 October 2013 32

[减小稳态误差的措施]:

## 二、比例积分 (PI) 控制器

——从下图一般系统的扰动误差分析谈起

$R(s) = 0, N(s) \neq 0$  时产生的  $-C(s)H(s)$  为该系统的扰动误差。

一般系统框图:

传递函数:

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H}$$

$$C(s) = \frac{G_2 N(s)}{1 + G_1 G_2 H}$$

扰动误差:

$$E(s) = -C(s)H(s) = -\frac{G_2 H}{1 + G_1 G_2 H} N(s)$$

$$\therefore e_{ssn} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2 H}{1 + G_1 G_2 H} N(s)$$

17 October 2013 33

$\therefore e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2 H}{1 + G_1 G_2 H} N(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s N(s)}{G_1} \cdot \frac{G_1 G_2 H}{1 + G_1 G_2 H}$

$$= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s N(s)}{G_1} \cdot \frac{G_k}{1 + G_k}$$

式中:

$$G_k(s) = \frac{K}{s^\nu} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_i} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_k} (\tau_k s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_j} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_l} (T_l s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)} = \frac{K}{s^\nu} \cdot G_0(s)$$

式中:  $G_0(0) = 1$ ,

17 October 2013 34

$\therefore e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s N(s)}{G_1} \cdot \frac{K}{1 + \frac{K}{s^\nu} G_0} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s N(s)}{G_1} \cdot \frac{K}{s^\nu + K}$

1. 当  $\nu = 0$ , 即开环传递函数中无积分环节。

$$e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s N(s)}{G_1} \cdot \frac{K}{1 + K}$$

即稳态误差取决于  $G_1$ , 设  $G_1(s) = K_1 G_{10}(s)$ ,  $G_{10}(0) = 1$

$$G_{10}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m_{10}} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_{20}} (\tau_k s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_{10}} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_{20}} (T_l s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$$

$$e_{ssn} = -\frac{K}{K_1(1 + K)}$$

可见其在阶跃扰动输入时是有差系统。

17 October 2013 35

2. 当  $\nu > 0$ , 即开环传递函数中有积分环节。

$$e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s N(s)}{G_1} \cdot \frac{K}{s^\nu + K} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s N(s)}{G_1} \cdot \frac{K}{K} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s N(s)}{G_1}$$

可见稳态误差还是取决于  $G_1(s)$

再设  $G_1(s) = \frac{K_1}{s^\mu} G_{10}(s)$ ,  $G_{10}(0) = 1$

$$e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\mu+1} N(s)}{K_1}$$

① 当  $\mu = 0$  即  $G_1(s)$  无积分环节, 在阶跃扰动作用下  $e_{ssn} = -\frac{1}{K_1}$   
即此时系统在阶跃扰动作用下还是有差的。

② 设  $\mu > 0$  即  $G_1(s)$  有积分环节, 在阶跃扰动作用下  $e_{ssn} = 0$

因此  $G_1(s)$  中有无积分环节决定了扰动作用下的有差或无差。

17 October 2013 36

[例]: 系统结构图如图所示。当  $r(t) = n(t) = 1(t)$  时, 求系统的稳态误差  $e_{ss}$ ; 若要求稳态误差为零, 如何改变系统结构。

解: 该系统对给定输入而言属于 I 型系统。所以当给定输入为单位阶跃函数时, 查表可知给定稳态误差  $e_{ssr} = 0$

该系统对于扰动输入为单位阶跃函数时的稳态误差则为:

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{NE} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_2}{s + K_1 K_2} = -\frac{1}{K_1}$$

即阶跃扰动误差并不等于零。

总误差为:  $e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = -\frac{1}{K_1}$

17 October 2013 37

若想使稳态误差为零, 由前面分析可知需要  $G_1$  中有积分环节存在, 令:

$$G_1 = \frac{K_1}{s}$$

此时  $e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-K_2/s}{1 + K_1 K_2/s^2} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_2 s}{s^2 + K_1 K_2} = 0$  对不对?

实际上, 由于校正后的特征方程  $s^2 + K_1 K_2 = 0$

中存在系数缺项, 即存在非正数的系数, 可知此时系统的稳定性已遭破坏, 再谈稳态误差已毫无意义。

17 October 2013 38

若要使系统稳定, 可以在原  $G_1$  中再引入比例+微分环节

$$G_1 = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s}$$

$\Phi = \frac{K_1 K_2 (\tau s + 1)}{s^2 + K_1 K_2 \tau s + K_1 K_2}$  当  $K_1 > 0, K_2 > 0, \tau > 0$  时系统稳定; 而由前述分析知系统对阶跃扰动也是无差的。

即  $G_1 = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s}$  保证了在稳定前提下的阶跃扰动误差为零。

17 October 2013 39

$G_1 = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s} = K_1 \left( \tau + \frac{1}{s} \right) = K_1 \tau + \frac{K_1}{s}$

这个环节称为比例+积分控制器(PI控制器)。

实际上, 工业上经常采用将 PI 控制器串接在系统前向通道上的做法来减少稳态误差。

$G_1 = \frac{K_1(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s} = \frac{K_1 + K_2 s + K_3 s^2}{s} = \frac{K_1}{s} + K_2 + K_3 s$

这个环节称为比例+积分+微分控制器 (PID控制器)。

它们都具有在保证闭环系统稳定、及动态特性的前提下, 提高系统的控制精度的作用。

17 October 2013 40