



## 第二节 传递函数模型

自动控制原理B  
面向专业：微电子系  
授课教师：刘剑毅

9/12/2013 9:50:44 AM 1



传递函数是经典控制理论中最重要的数学模型之一。利用传递函数，在系统的分析和综合中可解决如下问题：

- 不必求解微分方程就可以研究初始条件为零的系统在输入信号作用下的动态过程。
- 可以研究系统参数变化或结构变化对系统动态过程的影响，因而使分析系统的问题大为简化。
- 可以把对系统性能的要求转化为对系统传递函数的要求，使设计问题易于实现。

9/12/2013 9:50:44 AM 2



## 数学基础：拉式变换

● 20世纪中叶，傅里叶变换和拉普拉斯变换分别催生了通信和控制两个新兴学科的诞生。  
● 常用的拉式变换列表（零初始条件）：

$f(t)$	$\delta(t)$	$1(t)$	$t$	$e^{-at}$	$te^{-at}$	$\sin wt$	$\cos wt$	$\frac{df(t)}{dt}$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$
$F(s)$	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$sF(s)$	$s^n F(s)$

拉式变换满足线性性质： $L[a f_1(t) + b f_2(t)] = a F_1(s) + b F_2(s)$   
积分性质： $\int_0^t f(t) dt = \frac{1}{s} F(s)$  时延性质： $L[f(t-\tau)] = e^{-\tau s} F(s)$

9/12/2013 9:50:44 AM 3



### 一、传递函数的基本概念

**传递函数的定义：**线性定常系统在零初始条件下输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

设系统或元件的微分方程为：  

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 x'(t) + b_0 x(t)$$
式中： $x(t)$  — 输入，  $y(t)$  — 输出  
 $a_i, b_j (i=0 \sim n, j=0 \sim m)$  为常系数

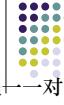
令初始值为零，将上式求拉氏变换，得  

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$
称为系统的传递函数

当传递函数和输入已知时， $Y(s) = G(s) X(s)$ 。通过拉氏反变换可求出时域表达式  $y(t)$ 。

4



### [关于传递函数的几点说明]

- 传递函数仅适用于线性定常系统，与线性常微分方程一一对应。
- 传递函数不能反映系统或元件的学科属性和物理性质。学科截然不同的系统可能具有完全相同的传递函数。
- 传递函数仅与系统有关，与输入无关。只反映了输入和输出之间的关系，不反映中间变量的关系。
- 传递函数的概念主要适用于SISO系统。对于MIMO求传递函数时，留下一个有关输入，其它的输入量令为零。
- 传递函数忽略了初始条件的影响。
- 传递函数是s的有理分式，对实际系统而言分母的阶次n大于分子的阶次m，此时称为n阶系统。

9/12/2013 9:50:44 AM 5



[例1]求电枢控制式直流电动机的传递函数。

[解]已知电枢控制式直流电动机的微分方程为：  

$$T_a T_m \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_u U_a - K_m (T_a \frac{dm_c}{dt} + m_c)$$
方程两边求拉氏变换为：  

$$(T_a T_m s^2 + T_m s + 1) \Omega(s) = K_u U_a(s) - K_m (T_a s + 1) M_c(s)$$
■ 令  $M_c(s) = 0$ ，得转速对电枢电压的传递函数：  

$$G_u(s) = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_u}{T_a T_m s^2 + T_m s + 1}$$
■ 令  $U_a(s) = 0$ ，得转速对负载力矩的传递函数：  

$$G_m(s) = \frac{\Omega(s)}{M_c(s)} = \frac{-K_m (T_a s + 1)}{T_a T_m s^2 + T_m s + 1}$$
最后利用叠加原理得转速表示为：  

$$\Omega(s) = G_u(s) U_a(s) + G_m(s) M_c(s) = [G_u(s) \quad G_m(s)] \begin{bmatrix} U_a(s) \\ M_c(s) \end{bmatrix}$$

6

[例2] 求如图所示RC网络的传函  $\frac{U_o(s)}{U_i(s)}$

[解]: 根据基尔霍夫定律列出回路方程

$$\begin{cases} \frac{1}{C} \int i_1 dt + R_1 i_1 - R_1 i_2 = 0 \\ R_1 i_2 - R_1 i_1 + R_2 i_2 = u_i \\ R_2 i_2 = u_o \end{cases}$$

拉氏变换  $\begin{cases} \left( \frac{1}{Cs} + R_1 \right) I_1(s) - R_1 I_2(s) = 0 \\ -R_1 I_1(s) + (R_1 + R_2) I_2(s) = U_i(s) \\ R_2 I_2(s) = U_o(s) \end{cases}$

消去中间变量  $I_1(s), I_2(s)$ , 得系统传递函数模型:

$$\frac{U_o}{U_i} = \frac{R_2(R_1 Cs + 1)}{R_2 R_1 Cs + R_1 + R_2}$$

9/12/2013 9:50:44 AM

**例3: 倒立摆系统**

上一节已求出该系统的微分方程模型:

$$\begin{cases} (M+m) \frac{d^2x}{dt^2} + ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = u \\ (J+ml^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + ml \frac{d^2x}{dt^2} = mg l \theta \end{cases}$$

在零初始条件假设下, 对上述方程两边求拉式变换:

$$\begin{cases} (M+m)s^2 X(s) + ml s^2 \theta(s) = U(s) \\ (J+ml^2)s^2 \theta(s) + ml s^2 X(s) = mg l \theta(s) \end{cases}$$

消去中间变量  $X(s)$ , 得到倒立摆系统的传递函数模型:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{-m\ell}{\left[ (I+ml^2) - \frac{m^2\ell^2}{M+m} \right] s^2 - mg\ell}$$

How about  $\frac{X(s)}{U(s)}$ ?

9/12/2013 9:50:44 AM

**【传递函数的几种表达形式】:**

1. 有理分式形式:  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$

式中:  $a_i, b_j$  为实常数, 一般  $n \geq m$

上式称为  $n$  阶传递函数, 相应的系统为  $n$  阶系统。

2. 零点、极点形式:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m}{a_n} \times \frac{s^m + b'_{m-1}s^{m-1} + \dots + b'_1s + b'_0}{s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \dots + a'_1s + a'_0} = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

式中:  $s = -z_i$  称为传递函数的零点,  $s = -p_j$  称为传递函数的极点。

$K_g = \frac{b_m}{a_n}$  —— 传递系数 (零极点形式传递函数增益)

9/12/2013 9:50:44 AM

3. 时间常数形式:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0}{a_0} \times \frac{b'_m s^m + b'_{m-1} s^{m-1} + \dots + b'_1 s + b'_0 + 1}{a'_n s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + \dots + a'_1 s + a'_0 + 1} = K \frac{\prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1)}$$

式中:  $K = \frac{b_0}{a_0} = K_g \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j}$ ,  $\tau_i = \frac{1}{z_i}$ ,  $T_j = \frac{1}{p_j}$ ,

其中  $\tau_i$ ,  $T_j$  分别称为时间常数,  $K$  称为放大系数。

9/12/2013 9:50:44 AM

对于共轭复数的零点和极点常用二阶项表示。例  $-p_1, -p_2$  为共轭复极点,  $T_1, T_2$  也为共轭复数。相应的二阶项表示为:

$$\frac{1}{(s + p_1)(s + p_2)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

或  $\frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$

其中系数  $\omega_n, \zeta$  可由  $p_1, p_2$  或  $T_1, T_2$  求得;

同理, 共轭复零点可表示如下

$$(s + z_1)(s + z_2) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

或  $(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1$

9/12/2013 9:50:44 AM

若再考虑有  $v$  个零值极点, 则传递函数的通式可以写成:

$$G(s) = \frac{K}{s^v} \times \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (s + z_i) \prod_{k=1}^{m_2} (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)}{\prod_{j=1}^{n_1} (s + p_j) \prod_{l=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_l \omega_l + \omega_l^2)}$$

或:  $G(s) = \frac{K}{s^v} \times \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l + 1)}$

式中:  $m_1 + 2m_2 = m$ ,  $v + n_1 + 2n_2 = n$

可以看出: 传递函数是一些**基本因子**的乘积。这些基本因子称为**典型环节**, 是构成传函最简单、最基本的元素。

9/12/2013 9:50:44 AM

## 二、典型环节及其传递函数

典型环节有比例、积分、惯性、振荡、微分和延迟环节等多种，以下分别讨论：

(一) 比例环节：

时域方程： $y(t) = Kx(t), t \geq 0$

传递函数： $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K$

**比例环节又称为放大环节。**  $K$ 为放大系数。实例：放大器，无间隙无变形齿轮传动（即齿比环节）等。

9/12/2013 9:50:44 AM 13

### 例4：导弹航向控制系统

已知**磁场控制式电机**的传函为：

$$G_2(s) = \frac{\theta_0(s)}{U_g(s)} = \frac{k_m}{s(T_m s + 1)(T_f s + 1)}$$

忽略扰动量的影响，系统前向通道传函（开环传函）为：

$$G'(s) = \frac{\theta_0(s)}{\Delta\theta(s)} = \frac{k}{s(T_m s + 1)(T_f s + 1)}$$

式中将各个模块视为**比例环节**， $k_i$ 为其分别的传函系数：

9/12/2013 9:50:44 AM 14

$\therefore \Delta\theta(s) = \theta_i(s) - \theta_0(s)$

$\therefore [\theta_i(s) - \theta_0(s)] G'(s) = \theta_0(s)$

整理后得：

$$\theta_0(s) = \frac{G'(s)}{1 + G'(s)} \theta_i(s)$$

开、闭环传函转换公式

得出导弹航向控制系统的传递函数：

$$G(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_i(s)} = \frac{G'(s)}{1 + G'(s)} = \frac{k}{s(T_m s + 1)(T_f s + 1) + k}$$

9/12/2013 9:50:44 AM 15

### (二) 积分环节：

时域方程： $y(t) = K \int_0^t x(t) dt, t \geq 0$

传递函数： $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s} = \frac{1}{Ts}$

有一个0值极点。在图中极点用“ $\times$ ”表示，零点用“ $\circ$ ”表示。 $K$ 表示比例系数， $T$ 称为时间常数。

9/12/2013 9:50:44 AM 16

### 例5. 积分环节实例：

①

$$\therefore \frac{u_i(t)}{R} = i(t) = -C \frac{du_o(t)}{dt}$$

$$\therefore \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{1}{RCs}$$

② 电动机（忽略转动惯量、电枢电阻和电感及粘滞摩擦等）

$\theta$  为累计转角， $\theta' = \omega$  为角速度。

$$\theta' = ku_i \quad \therefore \frac{\Theta(s)}{U_i(s)} = \frac{k}{s}$$

可见， $\theta' \sim u_i$  为比例环节， $\theta \sim u_i$  为积分环节。

9/12/2013 9:50:44 AM 17

### (三) 惯性环节

时域方程： $Ty'(t) + y(t) = Kx(t) \quad t \geq 0$

传递函数： $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$

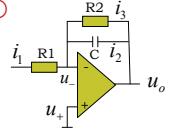
当输入为单位阶跃函数时，有  $Ty'(t) + y(t) = K$ ，解该常微分方程得： $y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$ ，式中： $K$ 为放大系数， $T$ 为时间常数。

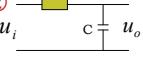
其中，当  $K=1$  时，时域响应曲线和零极点分布图如下：

其惯性表现是由于储能元件所导致。有一个非零极点  $(-1/T)$ 。

9/12/2013 9:50:44 AM 18

**例6. 惯性环节的实例:**

① 

由  $i_1 = i_2 + i_3$   
得  $-C \frac{du_0}{dt} - \frac{u_0}{R_2} = \frac{u_i}{R_1}$  微分方程模型  
取拉氏变换  $-CsU_0 - \frac{U_0}{R_2} = \frac{U_i}{R_1}$   
② 

$\therefore \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{\frac{R}{R_1}}{1 + R_2 Cs}$  传函模型  

$$\begin{cases} u_i = Ri + \frac{1}{C} \int idt \\ u_o = \frac{1}{C} \int idt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_i = RI + \frac{I}{Cs} \\ U_o = \frac{I}{Cs} \end{cases} \therefore \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

9/12/2013 9:50:44 AM 19

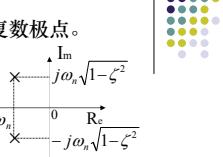
**(四) 振荡环节:**

时域方程:  $a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t)$   
传递函数:  $G(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$   
归一化, 只考虑其中的振荡环节, 得其时间常数形式:  
 $G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$   
可分为两个惯性环节相乘:  
 $G(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, T_{1,2} = \frac{T}{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}$   
上述传递函数有两种情况:  
◆当  $\zeta \geq 1$  时,  
传递函数有两个实数极点:  $-p_{1,2} = -\frac{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{T}$

9/12/2013 9:50:44 AM 20

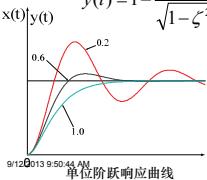
◆若  $0 < \zeta < 1$ , 传递函数有一对共轭复数极点。  
◆传函也可写成其零极点形式:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

极点分布图 

其阶跃响应, 这里直接给出结果:

$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}), t \geq 0$



[分析]:  $y(t)$  的响应过程是振幅按指数曲线衰减的正弦运动。 $\zeta$  称阻尼系数,  $\omega_n$  称无阻尼振荡圆频率。

9/12/2013 9:50:44 AM 21

[例7]: 求质量-弹簧-阻尼系统的  $\zeta$  和  $\omega_n$ 。

解:  $mx'' + fx' + kx = F, G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k}$   
表达为标准二阶零极点形式, 将产生一个比例环节:  
 $G(s) = \frac{k}{m} \times \frac{m}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}}, \omega_n^2 = \frac{k}{m}, 2\zeta\omega_n = \frac{f}{m},$   
解得:  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \zeta = \frac{f}{2\sqrt{mk}}$

9/12/2013 9:50:44 AM 22

**(五) 微分环节:**

微分环节的时域形式有三种形式: 相应的传递函数为:

①  $y(t) = Kx'(t)$  ①  $G(s) = Ks$   
 ②  $y(t) = K(\tau x'(t) + x(t))$  ②  $G(s) = K(\tau s + 1)$   
 ③  $y(t) = K[\tau^2 x''(t) + 2\zeta\tau x'(t) + x(t)]$  ③  $G(s) = K(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1)$

分别称为: 纯微分, 一阶微分和二阶微分环节。微分环节没有极点, 只有零点。分别是零值零点、实数零点和一对共轭复零点(一般  $0 < \zeta < 1$  时才这样写)。

在实际系统中, 由于存在惯性, 纯粹的微分环节是不存在的, 微分环节一般都与惯性环节伴生(co-exist)。

9/12/2013 9:50:44 AM 23

[例8] 回顾例2中的RC网络

我们已获得其传函:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R_2(R_1Cs + 1)}{R_2R_1Cs + R_1 + R_2}$$

写成时间常数形式:  $G(s) = \frac{k(Ts + 1)}{kTs + 1}$   
式中:  $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, T = R_1C$

包含一个比例环节、惯性环节、和一阶微分环节。

9/12/2013 9:50:44 AM 24

### 例9：PID控制器

#### 运放1建模：

根据理想运放模型及基尔霍夫法则，

$$\begin{cases} C_1 \frac{d(u_i - u_x)}{dt} + \frac{u_i - u_x}{R_1} = i & \text{电流方程} \\ R_2 i + \frac{1}{C_2} \int i dt = u_x - u & \text{电压方程} \\ u_x = 0 & \end{cases}$$

~~消去中间变量  $i$~~   
~~微分方程模型~~

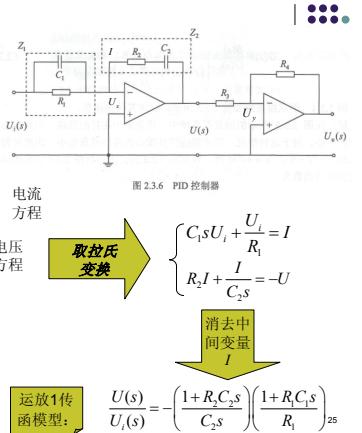


图 2.3.6 PID 控制器

运放1传  
函模型：

$$\frac{U(s)}{U_i(s)} = -\left( \frac{1+R_2C_2s}{C_2s} \right) \left( \frac{1+R_1C_1s}{R_1} \right)^{-1}$$

$$\frac{U(s)}{U_i(s)} = -\left( \frac{1+R_2C_2s}{C_2s} \right) \left( \frac{1+R_1C_1s}{R_1} \right)^{-1}$$

运放1传  
函模型：

$$\frac{U(s)}{U_i(s)} = -\left( \frac{1+R_2C_2s}{C_2s} \right) \left( \frac{1+R_1C_1s}{R_1} \right)^{-1}$$

9/12/2013 9:50

AM

#### 运放2建模：

同理，

$$\text{可得电流方程: } \frac{u - u_y}{R_3} = \frac{u_y - u_o}{R_4} \quad \frac{U}{R_3} = -\frac{U_o}{R_4}$$

运放2传  
函模型:

$$\frac{U_o(s)}{U(s)} = -\frac{R_4}{R_3} \quad \text{故称为反相放大器}$$

PID控制器整体传递函数：

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{U_0(s)}{U(s)} \cdot \frac{U(s)}{U_i(s)} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \frac{(1+R_2 C_2 s)(1+R_1 C_1 s)}{R_2 C_2 s} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

为什么可以  
直接相乘？

$$K_p = \frac{R_2(R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_1 R_2 R_3} \quad K_i = \frac{R_4}{R_3 R_1 R_2} \quad K_d = \frac{R_4 R_1 C_1 R_2 C_2}{R_3 R_1 R_2}$$

分别称为比例增益，积分增益，微分增益，故称为PID控制器。

26

(六) 延迟环节：又称时滞/时延环节。它的输出是经过一个延迟时间后，完全复现输入信号。

$$y(t) = x(t - \tau)$$

其传递函数为:  $G(s) = e^{-\tau s}$

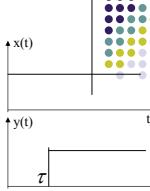
延迟环节是一个非线性函数，所以有延迟的系统是较难分析和控制的。为便于分析，使用泰勒级数线性化如下:

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{e^{\tau s}} = \frac{1}{1 + \tau s + \dots} \approx \frac{1}{1 + \tau s} \quad \text{或 } e^{-\tau s} = 1 - \tau s$$

$$e^{-\tau s} = \frac{e^{-\tau s/2}}{e^{\tau s/2}} = \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2}$$

9/12/2013 9:50:44 AM

27



(七) 其它环节：还有一些环节如  $\frac{1}{Ts-1}$ ,  $\frac{1}{T^2 s^2 - 2T\zeta s + 1}$  等

注意与惯性及振荡环节的区别

它们的极点在s平面的右半平面，这种环节是不稳定的，称为不稳定环节。

28