不动点与不动子群

张 强

西安交通大学 数学与统计学院

2016.01.11

摘要

1. 子群的交——Hanna Neumann 猜想
2. 不动子群——Scott 猜想
3. 图及曲面的不动点与不动子群
4. 三维流形的不动点与不动子群
5. 惯性的、可压缩的与BH 性质
6. 乘积群的不动子群——惯性猜想

1 子群的交——Hanna Neumann 猜想

- 一个群G 的秩 $\mathrm{rk}(G)$是指其最少的生成元的个数. 若 $\mathrm{rk}(G) < \infty$, 则称G 是有限生成的，否则称为无限生成的.

1 子群的交——Hanna Neumann 猜想

- 一个群G 的秩 $\mathrm{rk}(G)$是指其最少的生成元的个数. 若 $\mathrm{rk}(G) < \infty$, 则称G 是有限生成的，否则称为无限生成的.
- 自由交换群$\mathbb{Z}^n$的秩为n；自由群$F_n = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n | - \rangle$ 的秩为n.

1 子群的交——Hanna Neumann 猜想

- 一个群G 的秩 $\mathrm{rk}(G)$是指其最少的生成元的个数. 若 $\mathrm{rk}(G) < \infty$, 则称G 是有限生成的，否则称为无限生成的.
- 自由交换群$\mathbb{Z}^n$的秩为n；自由群$F_n = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n | - \rangle$ 的秩为n.
- 自由交换群$\mathbb{Z}^n$ 的子群仍为自由交换群$\mathbb{Z}^m$，其秩$m \leq n$.

1 子群的交——Hanna Neumann 猜想

- 一个群G 的秩 $\mathrm{rk}(G)$是指其最少的生成元的个数. 若 $\mathrm{rk}(G) < \infty$, 则称G 是有限生成的，否则称为无限生成的.
- 自由交换群$\mathbb{Z}^n$的秩为n；自由群$F_n = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n | - \rangle$ 的秩为n.
- 自由交换群$\mathbb{Z}^n$ 的子群仍为自由交换群$\mathbb{Z}^m$，其秩$m \leq n$.
- 自由群$F_2 = \langle a, b \rangle$ 有秩为任意正整数n 的自由子群：

$$F_n = \langle a, b^{-1}ab, \ldots, b^{-(n-1)}ab^{n-1} \rangle \leq F_2.$$

1 子群的交——Hanna Neumann猜想

设G 是一个群，$\overline{\mathrm{rk}}(G) := \max\{0, \mathrm{rk}(G) - 1\}$.

1 子群的交——Hanna Neumann猜想

设G 是一个群，$\overline{\mathrm{rk}}(G) := \max\{0, \mathrm{rk}(G) - 1\}$.
1950's, Hanna Neumann 证明了：

$$\overline{\mathrm{rk}}(H \cap K) \leq 2 \cdot \overline{\mathrm{rk}}(H) \cdot \overline{\mathrm{rk}}(K).$$

1 子群的交——Hanna Neumann猜想

设G 是一个群，$\overline{\mathrm{rk}}(G) := \max\{0, \mathrm{rk}(G) - 1\}$.
1950's, Hanna Neumann 证明了：

$$\overline{\mathrm{rk}}(H \cap K) \leq 2 \cdot \overline{\mathrm{rk}}(H) \cdot \overline{\mathrm{rk}}(K).$$

猜想 (Hanna Neumann, 1950's)

设G 是一个**自由群**，H, K 是G 的子群，则

$$\overline{\mathrm{rk}}(H \cap K) \leq \overline{\mathrm{rk}}(H) \cdot \overline{\mathrm{rk}}(K).$$

1 子群的交——Hanna Neumann猜想

设G 是一个群，$\overline{\mathrm{rk}}(G) := \max\{0, \mathrm{rk}(G) - 1\}$.
1950's, Hanna Neumann 证明了：

$$\overline{\mathrm{rk}}(H \cap K) \leq 2 \cdot \overline{\mathrm{rk}}(H) \cdot \overline{\mathrm{rk}}(K).$$

猜想 (Hanna Neumann, 1950's)

设G 是一个**自由群**，H, K 是G 的子群，则

$$\overline{\mathrm{rk}}(H \cap K) \leq \overline{\mathrm{rk}}(H) \cdot \overline{\mathrm{rk}}(K).$$

定理 (Mineyev, Friedman, 2011)

自由群的*Hanna Neumann* 猜想成立.

Dicks, Jaikin给出简化证明.

2 不动子群——Scott猜想

设G 是一个群，$\mathrm{End}(G)$ 为G 的所有自同态生成的幺半群，$\mathrm{Aut}(G)$ 为G 的自同构群.

定义

- 设$\phi \in \mathrm{End}(G)$ 为群G 的一个自同态. 则ϕ 的不动子群为:

$$\mathrm{Fix}\phi := \{g \in G | \phi(g) = g\}.$$

2 不动子群——Scott猜想

设G 是一个群，$\mathrm{End}(G)$ 为G 的所有自同态生成的幺半群，$\mathrm{Aut}(G)$ 为G 的自同构群.

定义

- 设$\phi \in \mathrm{End}(G)$ 为群G 的一个自同态. 则ϕ 的不动子群为:

$$\mathrm{Fix}\phi := \{g \in G | \phi(g) = g\}.$$

- 设$\mathcal{B} \subseteq \mathrm{End}(G)$ 是群G 的一族自同态. 则$\mathcal{B}$ 的不动子群为

$$\mathrm{Fix}\mathcal{B} := \{g \in G | \phi(g) = g, \forall \phi \in \mathcal{B}\} = \bigcap_{\phi \in \mathcal{B}} \mathrm{Fix}\phi.$$

2 不动子群——Scott猜想

设F_n 是秩为n 的自由群. 1975年，J. Dyer 和G. Scott最先开始了对**自由群**不动子群的研究:

2 不动子群——Scott猜想

设F_n 是秩为n 的自由群. 1975年，J. Dyer 和G. Scott最先开始了对**自由群**不动子群的研究:

定理 (Dyer-Scott, 1975)

设$\phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$是一个有限阶的自同构. 则$\mathrm{rk}(\mathrm{Fix}\phi) \leq n$.

2 不动子群——Scott猜想

设F_n 是秩为n 的自由群. 1975年，J. Dyer 和G. Scott最先开始了对**自由群**不动子群的研究:

定理 (Dyer-Scott, 1975)

设$\phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$是一个有限阶的自同构. 则$\mathrm{rk}(\mathrm{Fix}\phi) \leq n$.

猜想 (Scott, 1975)

设$\phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$. 则$\mathrm{rk}(\mathrm{Fix}\phi) \leq n$?

2 不动子群——Scott猜想

设F_n 是秩为n 的自由群. 1975年，J. Dyer 和G. Scott最先开始了对**自由群**不动子群的研究:

定理 (Dyer-Scott, 1975)

设$\phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$是一个有限阶的自同构. 则$\mathrm{rk}(\mathrm{Fix}\phi) \leq n$.

猜想 (Scott, 1975)

设$\phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$. 则$\mathrm{rk}(\mathrm{Fix}\phi) \leq n$?

定理 (Bestvina-Handel, 1992)

Scott 猜想成立.

定理 (Dicks-Ventura, 1996)

设$\mathcal{B} \subseteq \mathrm{End}(F_n)$ 是任意一族**单自同态**. 则$\mathrm{rk}(\mathrm{Fix}\mathcal{B}) \leq n$.

同时，他们证明了$\mathrm{Fix}\mathcal{B}$ 在F_n 中是惯性的（**inert**），即：对任意子群$B \leq F_n$, 有

$$\mathrm{rk}(A \cap B) \leq \mathrm{rk}(B).$$

定理 (Bergman, 1999)

Dicks-Ventura 定理对任意一族自同态$\mathcal{B} \subseteq \mathrm{End}(F_n)$成立.

3 Nielsen 不动点理论

- 设X 是一个紧致连通的拓扑空间，$f : X \to X$ 是一个连续映射. f 的不动点集为

$$\mathrm{Fix} f := \{x \in X | f(x) = x\} \subseteq X.$$

不动点集$\mathrm{Fix} f$ 可分裂成不动点类的不交并.

3 Nielsen 不动点理论

- 设X 是一个紧致连通的拓扑空间，$f : X \to X$ 是一个连续映射. f 的不动点集为

$$\mathrm{Fix} f := \{x \in X | f(x) = x\} \subseteq X.$$

不动点集$\mathrm{Fix} f$ 可分裂成不动点类的不交并.

- 若X中一条道路c与其像$f(c)$定端同伦，则称c为Nielsen 道路. f 的两个不动点属于同一个不动点类当且仅当它们可用一条Nielsen 道路连接.

3 Nielsen 不动点理论

- 设X 是一个紧致连通的拓扑空间，$f : X \to X$ 是一个连续映射. f 的不动点集为

$$\mathrm{Fix} f := \{x \in X | f(x) = x\} \subseteq X.$$

不动点集$\mathrm{Fix} f$ 可分裂成不动点类的不交并.

- 若X中一条道路c与其像$f(c)$定端同伦，则称c为Nielsen 道路. f 的两个不动点属于同一个不动点类当且仅当它们可用一条Nielsen 道路连接.

- 每个不动点类$\mathbf{F}$ 有一个取值为整数的指数$\mathrm{ind}(f, \mathbf{F})$.

3.1 不动点的指数

1993年，姜伯驹与Jianhan Guo给出了紧致双曲曲面自同胚的不动点指数的一个不等式：

3.1 不动点的指数

1993年，姜伯驹与Jianhan Guo给出了紧致双曲曲面自同胚的不动点指数的一个不等式：

定理 (郭一姜, 1993)

设X是紧致双曲曲面，f是X的**自同胚**，则$\mathrm{ind}(\mathbf{F}) \leq 1$，且

$$\sum_{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+1<0} \{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+1\} \geq 2\chi(X).$$

3.1 不动点的指数

1993年，姜伯驹与Jianhan Guo给出了紧致双曲曲面自同胚的不动点指数的一个不等式：

定理 (郭一姜, 1993)

设X是紧致双曲曲面，f是X的**自同胚**，则$\mathrm{ind}(\mathbf{F}) \leq 1$，且

$$\sum_{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+1<0} \{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+1\} \geq 2\chi(X).$$

1998年，姜伯驹证明了上述不等式对有限图及紧致双曲曲面的自映射仍然成立：

3.1 不动点的指数

1993年，姜伯驹与Jianhan Guo给出了紧致双曲曲面自同胚的不动点指数的一个不等式：

定理 (郭一姜, 1993)

设X是紧致双曲曲面，f是X的**自同胚**，则$\mathrm{ind}(\mathbf{F}) \leq 1$，且

$$\sum_{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+1<0} \{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+1\} \geq 2\chi(X).$$

1998年，姜伯驹证明了上述不等式对有限图及紧致双曲曲面的自映射仍然成立：

定理 (姜伯驹, 1998)

设X有限图或紧致双曲曲面，f是X的**自映射**，则$\mathrm{ind}(\mathbf{F}) \leq 1$，且

$$\sum_{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+1<0} \{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+1\} \geq 2\chi(X).$$

2011年，我们发现了不动点类一个新的不变量：

定义 (姜-汪-张, 2011)

设$f: X \to X$ 是拓扑空间X 的自映射，$f_x: \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,x)$ 是f 在基本群$\pi_1(X,x)$上诱导的同态. f 的不动点类$\mathbf{F}$ 的示性数$\mathrm{chr}(\mathbf{F})$ 为:

若$\mathrm{Fix} f_x$为闭曲面群，则$\mathrm{chr}(\mathbf{F}) := 2 - \mathrm{rk}(\mathrm{Fix}(f,x)), \quad x \in \mathbf{F}$; 否则

$$\mathrm{chr}(\mathbf{F}) := 1 - \mathrm{rk}(\mathrm{Fix}(f,x)), \quad x \in \mathbf{F}.$$

3.2 图及曲面的不动点与不动子群

2011年，我们发现了不动点类一个新的不变量：

定义 (姜-汪-张, 2011)

设$f: X \to X$ 是拓扑空间X 的自映射，$f_x: \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,x)$ 是f 在基本群$\pi_1(X,x)$上诱导的同态. f 的不动点类$\mathbf{F}$ 的示性数$\mathrm{chr}(\mathbf{F})$ 为:
若$\mathrm{Fix} f_x$为闭曲面群，则$\mathrm{chr}(\mathbf{F}) := 2 - \mathrm{rk}(\mathrm{Fix}(f,x)), \quad x \in \mathbf{F}$; 否则

$$\mathrm{chr}(\mathbf{F}) := 1 - \mathrm{rk}(\mathrm{Fix}(f,x)), \quad x \in \mathbf{F}.$$

定理 (姜-汪-张, 2011)

设X是图或双曲曲面，f是X的自映射，则$\mathrm{ind}(\mathbf{F}) \le \mathrm{chr}(\mathbf{F})$，且

$$\sum_{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+\mathrm{chr}(\mathbf{F})<0} \{\mathrm{ind}(\mathbf{F}) + \mathrm{chr}(\mathbf{F})\} \ge 2\chi(X).$$

3.3 曲面群的不动子群

定理（姜-汪-张）将Scott猜想与姜伯驹关于不动点指数的不等式联系了起来，且二者皆可容易由上述关系得到. 更重要的是，证明了：

定理（姜-汪-张）将Scott猜想与姜伯驹关于不动点指数的不等式联系了起来，且二者皆可容易由上述关系得到. 更重要的是，证明了：

定理 (姜—汪—张, 2011)

设G 是曲面群（即G 同构于某个双曲闭曲面的基本群），$\phi \in \mathrm{End}(G)$ 是G 的任一自同态. 则

$$\mathrm{rk}(\mathrm{Fix}\phi) \leq \mathrm{rk}(G).$$

定理 (吴一张, 2014)

设G 是曲面群，$\mathcal{B} \subseteq \mathrm{End}(G)$ 是G 的任意一族**自同态**. 则

$$\mathrm{rk}(\mathrm{Fix}\mathcal{B}) \leq \mathrm{rk}(G).$$

定理 (吴一张, 2014)

设G 是曲面群，$\mathcal{B} \subseteq \mathrm{End}(G)$ 是G 的任意一族**自同态**. 则

$$\mathrm{rk}(\mathrm{Fix}\mathcal{B}) \leq \mathrm{rk}(G).$$

定理 (吴一张, 2014)

曲面群G 的任意一族**自同构**$\mathcal{B}$ 的不动子群是惯性的，即：对任意子群$A \leq G$, 有

$$\mathrm{rk}(A \cap \mathrm{Fix}\mathcal{B}) \leq \mathrm{rk}(A).$$

2012年，我们研究了三维Seifert流形的自同胚的不动点类与不动子群，得到了如下结果：

定理 (张, 2012)

设M是紧致可定向的**Seifert**流形，其轨形$\mathcal{O}(M)$是双曲的，f是M的自同胚，则

(A) 对f的本质不动点类$\mathbf{F}$, $\mathrm{ind}(\mathbf{F}) \leq \mathrm{chr}(\mathbf{F})$;

(B)

$$\sum_{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+\mathrm{chr}(\mathbf{F})<0} \{\mathrm{ind}(\mathbf{F}) + \mathrm{chr}(\mathbf{F})\} \geq \mathcal{B},$$

其中

$$\mathcal{B} = \begin{cases} 4(3 - \mathrm{rk}\pi_1 M) & M \text{ is a closed surface } F \times S^1 \\ 4(2 - \mathrm{rk}\pi_1 M) & \text{others} \end{cases}.$$

上述结果$\Longrightarrow$ Seifert流形自同胚的不动点类指数有界:

定理 (张，2012)

设M是紧致可定向的**Seifert**流形，其轨形$\mathcal{O}(M)$是双曲的，f是M的自同胚，则对f的任意不动点类$\mathbf{F}$, $\mathrm{ind}(\mathbf{F}) \leq 1$，且

$$\sum_{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+1<0} \{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+1\} \geq \mathcal{B}.$$

定理 (张，2013)

设M是紧致**双曲**三维流形，f是M的自同胚，则对f的任意不动点类$\mathbf{F}$, $\mathrm{ind}(\mathbf{F}) \leq 1$，且

$$\sum_{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+1<0} \{\mathrm{ind}(\mathbf{F})+1\} \geq \mathcal{B}.$$

定理 (林-王, 2012)

设M 是一个紧致、可定向的有限体积的**双曲三维流形**，ϕ 是$G = \pi_1(M)$ 的任一自同构. 则

$$\mathrm{rk}(\mathrm{Fix}\phi) < 2 \cdot \mathrm{rk}(G).$$

4.3 三维流形的不动子群——双曲流形

定理 (林-王, 2012)

设M 是一个紧致、可定向的有限体积的**双曲三维流形**，ϕ 是$G = \pi_1(M)$ 的任一自同构. 则

$$\mathrm{rk}(\mathrm{Fix}\phi) < 2 \cdot \mathrm{rk}(G).$$

定理 (林-王, 2012)

存在一系列闭双曲三维流形M_n 及自同构$\phi_n : \pi_1(M_n) \to \pi_1(M_n)$ 使得$\mathrm{Fix}\phi_n$ 为闭曲面群且$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, $s.t.$ $\forall n > N$,

$$\frac{\mathrm{rk}\mathrm{Fix}\phi_n}{\mathrm{rk}\pi_1(M_n)} > 2 - \varepsilon.$$

定理 (张，2014)

设M是紧致可定向的**Seifert 流形**，其轨形$\mathcal{O}(M)$是双曲的，f是M的任一**反定向**自同胚，f_π 为f 诱导的基本群的自同构. 则

$$\mathrm{rk}(\mathrm{Fix}(f_\pi)) < 2 \cdot \mathrm{rk}(\pi_1(M)).$$

定理 (张，2014)

设M是紧致可定向的**Seifert 流形**，其轨形$\mathcal{O}(M)$是双曲的，f是M的任一**反定向**自同胚，f_π 为f 诱导的基本群的自同构. 则

$$\mathrm{rk}(\mathrm{Fix}(f_\pi)) < 2 \cdot \mathrm{rk}(\pi_1(M)).$$

一般的Seifert流形群的自同构的不动子群可无限生成:

例:

设$G = F_2 \times \mathbb{Z} = \langle a, b\rangle \times \langle t\rangle$,

$$\phi \in \mathrm{Aut}(G) : a \mapsto at, b \mapsto b, t \mapsto t.$$

则$\mathrm{Fix}\phi = \langle t, a^{-m}ba^m | m \in \mathbb{Z}\rangle$ 无限生成.

5 惯性的, 可压缩的及BH

定义

子群A 在群G 中称为惯性的（*inert*），若对任一子群$B \leqslant G$, 有

$$\mathrm{rk}(A \cap B) \leq \mathrm{rk}B.$$

定义

子群A 在群G 中称为可压缩的（*compressed*），若对任一子群$A \leqslant B \leqslant G$, 有

$$\mathrm{rk}A \leq \mathrm{rk}B.$$

定义

子群A 在群G 称为*BH*，若$\mathrm{rk}A \leq \mathrm{rk}G$.

注

惯性的$\Longrightarrow$ 可压缩的$\Longrightarrow$ *BH*.

5 惯性的、可压缩的、BH

对任意一族自同态$B \subseteq \mathrm{End}(G)$,

定理 (Bergman, 1999)

$\mathrm{Fix}\mathcal{B}$ 在F_n 中总是**BH**.

问题(Bergman, 1999)

$\mathrm{Fix}\mathcal{B}$ 在F_n中一定是惯性的?

5 惯性的、可压缩的、BH

对任意一族自同态$B \subseteq \mathrm{End}(G)$,

定理 (Bergman, 1999)

$\mathrm{Fix}\mathcal{B}$ 在F_n 中总是**BH**.

问题(Bergman, 1999)

$\mathrm{Fix}\mathcal{B}$ 在F_n中一定是惯性的?

定理 (Martino-Ventura, 2004)

$\mathrm{Fix}\mathcal{B}$在F_n中总是可压缩的.

5 惯性的、可压缩的、BH

对任意一族自同态$B \subseteq \mathrm{End}(G)$,

定理 (Bergman, 1999)

$\mathrm{Fix}\mathcal{B}$ 在F_n 中总是**BH**.

问题(Bergman, 1999)

$\mathrm{Fix}\mathcal{B}$ 在F_n中一定是**惯性的**?

定理 (Martino-Ventura, 2004)

$\mathrm{Fix}\mathcal{B}$在F_n中总是**可压缩的**.

定理 (张-Ventura-吴, 2015)

$\mathrm{Fix}\mathcal{B}$ 在任意**曲面群**中总是**可压缩的** .

6.1 乘积群的不动子群: 大多数BH

设$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, 每个因子$G_i$ 是有限生成的自由群或闭曲面群（欧拉示性数可非负），我们称之为乘积群.

6.1 乘积群的不动子群: 大多数BH

设$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, 每个因子$G_i$ 是有限生成的自由群或闭曲面群（欧拉示性数可非负），我们称之为乘积群.

定理A (张-Ventura-吴, 2015)

对所有的$\phi \in \mathrm{Aut}(G)$，$\mathrm{rkFix}\phi \leq \mathrm{rk}G$
$\Longleftrightarrow$ 所有的G_i 具有相同的类型——欧氏的或双曲的.

欧氏的: $\mathbb{Z}$, $\pi_1(S)$ for $\chi(S) \geq 0$.
双曲的: F_n $(n > 1)$, $\pi_1(S)$ for $\chi(S) < 0$.

6.1 乘积群的不动子群: 大多数BH

设$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, 每个因子$G_i$ 是有限生成的自由群或闭曲面群（欧拉示性数可非负），我们称之为乘积群.

定理A (张-Ventura-吴, 2015)

对所有的$\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\mathrm{rkFix}\phi \leq \mathrm{rk}G$
$\Longleftrightarrow$ 所有的G_i 具有相同的类型——欧氏的或双曲的.

欧氏的: $\mathbb{Z}$, $\pi_1(S)$ for $\chi(S) \geq 0$.
双曲的: F_n $(n > 1)$, $\pi_1(S)$ for $\chi(S) < 0$.

例(不满足定理A中条件)

设$G = F_2 \times \mathbb{Z} = \langle a, b\rangle \times \langle t\rangle$,

$$\phi \in \mathrm{Aut}(G) : a \mapsto at, b \mapsto b, t \mapsto t.$$

则$\mathrm{Fix}\phi = \langle t, a^{-m}ba^m | m \in \mathbb{Z}\rangle$.

6.2 乘积群的不动子群: 少数可压缩

定理B (张-Ventura-吴, 2015)

设$G = G_1 \times \cdots \times G_n$ 是乘积群. 若对所有的$\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\mathrm{Fix}\phi$ 在G中是**可压缩的**, 则G 一定是下列类型之一:

(*euc1*) $G = \mathbb{Z}^p \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^q$ for some $p, q \geqslant 0$; or
(*euc2*) $G = NS_2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^q$ for some $q \geqslant 0$; or
(*euc3*) $G = NS_2 \times \mathbb{Z}^p \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ for some $p \geqslant 1$; or
(*euc4*) $G = NS_2^\ell \times \mathbb{Z}^p$ for some $\ell \geqslant 1$, $p \geqslant 0$; or

(*hyp1*) $G = F_r \times NS_3^\ell$ for some $r \geqslant 2$, $\ell \geqslant 0$; or
(*hyp2*) $G = S_g \times NS_3^\ell$ for some $g \geqslant 2$, $\ell \geqslant 0$; or
(*hyp3*) $G = NS_k \times NS_3^\ell$ for some $k \geqslant 3$, $\ell \geqslant 0$.

6.2 乘积群的不动子群: 少数可压缩

定理B (张-Ventura-吴, 2015)

设$G = G_1 \times \cdots \times G_n$ 是乘积群. 若对所有的$\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\mathrm{Fix}\phi$ 在G中是**可压缩的**, 则G 一定是下列类型之一:

(*euc1*) $G = \mathbb{Z}^p \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^q$ for some $p, q \geqslant 0$; or
(*euc2*) $G = NS_2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^q$ for some $q \geqslant 0$; or
(*euc3*) $G = NS_2 \times \mathbb{Z}^p \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ for some $p \geqslant 1$; or
(*euc4*) $G = NS_2^\ell \times \mathbb{Z}^p$ for some $\ell \geqslant 1$, $p \geqslant 0$; or

(*hyp1*) $G = F_r \times NS_3^\ell$ for some $r \geqslant 2$, $\ell \geqslant 0$; or
(*hyp2*) $G = S_g \times NS_3^\ell$ for some $g \geqslant 2$, $\ell \geqslant 0$; or
(*hyp3*) $G = NS_k \times NS_3^\ell$ for some $k \geqslant 3$, $\ell \geqslant 0$.

问题

定理B中的陈述是等价条件?

例子: 不动子群非可压缩的

例1:

设 $G = F_2 \times F_2 = \langle t, u \rangle \times \langle a, b \rangle$, 且

$$\phi \in \mathrm{Aut}(G) : t \mapsto t, u \mapsto tu, a \mapsto a, b \mapsto ab.$$

则

$$\mathrm{Fix}\phi = \langle t, u^{-1}tu, a, b^{-1}ab \rangle \leqslant \langle t, bu, a \rangle.$$

例子: 不动子群非可压缩的

例1:

设 $G = F_2 \times F_2 = \langle t, u\rangle \times \langle a, b\rangle$, 且

$$\phi \in \mathrm{Aut}(G) : t \mapsto t, u \mapsto tu, a \mapsto a, b \mapsto ab.$$

则

$$\mathrm{Fix}\phi = \langle t, u^{-1}tu, a, b^{-1}ab\rangle \leqslant \langle t, bu, a\rangle.$$

例2:

设 $G = F_2 \times NS_4 = \langle t, u\rangle \times \langle a, b, c, d | aba^{-1}bcdc^{-1}d\rangle$, 且

$$\phi \in \mathrm{Aut}(G) : t \mapsto t, u \mapsto tu, a \mapsto ab, b \mapsto b, c \mapsto cd, d \mapsto d.$$

则

$$\mathrm{Fix}\phi = \langle t, u^{-1}tu, b, aba^{-1}, d, cdc^{-1}\rangle = \langle t, u^{-1}tu\rangle \times \langle b, aba^{-1}, d\rangle \cong F_5$$

但 $$\mathrm{Fix}\phi \leqslant \langle t, au, b, d\rangle \cong F_4.$$

例子：不动子群非可压缩的

例3:

设$G = NS_2 \times NS_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle a, b | aba^{-1}b \rangle \times \langle c, d | cdc^{-1}d \rangle \times \langle e | e^2 \rangle$,

$$\phi \in \mathrm{Aut}(G) : a \mapsto a, b \mapsto be, c \mapsto cd, d \mapsto d, e \mapsto e.$$

则

$$\mathrm{Fix}\phi = \langle a, b^2, c^2, d, e \rangle \leqslant \langle a, bc, d, e \rangle$$

因为$c^2 = a \cdot bc \cdot a^{-1} \cdot bc$ 且$b^2 = bc \cdot bc \cdot c^{-2}$.

例子: 不动子群非惯性的

例4:

设$G = F_2 \times NS_3 = \langle t, u\rangle \times \langle a, b, c | aba^{-1}bc^2\rangle$, 且

$$\phi \in \mathrm{Aut}(G) : t \mapsto t, u \mapsto u, a \mapsto ab, b \mapsto b, c \mapsto c.$$

则

$$\mathrm{Fix}\phi = \langle t, u, aba^{-1}, b, c\rangle = \langle t, u\rangle \times \langle b, c\rangle.$$

设$K = \langle at, u\rangle$. 则

$$\mathrm{Fix}\phi \cap K = \langle t^{-m}ut^m | m \in \mathbb{Z}\rangle$$

无限生成.

6.3 乘积群的不动子群: 极少惯性的

定理C (张-Ventura-吴, 2015)

设$G = G_1 \times \cdots \times G_n$ 是一个乘积群. 若对所有的$\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\mathrm{Fix}\phi$ 在G 是**惯性的(inert)**, 则G 是以下类型之一: (euc1)、(euc2)、(euc3)、(euc4) 或

- $G = F_r$ for some $r \geqslant 2$; or
- $G = \pi_1(S)$ for some closed surface $\chi(S) < 0$

惯性猜想(张-Ventura-吴, 2015)

设$G = G_1 \times \cdots \times G_n$是一个乘积群. 则以下陈述等价:

1. 对所有的$\phi \in \mathrm{End}(G)$, $\mathrm{Fix}\phi$ 在G 中是惯性的;
2. 对所有的$\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\mathrm{Fix}\phi$ 在G 中是惯性的;
3. G 属于以下类型之一: (euc1)、(euc2)、(euc3)、(euc4)、自由群F_n （$n \geq 2$）、曲面群$\pi_1(S)$ （$\chi(S) < 0$）.

惯性猜想(张-Ventura-吴, 2015)

设$G = G_1 \times \cdots \times G_n$是一个乘积群. 则以下陈述等价:

1. 对所有的$\phi \in \mathrm{End}(G)$, $\mathrm{Fix}\phi$ 在G 中是惯性的;
2. 对所有的$\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\mathrm{Fix}\phi$ 在G 中是惯性的;
3. G 属于以下类型之一: (euc1)、(euc2)、(euc3)、(euc4)、自由群F_n （$n \geq 2$）、曲面群$\pi_1(S)$ （$\chi(S) < 0$）.

注

$$(1) \xRightarrow{trivial} (2) \xRightarrow{Theorem\quad C} (3) \xRightarrow{???} (1)$$

$$\{(3) - (euc4)\} \xRightarrow[Wu-Z.,2014]{Dicks-Ventura,1996} (2)$$

Z.-Ventura-Wu, *Fixed subgroups are compressed in surface groups*, **Int. J. Algebra Comput.**, 25(5) (2015), 865-887.
Z., *Bounds for fixed points on hyperbolic manifolds*, **Topology Appl.**, 185-186 (2015), 80-87.
Z., *The fixed subgroups of homeomorphisms of Seifert manifolds*, **Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)**, 31(5) (2015), 797-810.
Wu-**Z.**, *The group fixed by a family of endomorphisms of a surface group*, **J. Algebra**, 417(2014), 412-432.
Z., *Bounds for fixed points on hyperbolic 3-manifolds*, **Topology Appl.**, 164 (2014) 182-189.
Z.,*Bounds for fixed points on Seifert manifolds*, **Topology Appl.**, 159(15)(2012), 3263-3273.
Jiang-Wang-**Z.**, *Bounds for fixed points and fixed subgroups on surfaces and graphs*, **Algebr. Geom. Topol.** 11(2011), 2297-2318.
Mineyev, *Submultiplicativity and the Hanna Neumann conjecture*, **Ann. of Math.**, 175 (2012) 393-414.
Bestvina-Handel, *Train tracks and automorphisms of free groups*, **Ann. of Math.**, 135 (1992), 1-51.

谢　谢！