第一章 线性系统状态空间描述与运动分析

复习概念

内部描述，外部描述

概念：因果性，线性、非线性

系统基本描述：微分方程，传递函数描述

传递函数的局限性

掌握内容： 状态空间描述，由微分方程、传递函数、方框图求得状态空间描述，不同描述转换

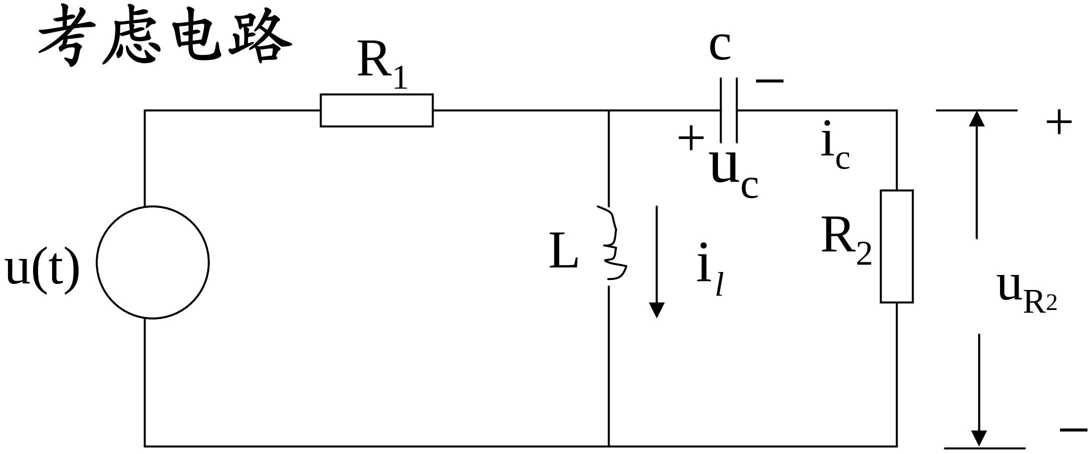
线性定常系统分析，线性时变、离散系统分析

状态空间描述是60年代初，将力学中的相空间法引入控制系统的研究中而形成的描述系统方法，它是时域中最详细的描述方法。

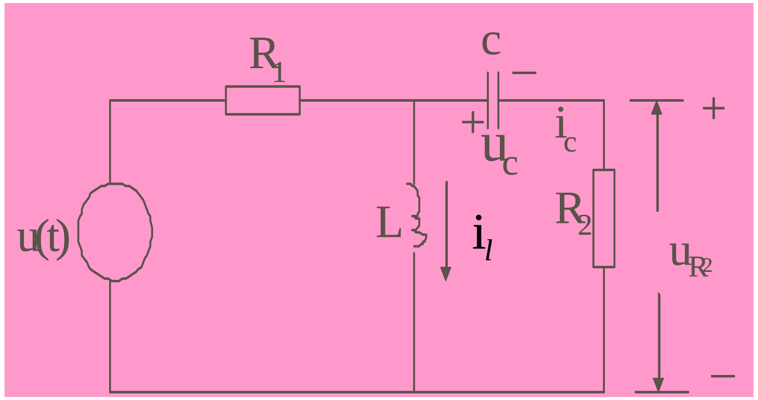
- 给出了系统的内部结构信息
- 形式上简洁，便于用数字计算机计算。

1.1 系统的状态空间模型

例1.1　考虑电路



列出电路方程



右方程 $u_c + R_2 i_c = L \cdot \dfrac{di_l}{dt}$

左方程 $R_1(i_l + i_c) + L\dfrac{di_l}{dt} = u(t)$

$$i_c = c\frac{du_c}{dt}$$

整理得

$$\begin{cases} R_2 c\dfrac{du_c}{dt} - L\cdot\dfrac{di_l}{dt} = -u_c \\ R_1 c\dfrac{du_c}{dt} + L\cdot\dfrac{di_l}{dt} = -R_1 i_l + u(t) \end{cases}$$

以 $\dfrac{du_c}{dt}$ 和 $\dfrac{di_l}{dt}$ 为待定变量求解上述方程，得

$$\frac{du_c}{dt}=-\frac{1}{(R_1+R_2)c}u_c-\frac{R_1}{(R_1+R_2)c}i_L+\frac{1}{(R_1+R_2)c}u(t)$$

$$\frac{di_L}{dt}=\frac{R_1}{L(R_1+R_2)}u_c-\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}i_L+\frac{R_2}{L(R_1+R_2)}u(t)$$

写成向量形式

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_c\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{(R_1+R_2)} & -\dfrac{R}{(R_1+R_2)c}\\ \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)} & -\dfrac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_c\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(R_1+R_2)c}\\ \dfrac{R_2}{L(R_1+R_2)}\end{bmatrix}u(t)$$

导出输出方程：

$$u_{R_2}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_c\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\end{bmatrix}u(t)$$

把 u_c, i_L 称为系统状态变量。系统的状态定义为表现系统时间域行为的一个最小内部变量组。u_{R_2} 为输出变量。

一般情况下，r个输入 m个输出的系统运动，可以描述为

$$
\begin{aligned}
&\text{状态方程：}\quad \underline{\dot{x}} = A(t)\underline{x} + B(t)\underline{u} \\
&\text{输出方程：}\quad \underline{y} = C(t)\underline{x} + D(t)\underline{u}
\end{aligned}
\qquad (1\text{-}1)
$$

$\underline{x}$是 $n\times 1$ 状态变量， $\underline{u}$ 是 $r\times 1$ 输入向量， $\underline{y}$ 是 $m\times 1$ 输出向量。

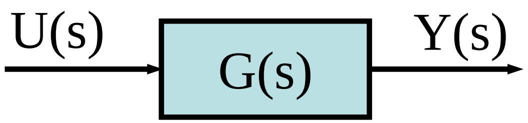
$A(t),B(t),C(t),D(t)$ 表示参数随时间发生变化，称为 时变系统

若 A,B,C,D 为常数，则称系统为定常系统，记为（A,B,C,D）

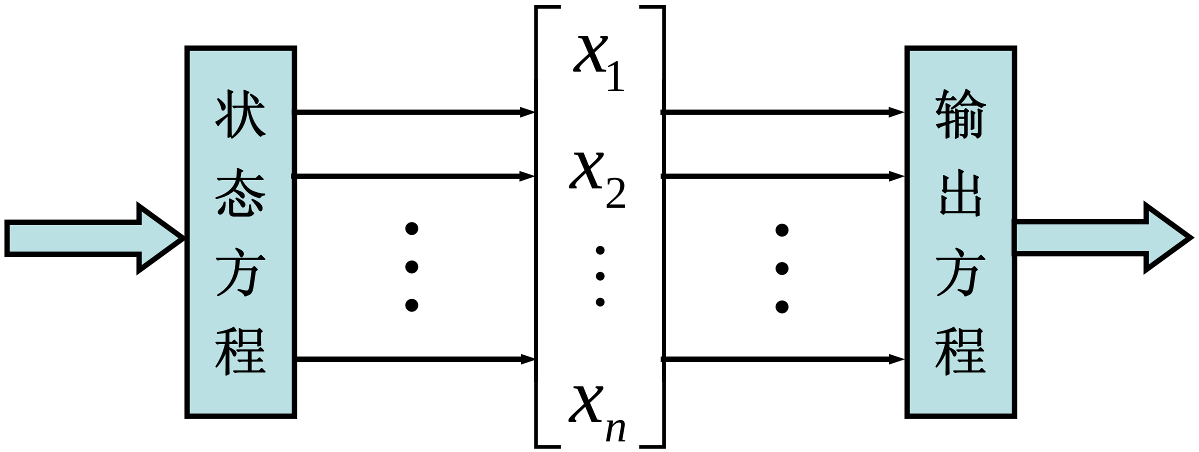
$$
\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}
$$

$\underline{x} \in X$ 状态空间 $\underline{y} \in Y$ 输出空间

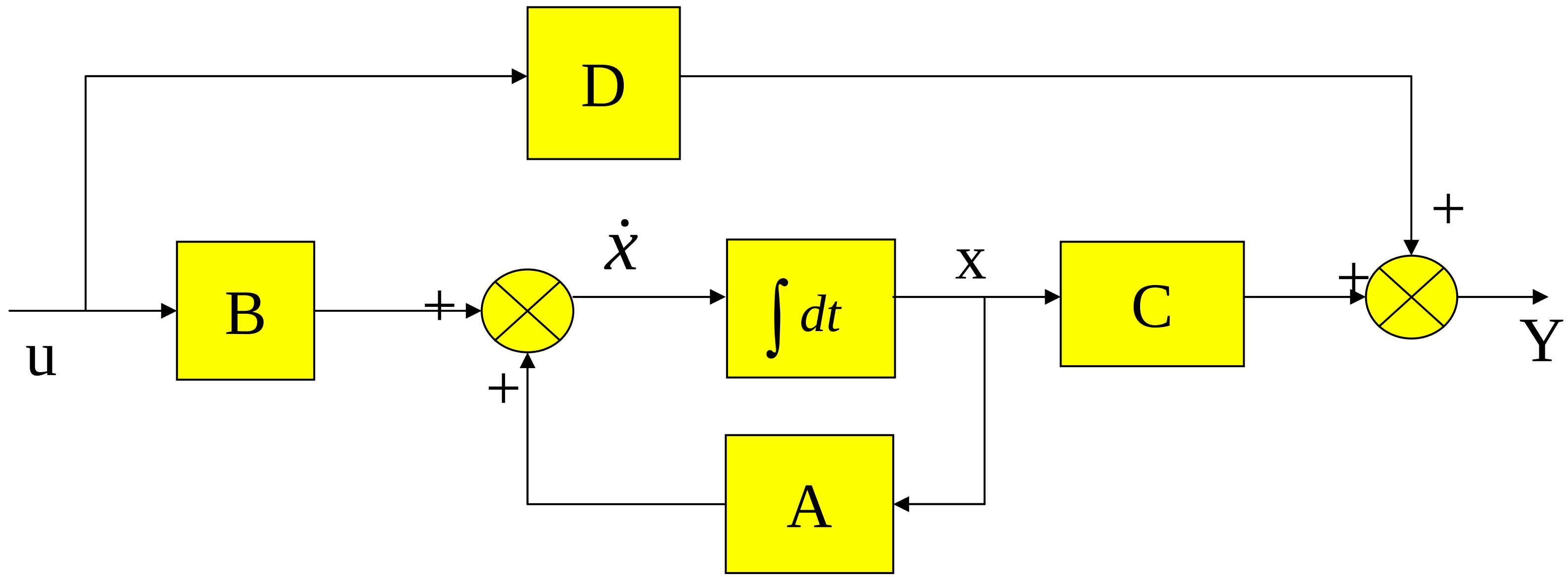
$\underline{u} \in U$ 输入空间 $\underline{t} \in T$ 时间集



传递函数只能描述系统外部的输入输出关系，并不能反映系统内部状态的变化，我们称之为外部描述。



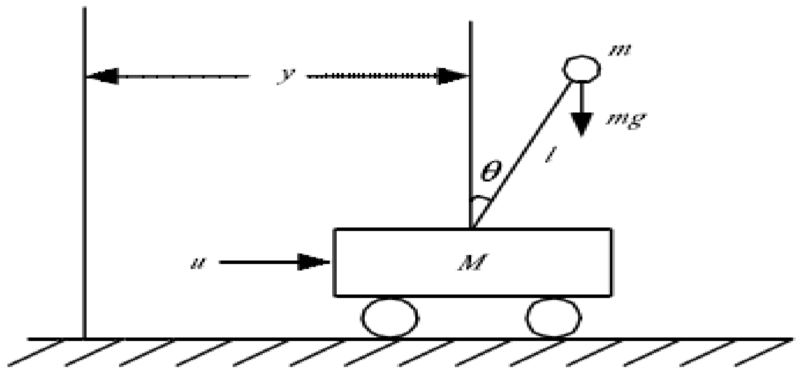
状态空间表达式将输入输出间的信息传递分为两段来描述。第一段是输入引起系统内部状态发生变化，用状态方程描述；第二段是系统内部的状态变化引起系统输出的变化，用输出方程描述。



1. 建立系统的状态方程模型有两种方法

机理建模，　辨识建模

机理建模



用小车的位移和速度及摆杆偏离垂线的角度和角速度来描述系统的动态特性.设摆杆长度为l

小车的水平位移：y

小球水平位置： $y + l\sin\theta$

小车水平方向受力：$(M+m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = u$

摆线力矩平衡：$\left[m\dfrac{d^2}{dt^2}(y + l\sin\theta)\right]l\cos\theta = mgl\sin\theta$

考虑到垂直位置的线性化模型

$$\sin\theta = \theta, \quad \cos\theta = 1$$

忽略 $\dot{\theta}^2\theta$

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta} = u \\ \ddot{y} + l\ddot{\theta} = g\theta \end{cases}$$

求解可得：

$$\ddot{y} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}u$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)g}{Ml}\theta - \frac{1}{Ml}u$$

定义： $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$

从

$$\ddot{y} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}u$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)g}{Ml}\theta - \frac{1}{Ml}u$$

得到

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mg/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (M+m)g/Ml & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/Ml \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

线性模型
只在局部有效

2. 由系统输入输出描述导出状态方程模型

a. 由输入输出方程导出状态方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=b_mu^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+b_0u$$

当 $m<n$ 时

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{c:ccc} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hdashline -a_0 & -a_1 & & -a_{n-1} \end{array}\right]x+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\left[b_0,\ \cdots,b_m,0,\cdots,0\right]x$$

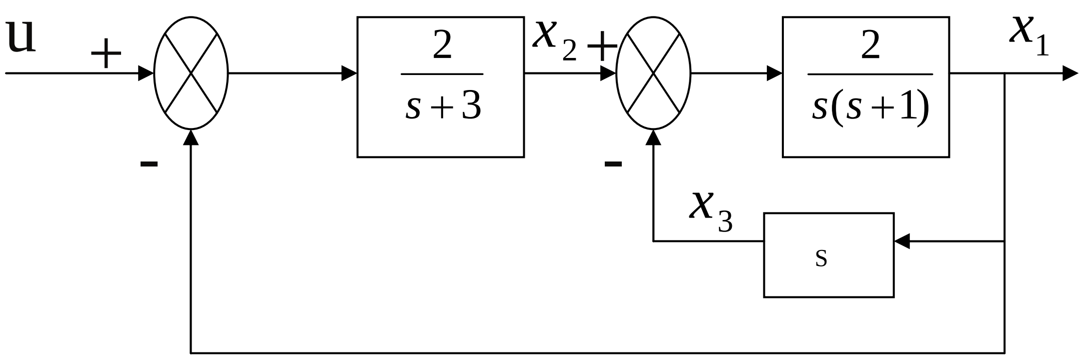
当 $m=n$ 时

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{c:ccc} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hdashline -a_0 & -a_1 & & -a_{n-1} \end{array}\right]x+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

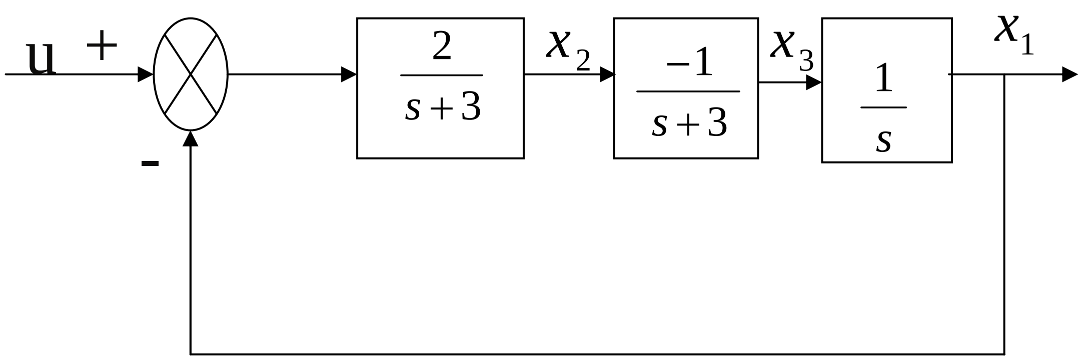
$$y=\left[(b_0-b_na_0),\ (b_1-b_na_1),\cdots,(b_{n-1}-b_na_{n-1})\ \right]x+b_nu$$

b. 由方框图导出状态方程

- 化给定方框图为规范化方框图，一阶惯性环节或比例环节;
- 指定状态变量;
- 列写变量间关系;
- 导出状态空间描述。



(a)



(b)

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = -3x_2 + u - x_1$$

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + x_2$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

自学组合系统状态空间模型求解方法，包括并联系统、串联系统与反馈系统

复习：状态方程的约当规范型

$$\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\overline{x}++P^{-1}Bu$$

1. 2　线性时变系统运动分析

定理1.1（解的存在与唯一性定理）

对 $\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t))$，若 f 在 T上满足Lipschitz条件，

初值为 $\hat{x}=x(t_0)$ ，则方程有唯一解。

1.2.1　零输入系统

先研究 $u=0$ 情况，此时状态方程 $\dot{\underline{x}}=A(t)\underline{x}+B(t)\underline{u}$ 变为

$$\begin{cases}\dot{\underline{x}}=A(t)\underline{x}\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\qquad (1\text{-}2)$$

（1-2）称为零输入系统.

$$\underline{x}=\underline{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\underline{x}(\tau)d\tau$$

可以证明 $\dot{x}=A(t)x$ 有且仅有n 个线性无关的解。任意选取 n 个线性无关的解，并以它们为列构成 $n\times n$ 矩阵函数 $\Psi(t)$ ，则 $\Psi(t)$ 为 $\dot{x}=Ax$ 的一个基本解阵。

$$\dot{\Psi}(t)=A(t)\Psi(t),\qquad \Psi(t_0)=H,\quad t\geq t_0 \tag{1-3}$$

其中 H 为非奇异实常数值矩阵。

定义1.1： 若 $$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0 \tag{1-4}$$

称 $\Phi(t,t_0)$ 为**状态转移矩阵**

定义1.2： 满足 $\dot{\Phi}(t,t_0)=A\Phi(t,t_0),\ \Phi(0)=\mathrm{I},\quad t\geq t_0$ (1-5)

的解阵 $\Phi(t,t_0)$ 为系统的状态转移矩阵。

由（1-3）和（1-5）得 $\Phi(t,t_0)=\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$

状态转移矩阵有下列的特性：

$$\Phi(t,t)=\Phi(s,s)=\mathrm{I}$$

$$\Phi^{-1}(t,s)=\Phi(s,t)$$

$$\Phi(t_2,s)=\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,s)$$

$$\dot{\Phi}(s,t)=-\Phi(s,t)A(t)$$

定理1.2： 零输入响应系统(1-2)的状态转移矩阵为

$$\Phi(t,s)=\mathrm{I}+\int_s^t A(\tau)d\tau+\int_s^t A(\tau)(\int_s^\tau A(e)de)d\tau+\cdots \tag{1-6}$$

证明：$\dot{\Phi}(t,s)=A(t)+A(t)\int_s^t A(e)de+\cdots$

$$=A(t)(\mathrm{I}+\int_s^t A(e)de+\cdots)$$

$$=A(t)\Phi(t,s)$$

证毕。

对于时候 t_1 和 t_2，若 $A(t)$ 满足条件 $A(t_1)A(t_2)=A(t_2)A(t_1)$ 时，状态转移矩阵可写为

$$\Phi(t,s)=\exp\left[\int_s^t A(\tau)d\tau\right]$$

$$=\mathrm{I}+\int_s^t A(\tau)d\tau+\frac{1}{2!}\left(\int_s^t A(\tau)d\tau\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\int_s^t A(\tau)d\tau\right)^3+\cdots$$

定理1.3： 设 K 为某个正常数，如果对所有的 t 有 $\|A(t)\|\le K$，则对所有的 t 和 s 有

$$\|\Phi(t,s)\|\le\exp\left[K|t-s|\right]$$

证明：设 s 固定且 t>s，因为 $\Phi(s,s)=\mathrm{I}$ 且

$$\dot{\Phi}(t,s)=A(t)\Phi(t,s)$$

将上式从 s 到 t 积分，得

$$\Phi(t,s)=\mathrm{I}+\int_s^t A(\tau)\Phi(\tau,s)d\tau$$

取范数为 $\|\Phi(t,s)\|\le 1+\int_s^t\|A(\tau)\Phi(\tau,s)\|d\tau\le 1+\int_s^t K\|\Phi(\tau,s)\|d\tau$

应用格郎瓦—别尔曼不等式得

$$\|\Phi(t,s)\| \le \exp\left[K|t-s|\right]$$

证毕。

由这个定理知，若系统的参数矩阵是有界的，则它的状态转移矩阵也是有界的。

1.2.2 非齐次方程的解

利用状态转移矩阵的性质，很容易求出 $u \neq 0$ 时的状态轨迹表达式

$$\Phi(t_0,t)\dot{x} - \Phi(t_0,t)A(t)x = \Phi(t_0,t)B(t)u$$

由性质4得

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t_0,t)x) = \Phi(t_0,t)B(t)u$$

从t_0 到 t 积分后成为

$$\Phi(t_0,t)x - x_0 = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

则有

$$x = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)ud\tau \qquad (1\text{-}7)$$

(1-7)中第一项为 u = 0 时由初始状态 $x(t_0)$ 引起的效应，称为零输入响应；第二项是当系统初态$x(t_0)=0$ 时由输入 u 引起的效应，称为零状态响应。

由(1-6)、(1-7)可知要求得系统的运动轨迹，关键是求出系统的状态转移矩阵。对于一般的时变系统，这是一件困难的事情，大多只能依靠数值解法。

在状态空间模型下，只要有了系统的状态轨迹表达式(1-7)，可由输出方程(1-1)求得输出 y 的表达式

$$\begin{aligned} y &= C(t)x + D(t)u \qquad （1\text{-}8） \\ &= C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) \end{aligned}$$

第1项是在 u = 0 时由初始状态 x_0 后引起的状态响应在输出中的反映，称为零输入响应；第2项和第3项是初始状态 $x_0 = 0$时由 u 后引起的状态响应及 u 本身在输出中反映, 称为零状态响应

1.2.3 脉冲响应矩阵

单变量系统 单位脉冲，单位脉冲响应函数，传递函数

多变量系统 传递函数是否可以引入?

若成立 $$\delta(t-\tau)=\begin{cases}0, & t\neq\tau\\ \infty, & t=\tau\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\delta(t-\tau)dt=1$$

则称 $\delta(t-\tau)$ 为作用时刻为 τ 的单位脉冲函数。

定义1.3 对单变量连续线性时不变系统，零初始状态下以单位脉冲为输入的系统输出响应称为脉冲响应，表为 $h(t-\tau)$ 。

$h(t-\tau)$ 具有属性 $h(t-\tau)=0,\ \forall\tau$和$\forall t<\tau$

很显然，对于单输入单输出线性时不变系统，若系统初始状态为0，则系统在任意输入 u 作用下基于脉冲响应的输出响应 y(t) 的关系式为

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}h(t-\tau)u(\tau)d\tau,\quad t\geq t_0$$

证明：略。

对于时变系统，用 $h(t,\tau)$ 表示系统的脉冲响应。

定义1.4 对 r 维输入 m 维输出的连续线性时变系统，脉冲响应矩阵定义为零初始状态条件下以脉冲响应 $h_{ij}(t,\tau)$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,r)$ 为元构成的一个 $m\times r$ 输出响应矩阵

$$H(t,\tau)=\begin{bmatrix} h_{11}(t,\tau) & h_{12}(t,\tau) & \cdots & h_{1r}(t,\tau) \\ & \vdots & & \\ h_{m1}(t,\tau) & h_{m2}(t,\tau) & \cdots & h_{mr}(t,\tau) \end{bmatrix} \tag{1-9}$$

由脉冲响应矩阵定义，有

$$\begin{aligned} H(t,\tau) &= C(t)\int_{\tau}^{t}\Phi(t,\rho)B(\rho)\delta(t-\rho)d\rho + D(t)\delta(t-\tau) \\ &= C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \end{aligned} \tag{1-10}$$

（1-10）式为状态转移矩阵与脉冲响应矩阵之间的关系。

对于容许的任意输入 u，利用δ函数的性质将其表示为

$$u = \int_{t_0}^{t} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

那么由式 (1-8) 即可写出在初态$x(t_0)=x_0$ 下的输出

$$y = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad (1\text{-}11)$$

这就是系统对任意输入 u 的响应。

1.2.4 传递函数矩阵

对于单变量定常系统，我们知道对脉冲响应函数 $h(t)$ 取拉氏变换

$$L(h(t)) = g(s)$$

$$\hat{y} = g(s)\hat{u}$$

g(s)称系统的传递函数。

同样，对线性多变量定常系统，对脉冲响应矩阵H(t)取拉氏变换，得

$$L(H(t)) = G(s)$$

$$\hat{Y} = G(s)\hat{U}$$

G(s)称系统的传递函数矩阵。

线性定常系统（A,B,C,D), 状态转移矩阵为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \qquad (*)$$

证明：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

两边取拉氏变换

$$s\hat{x} = A\hat{x} + BU$$

$$Y = C\hat{x} + DU$$

由第一个方程得

$$(sI - A)\hat{x} = BU(s)$$

$$\hat{x} = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

再代入第二个方程

$$Y = [C(sI - A)^{-1}B + D]U$$

证毕。

多变量线性
时变系统

状态空间
描述

状态转移
矩阵
（概念）

1. 求解状态响应
2. 求解输出响应
（关系式）

单变量定常系统
单位脉冲，单位脉冲响
应函数，传递函数

多变定常量系统
脉冲响应矩阵，传递
函数矩阵

1.3 线性时不变系统运动分析

令$u(t)=0$即无外部输入，导出自治运动方程为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1-12}$$

令式(1-6)中的参数矩阵 $A(t)=A$ 为常数矩阵，积分得

$$\Phi(t,s) = I + A(t-s) + \frac{A^2}{2!}(t-s)^2 + \frac{A^3}{3!}(t-s)^3 + \cdots$$

或

$$\Phi(t-s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k (t-s)^k = e^{A(t-s)} \tag{1-13}$$

在（1-13）式对t微分后得 $\dfrac{d}{dt} e^{A(t-s)} = Ae^{A(t-s)} = e^{A(t-s)}A$

由于定常系统状态转移矩阵不随时间的起点不同而变化，不妨设 s = 0.

$$\Phi(t,0) = e^{At} = \Phi(t)$$

即有 $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$ $\Phi(0) = I$

$\Phi(t)$ 是方程（1-12）的状态转移矩阵。显然它有性质

$$\Phi(0) = I \qquad \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$$

$$\Phi(t_2)\Phi(t_1) = \Phi(t_1 + t_2) \qquad (\Phi(t))^k = \Phi(kt)$$

1.3.1 矩阵指数函数的算法

（1）定义法

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots \tag{1-14}$$

利用定义法，只能得到 e^{At} 的数值结果，难以得到 e^{At} 的解析表达式.

（2）特征值法

给定 $n \times n$ 矩阵 A， 且其 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 两两相异，A 的各个特征值的右特征向量组成变换阵为

$$P=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

e^{At} 的算式为

$$e^{At}=P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}P^{-1} \qquad (1\text{-}15)$$

若 A 的特征值属于包含重值情形。为使符号不致过于复杂，设 n = 5 ,特征值λ_1（重数为 3 ），λ_2（重数为2）。由A 的广义特征向量组所构成的变换阵为Q

e^{At} 的算式为

$$e^{At}=Q\left[\begin{array}{ccc:cc} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{array}\right]Q^{-1}$$

（3）求预解矩阵法 $e^{At}=L^{-1}(sI-A)^{-1}$

证： $L(e^{At})=\frac{I}{s}+\frac{A}{s^2}+\frac{A^2}{s^3}+\cdots=(sI-A)^{-1}$

对上式两边求拉普拉斯反变换，即得证。

例 1.2 给定一个连续时不变系统，其自治状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x$$

解:（1）定义法。由算式（1-14）得

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & t\\ -2t & -3t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-t^2 & -\frac{3}{2}t^2\\ 3t^2 & \frac{7}{2}t^2\end{bmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1-t^2+\cdots & t-\frac{3}{2}t^2+\cdots\\ -2t+3t^2+\cdots & 1-3t+\frac{7}{2}t^2+\cdots\end{bmatrix}$$

（2）特征值法　$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2$

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad p^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = p\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} p^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & \\ & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}$$

（3）求预解矩阵法

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+1)} + \frac{-1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+1)} + \frac{-1}{(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} & \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

广义特征向量算法：A的属于λ_i 的代数重数 $\delta_i, i=1\sim\mu$

1. 计算 $rank(\lambda_i I-A)^m=n-v_m, m=0,1,2$

直到 $m=m_0, v_{m_0}=\delta_i$

（自学）

2. 确定广义特征向量分块表

表的列数=分块数= m_0 j=1,…, m_0

列j中特征向量的个数=$v_{m_0-j+1}-v_{m_0-j},\ j=1,\ldots,m_0$

3.确定独立向量

4.确定导出向量

例 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$ $\lambda_1=-3, \delta_1=2$

(1) $rank(\lambda_1 I-A)^0=rank\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=2=2-v_0,\ v_0=0$

$$rank(\lambda_1 I - A)^1 = rank\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} = 1 = 2 - v_1，定出 v_1 = 1$$

$$rank(\lambda_1 I - A)^2 = rank\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}^2 = 0 = 2 - v_2，定出 v_2 = 2$$

$v_2 = \delta_1 = 2,$停止

(2)确定广义特征向量分块表

$m_0 = 2$

列1个数= $v_{m_0} - v_{m_0-1} = v_2 - v_1 = 2-1 = 1$

列2个数=$v_{m_0-1} - v_{m_0-2} = v_1 - v_0 = 1-0 = 1$

列1	列2
$v_{11}^{(2)} = v_{11}$	$v_{11}^{(1)} = (-3I - A)v_{11}$

（3）确定独立向量

$$(-3I-A)^2 v_{11}=0,\ (\text{-}3I-A)v_{11}\neq 0$$

$$\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 9 & 3\end{bmatrix}^2 v_{11}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}v_{11}=0$$

$$\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 9 & 3\end{bmatrix}v_{11}\neq 0$$

任取

$$v_{11}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

（4）确定导出向量

$$(-3I-A)v_{11}=\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 9 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ 12\end{bmatrix}$$

1.3.2 状态响应表达式

线性时不变系统的状态响应表达式：

$$x(t,t_0,x_0,u)=e^{A(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,\qquad t\geq t_0$$

对于例(1.2)，$B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，设 $x_1(0)=x_2(0)=0,\ u(t)$为单位阶跃响应，可以得出状态响应

$$\phi(t,0,0,u)=\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t\begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}-2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot dt$$

$$=\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -e^{-(t-\tau)}-2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}\qquad t\geq 0$$

1.3.3 脉冲响应矩阵和状态空间描述

对于连续时不变系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(t_0) = x_0, \qquad t \geq t_0$$

$$y = Cx + Du$$

其中，A,B,C,D 分别为$n \times n$, $n \times r$, $\mathrm{m} \times n$ 和$m \times r$ 的实常数阵，系统脉冲响应矩阵为

或 $$H(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)$$

$$H(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \tag{1-16}$$

（1-16）式由（1-10）容易得出。

1.4 连续时间线性系统的离散化

问题的提出

现代计算机控制系统结构

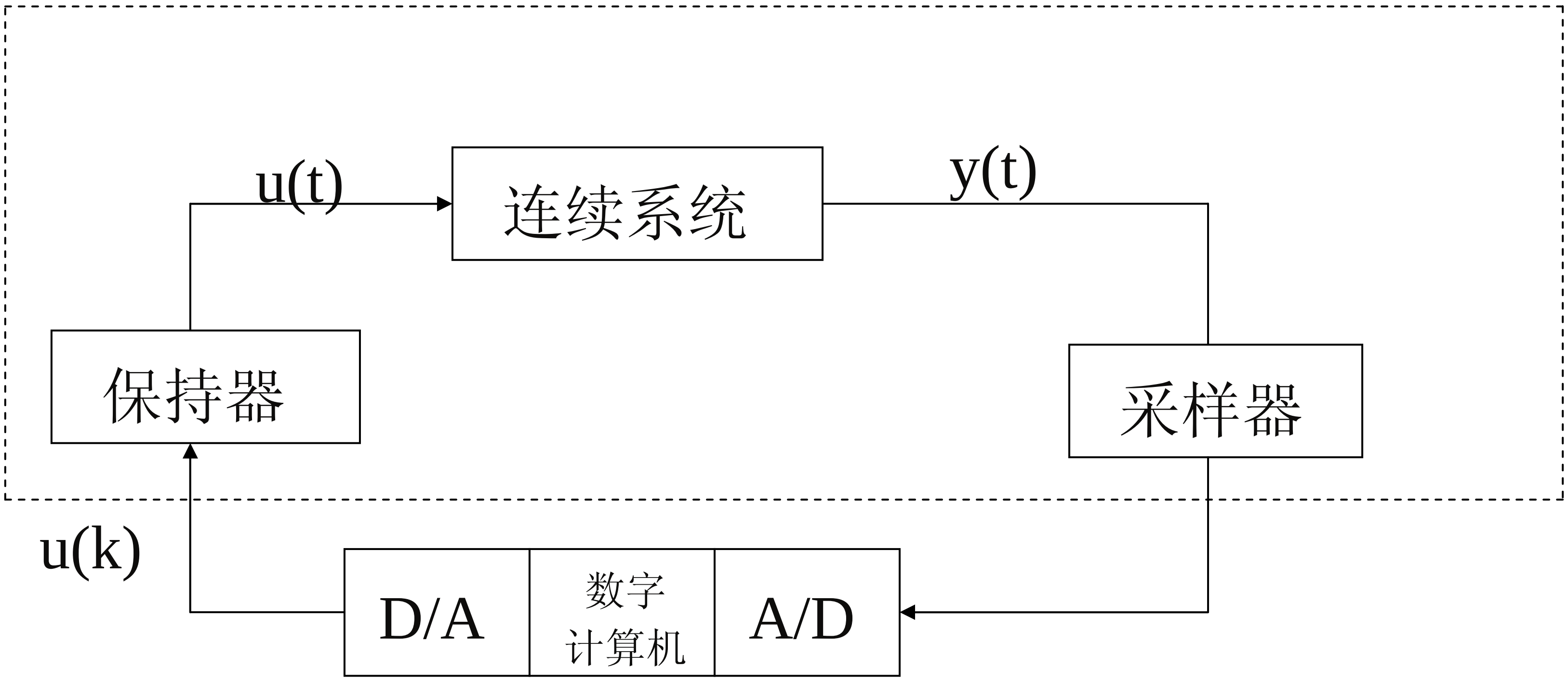


图1.1 计算机控制系统

离散化原则：

1. 等间隔采样，且采样时间宽度Δ比采样周期 T 要小得多，即 $\Delta \le T$ 。

$$y(k) = \begin{cases} y(t), & t = kT \\ 0, & t \neq kT \end{cases}$$

2. 采样周期要满足香农定理（Shannon）

$$\omega_s > 2\omega_c$$

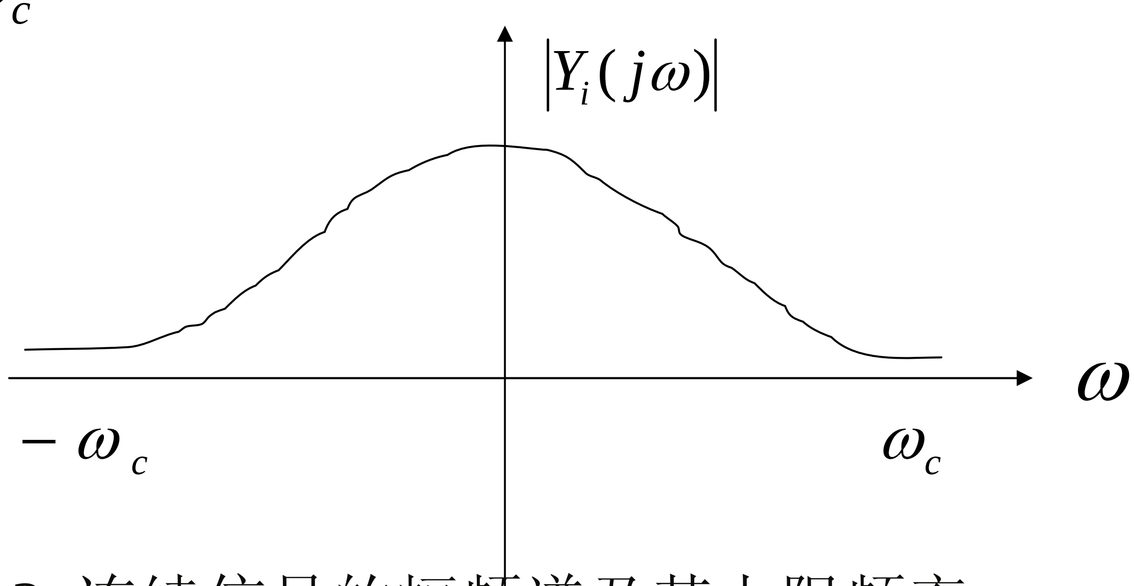


图1.2 连续信号的幅频谱及其上限频率

结论1： 连续系统$(A(t), B(t), C(t), D(t))$的离散化模型为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= G(k)x(k) + H(k)u(k), \qquad k = 0,1,\cdots \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k), \qquad x(0) = x_0 \end{aligned} \tag{1-17}$$

系数矩阵存在如下关系式

$$G(k) = \Phi((k+1)T, kT)$$

$$H(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau)B(\tau)d\tau$$

$$C(k) = \left[C(t)\right]_{t=kT}$$

$$D(k) = \left[D(t)\right]_{t=kT}$$

证：连续系统的状态运动方程为

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

令 $t=(k+1)T$， $t_0=0$, 则

$$x(k+1)=\Phi(k+1,0)x_0+\int_0^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$=\Phi(k+1,k)\left[\Phi(k,0)x_0+\int_0^{kT}\Phi(kT,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right]$$

$$+\left[\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi((k+1)T,\tau)B(\tau)d\tau\right]u(k)$$

$$=G(k)x(k)+H(k)u(k)$$

而对输出方程离散化 $y(k)=C(k)x(k)+D(k)u(k)$

结论2：连续时不变系统 (A,B,C,D) 的离散化模型为

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k), \qquad x(0)=x_0$$

$$y(k)=Cx(k)+D(k)u(k) \qquad (1\text{-}18)$$

其中，系统矩阵G和H为 $G=e^{AT}$ $\quad H=(\int_0^T e^{At}dt)B$

结论3：对(1-17)所描述的线性时变离散系统，其状态表达式为

$$x(k) = \Phi(k,0)x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k,i+1)H(i)u(i)$$

结论4：线性时变和线性定常离散系统状态转移矩阵分别为

$$\Phi(k,m) = G(k-1)G(k-2)\cdots G(m)$$

和 $\Phi(k-m) = G^{k-m}$

其中，$G(m-1) = I, G^0 = I$

证明： 求 $\Phi(k+1,m) = G(k)\Phi(k,m), \Phi(m,m) = I$ 的解。

$$\Phi(m+1,m) = G(m)$$

$$\Phi(m+2,m) = G(m+1)G(m)$$

$$\cdots$$

$$\Phi(k,m) = G(k-1)G(k-2)\cdots G(m)$$

同理通过解方程 $\Phi(k-m+1) = G\Phi(k-m), \Phi(0) = I$ 可得出定常系统的状态转移矩阵。

知识点：

1. 状态空间描述，由微分方程、传递函数、方框图求得建立简单物理系统状态空间描述
2. 线性定常系统运动分析
3. 线性时变、离散系统运动分析

研究题目：试写出二级倒立摆系统的状态空间描述