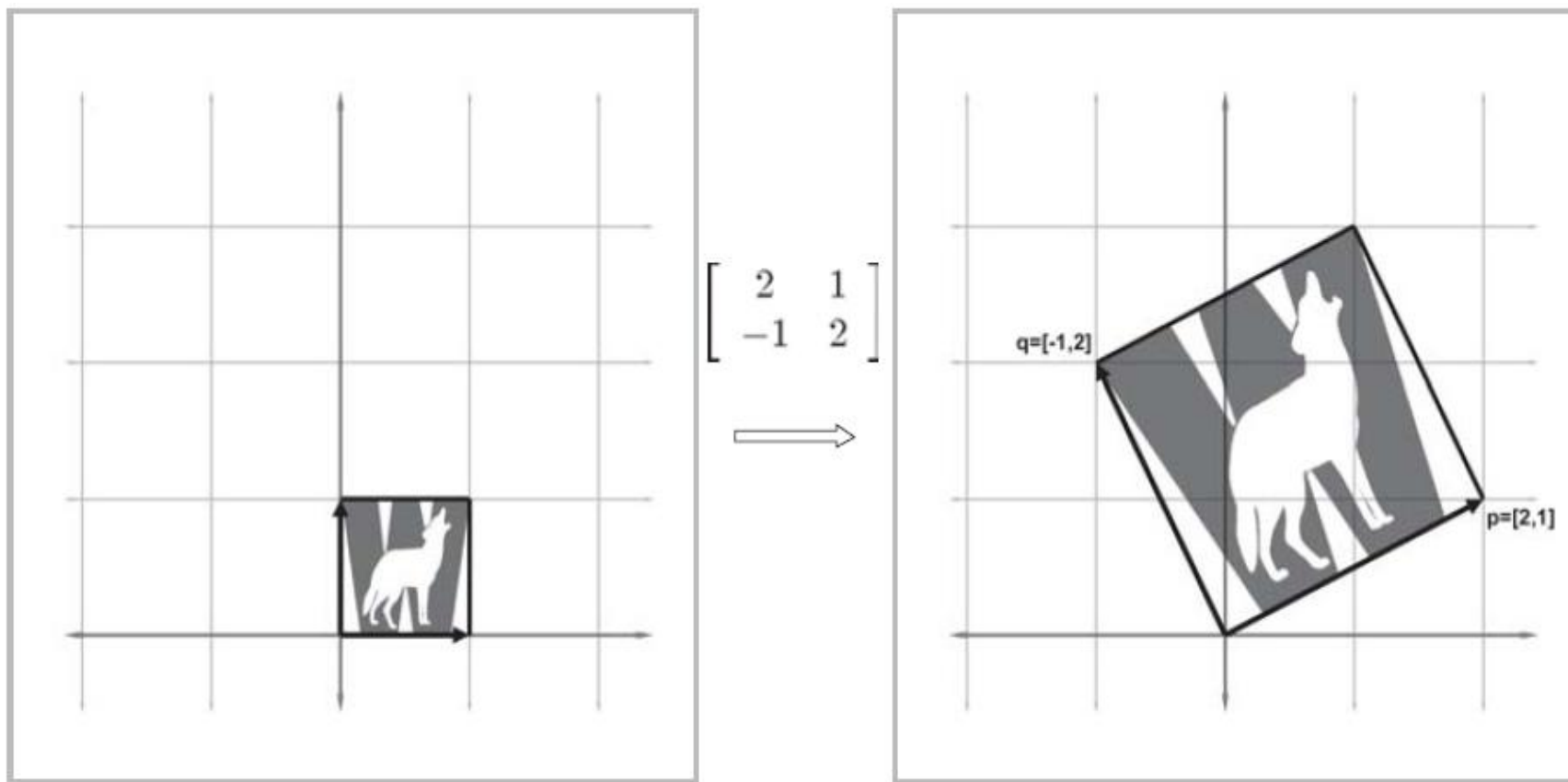


第三章 线性系统的标准型与结构分解

重点内容:

- 1、坐标变换
- 2、结构分解
- 3、单变量标准型
- 4、多变量标准型



思考：空间的概念、空间的变换关系、系统描述与坐标系关系

预备知识

1、线性空间

设 V 是一个非空集合， P 是数域，如果 V 满足下列条件：

(1) 在 V 中定义了加法运算 $\gamma = \alpha + \beta$

(2) 在 V 中定义了一个数量乘法运算

$$\delta = k \cdot \alpha$$

则称 V 是数域 P 上的一个线性空间。

判定一个集合是否是一个线性空间，须满足：

(1) 非空集合；

(2) 定义了“加法运算”和“数乘运算”

线性无关、基、维数 空间 X^n

2、生成空间

设 a_1, a_2, \dots, a_m 是线性空间 X^n 的向量

$$\alpha_i, \quad i = 1, \dots, m \quad \in R \quad m < n$$

形为 $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m$

的全部向量组成如下的集合，记为 $X_a \quad X_a \subset X^n$

X_a 是 X^n 的线性子空间，它由 a_1, a_2, \dots, a_m 张成，

记为 $X_a = \text{Span} \{a_1, \dots, a_m\}$

到此并未要求 a_1, a_2, \dots, a_m 无关。

若 $a'_1, a'_2, \dots, a'_L \quad L \leq m$ 是 a_1, a_2, \dots, a_m 的极大线性无关组

则 $X_a = \text{Span} \{a'_1, \dots, a'_L\} \quad \text{且} \quad \dim X_a = L$

3、直和

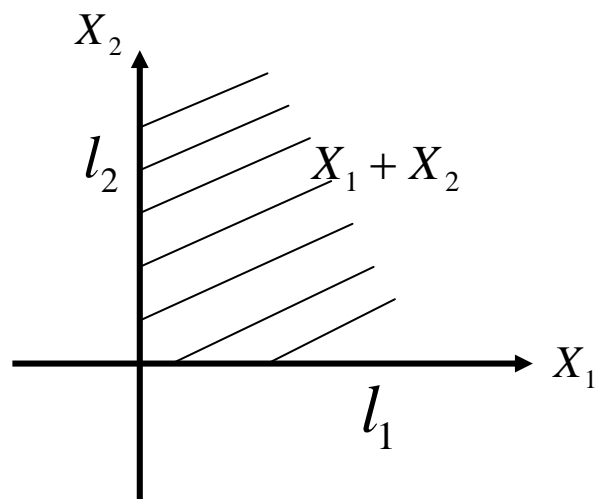
1) 交: 设 X_1, X_2 为 X^n 的两子空间, 同属于 X_1, X_2 的全部向量构成的集合 X_{12} , 称为 X_1, X_2 的交, 记为

$$X_{12} = X_1 \cap X_2 \quad X_{12} \text{ 也是线性空间}$$

2) 和: 设 $a_1 \in X_1, a_2 \in X_2$ 形为 $a = a_1 + a_2$ 的全部向量集合称为 X_1, X_2 的和, 记为

$$X_a = X_1 + X_2 \quad X_a \text{ 是线性空间}$$

和与并的区别 $X_1 + X_2 \neq X_1 \cup X_2$



$X_1 \cup X_2$ 指 l_1, l_2 两条线

例1 求 $X_1 = \text{Span}\{a_1, a_2, a_3\}$ 与 $X_2 = \text{Span}\{a_4, a_5, a_6\}$
的交与和空间

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} \quad a_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(1) 求 $X_1 \cap X_2$

设 $x \in X_1 \cap X_2$, 则 $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$, 使

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 && \in X_1 \\ &= \alpha_4 a_4 + \alpha_5 a_5 + \alpha_6 a_6 && \in X_2 \end{aligned}$$

$$\text{则 } \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 - \alpha_4 a_4 - \alpha_5 a_5 - \alpha_6 a_6 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ -\alpha_4 \\ -\alpha_5 \\ -\alpha_6 \end{bmatrix} = 0$$

验证前4列的 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Rightarrow$ 解空间2维, 即 $X_1 \cap X_2$ 2维

$$\text{令 } \alpha_5 = -1, \quad \alpha_6 = 0$$

$$\rightarrow \alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = -1 \quad \alpha_3 = 2 \quad \alpha_4 = 0$$

$$X_1' = -a_2 + 2a_3 = -a_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \in X_1 \cap X_2$$

$$\alpha_5=0, \alpha_6=2 \rightarrow \alpha_1=\alpha_2=1 \quad \alpha_3=-3 \quad \alpha_4=0$$

$$\text{令 } X_2' = a_2 - 3a_3 = 2a_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix} \in X_1 \cap X_2$$

$$\therefore X_1 \cap X_2 = \text{Span} \{ X_1', X_2' \} = \text{Span} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -6 & 8 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

可通过初等变换化为简单向量

(2) 求 $X_1 + X_2$

$$X_1 + X_2 = \text{Span} \{ a_1, a_2, \dots, a_6 \} \stackrel{a_1, \dots, a_4 \text{ 无关}}{=} \text{Span} \{ a_1, \dots, a_4 \} = X$$

3) 子空间的直和

设 $X_1, X_2 \subset X$, 而 $X_1 \cap X_2 = 0$ 则 $X_1 + X_2$ 是直和, 记为 $X_1 \oplus X_2$

例2 接例1研究

$$a_1, a_4 \text{ 均与 } X_1', X_2' \text{ 线性无关} \quad X_1' = -a_2 + 3a_3 = -a_5$$

$$X_2' = a_2 - 3a_3 = 2a_6$$

$$\therefore \text{Span}\{a_1\} \cap \text{Span}\{X_1', X_2'\} = \text{Span}\{a_1\} \cap \{X_1 \cap X_2\} = 0$$

$$\text{Span}\{a_4\} \cap \text{Span}\{X_1', X_2'\} = \text{Span}\{a_4\} \cap \{X_1 \cap X_2\} = 0$$

则 $\text{Span}\{a_1\}$ 与 $X_1 \cap X_2$ 之和均为直和

$$\text{Span}\{a_4\} \quad X_1 \cap X_2$$

$$\text{即 } X_1 = \text{Span}\{a_1\} \oplus \{X_1 \cap X_2\} \quad X_2 = \text{Span}\{a_4\} \oplus \{X_1 \cap X_2\}$$

$$\text{进而 } X = X_1 + X_2 = \text{Span}\{a_1\} \oplus \text{Span}\{a_4\} \oplus [X_1 \cap X_2]$$

即 X 被分解为子空间 $\text{Span}\{a_1\}, \text{Span}\{a_4\}, [X_1 \cap X_2]$ 直和

一般有 X_1, X_2, \dots, X_k 是 X 的子空间, 如果

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_k \quad \text{则称此为空间的一个分解}$$

4、线性映射, 像空间

$$F : y^m \rightarrow x^n$$

$$X = Ay$$

像

A像的全体构成 X^n 的一子空间, 称A的像空间。

A的像空间为A矩阵列向量所张成的空间。

5、核空间

所有使 $Ay = 0$ 的全体 y 所构成的集合称为 A 的核空间。

记 $\ker A$ $N(A)$

3.1 坐标变换

线性系统的各种标准型，是使用等价变换作为手段，基于如下事实求得。考虑常系数系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Eu \end{cases} \quad (3-1)$$

经 $n \times n$ 非奇异矩阵 P 进行如下变换

$$\tilde{x} = Px \quad (3-2)$$

得到和它代数等价的系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u \\ y = \tilde{C} \tilde{x} + \tilde{E} u \end{cases} \quad (3-3)$$

两式的系数矩阵有如下关系

$$\tilde{A} = PAP^{-1}, \tilde{B} = PB, \tilde{C} = CP^{-1}, \tilde{E} = E \quad (3-4)$$

等价系统之间有性质：

- (1) 能控性、能观性相同；
- (2) 特征值相同，即 $\lambda(A) = \lambda(\tilde{A})$ ；
- (3) 输入输出关系（脉冲响应阵，传递函数阵）相同。

目标是：寻找一个奇异变换，使系统方程变成等价的，适于研究需要的形式。

3.2 线性系统的结构分解

3.2.1 能控子空间

状态空间X中全体能控状态组成的子空间 X_c ，称为能控子空间

定理3.1 能控子空间 $\Leftrightarrow \text{Span}\{B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B\}$

证明：对任一 $x_0 \in X_c$ ，则存在 t_f 和 $u(t)$ ， $t \in [0, t_f]$ 使得：

$$x_0 = - \int_0^{t_f} e^{-At} B u(t) dt$$

设 $e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k$ 凯莱-哈密顿定理

则有

$$\begin{aligned} x_0 &= -\int_0^{t_f} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) (-A)^k B u(t) \right) dt \\ &= B \tilde{u}_0 + AB \tilde{u}_1 + \cdots + A^{n-1} B \tilde{u}_{n-1} \end{aligned}$$

$$\tilde{u}_k = (-1)^k \int_0^{t_f} \alpha_k(t) u(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\therefore x_0 \in \text{Span}\{B \ AB \cdots A^{n-1} B\}$$

$$\text{即 } X_c \subset \text{Span}\{B \ AB \cdots A^{n-1} B\}$$

下面证明: $\text{Span}\{B \ AB \cdots A^{n-1} B\} \subset X_c$

设 $\dim X_c = n_1$, 则有 $n_1 < n$, $n_1 = n$ 两种情况。

(1) $n_1 < n$, 则存在 $n_0 = n - n_1$ 无关向量 g_1, \dots, g_{n_0}

使对任意 $x_0 \in X_c$, 有 $g_1^T x_0 = 0 \cdots g_i^T x_0 = 0 \cdots g_{n_0}^T x_0 = 0$ (*)

即 $\langle g_i, x_0 \rangle = 0$

将 (*) 式代入

$$g_i^T \int_0^{t_f} e^{-At} B u(t) dt = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n_0$$

因为上式对任意 $t_f, u(t)$ 成立, 则 $g_i^T e^{-At} B = 0$

求导至 $n-1$ 次, 并令 $t=0$ 得;

$$g_i^T AB = 0 \quad g_i^T A^2 B = 0 \quad g_i^T A^{n-1} B = 0$$

$$\Rightarrow g_i^T \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore \text{Span} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}$ 的维数小于或等于 $n_1 = n - n_0$

则 $\text{Span} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} \subset X_c$

因为相互包含 $\therefore X_c = \text{Span} \{B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B\}$

(2) 当 $n_1 = n$ 时, 则 $X_c = X$, 显然

$$X_c = \text{Span}\{B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B\} = X$$

定理3.1 能控子空间是A的不变子空间。

显然 $A \text{Span}\{B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B\} \subset \text{Span}\{B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B\}$

3.2.2 系统能控的结构形式

设系统 $S(A, B, C)$ 的能控子空间 X_c , $\dim X_c = n_c$ 且 $n_c < n$, 则有 X_{nc} , $\dim x_{nc} = n' = n - n_c$, 使 $X = X_c \oplus X_{nc}$

在 X_c 中选基底 $e_1^c, \dots, e_{n_c}^c$

在 X_{nc} 中选基底 $e_{n_c+1}^c, \dots, e_n^c$

则 $e_1^c, \dots, e_{n_c}^c, e_{n_c+1}^c, \dots, e_n^c$ 为 X 的一组基底, 以此基底的

坐标记为 \sum_c , 对任一 $x \in X$, 有:

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1^c + x_2 e_2^c + \dots + x_n e_n^c \\ &= \sum_{i=1}^n x_i e_i^c \end{aligned}$$

$$(e_i^c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i \text{ 行})$$

令

$$X_c = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_c} \end{bmatrix} \quad X_{nc} = \begin{bmatrix} x_{n_c+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

定理3.2 在 Σ_c 坐标系下, 系统 S 的状态方程必取如下形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_c \\ \dot{X}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_c \\ X_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3-5)$$

证明: 即证明 $A_{21} = 0, B_2 = 0$

1) 证 $B_2 = 0$

$X_c = \text{Span} \{B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B\} \Rightarrow B$ 的列向量 $\in X_c \Rightarrow$
在 X_{nc} 中分量为 0

故 $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = 0, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \leftarrow n_c$

2) 证 $A_{21} = 0$

在 Σ_c 坐标系下:

$$\begin{aligned} [Ae_1, \dots, Ae_{n_c}^c] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{第 } n_c \text{ 行} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{n_c \times n_c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\because X_c$ 是 A 的不变子空间 $\Rightarrow Ae_i^c \in X_c \quad i = 1, \dots, n_c$

$$\therefore [Ae_1^c \dots Ae_{n_c}^c] = \begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{即 } A_{21} = 0$$

由坐标的选择可知, $X = X_c \oplus X_{nc}$

3.2.3 不能观子空间

定义3.1 (不能观) 对于非零状态 $x_0 \in X$, 若 \exists 有限 $t_f > t_0$ 使 $y(t) \equiv 0$, 称 $[t_0, t_f]$ 上 x_0 为不能观状态。

$$1) x_0 \text{ 为不能观} \Leftrightarrow y(t) = C\Phi(t, t_0)x_0 = 0$$

$$\text{定常下 } Ce^{At}x_0 = 0$$

$$2) \text{ S 完全能观} \Leftrightarrow X_{no} = 0$$

3) 所有不能观状态组成一子空间 X_{no} 是线性空间

定理3.3 X_{no} 为核空间 $\ker C, \ker CA, \dots, \ker CA^{n-1}$ 的交

$$X_{no} = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i$$

证明：证相互包含

$$1) \bigcap_{i=1}^{n-1} \ker CA^i \subset X_{no}$$

$$\text{设任 } x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n-1} \ker CA^i \xrightarrow{\text{核空间定义}} Cx_0 = 0 \quad CAx_0 = 0 \quad \dots \quad CA^{n-1}x_0 = 0$$

而以 x_0 为初态的输出 ($u(t) = 0$)

$$y(t) = Ce^{At}x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k CA^k x_0 = 0$$

$$\therefore x_0 \in X_{no} \rightarrow \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i \subset X_{no}$$

$$2) X_{no} \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i$$

设任一 $x_0 \in X_{no}$, 则 $y(t) = Ce^{At}x_0 = 0$

对该式求直至 $n-1$ 次导数, 且令 $t = 0 \longrightarrow$

$$Cx_0 = 0 \quad CAx_0 = 0 \quad \dots \quad CA^{n-1}x_0 = 0$$

$$\therefore x_0 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker CA^k \rightarrow X_{no} \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i$$

故 $X_{no} = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i$

定理3.4 不能观子空间 X_{no} 是 A 的不变子空间

3.2.4 系统能观的结构形式

定理3.5 在 Σ_0 坐标系下, 系统 S 的状态方程必取如下形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{no} \\ \dot{X}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{no} \\ X_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (3-6)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{no} \\ X_0 \end{bmatrix}$$

证: 省略。

3.2.5 结构分解的变换矩阵

(1) 能控与不能控分解

若 n 维线性定常系统不完全能控，即

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n_c < n$$

则可选出 n_c 个线性无关向量 V_1, V_2, \dots, V_{n_c} ，则

$$X_c = \text{Span} \{V_1, V_2, \dots, V_{n_c}\}$$

经过简化，得到 $e_1^c, e_2^c, \dots, e_{n_c}^c$ 作为 X_c 的一组基底（并不要求是标准正交基）

求不能控部分，使 $X = X_c \oplus X_{nc}$

得到 X_{nc} 的一组基底 $e_{n_c+1}^c, \dots, e_n^c$ ，并且

$$X_{nc} = \text{Span} \{e_{n_c+1}^c, \dots, e_n^c\}$$

所求坐标变换为 $P = [e_1^c, \dots, e_{n_c}^c, e_{n_c+1}^c, \dots, e_n^c]^{-1}$ (3-7)

使用此变换矩阵系统就可以变成 (3-5) 形式

例3 给定线性定常系统

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 1 \quad -1 \quad 2]X$$

化为能控和不能控结构形式

解：求能控子空间

$$X_c = \text{Span} \{B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B\} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow e_1^c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{为 } X_c \text{ 的基}$$

求 X_{nc} 使 $X = X_c \oplus X_{nc}$ ，则：

$$X_{nc} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow e_3^c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_4^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 为 } X_{nc} \text{ 的基} \quad \therefore P = [e_1^c \quad e_2^c \quad e_3^c \quad e_4^c]^{-1}$$

由于 X_{nc} 的选择不唯一，则状态空间 X 的分解不唯一但 (3-5) 的形式不变。

(2) 能观与不能观结构分解

$$S(A, B, C) \text{ 不完全能观} \Rightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n_0 \neq n$$

$$\Rightarrow \text{不能观维数} \quad n_{no} = n - n_0$$

$$\text{设 } x \in X_{n_0} \Rightarrow Cx = 0, CAx = 0, \dots, CA^{n-1}x = 0$$

解方程得到 n_{no} 个线性无关的向量，经过化简设为：

$$e_1^0, e_2^0, \dots, e_{n_{no}}^0, \text{ 则: } X_{n_0} = \text{Span} \{e_1^0, e_2^0, \dots, e_{n_{no}}^0\}$$

$$\text{选取 } e_{n_{no}+1}^0, \dots, e_n^0 \text{ 组成 } X_0, \text{ 使 } X = X_{n_0} \oplus X_0$$

取坐标变换

$$P = [e_1^0, e_2^0, \dots, e_{n_{no}}^0, e_{n_{no}+1}^0, \dots, e_n^0]^{-1}$$

在该坐标变换下系统有 (3-6) 形式。

例4 对例3化为能观与不能观形式

解：求不能观子空间

$$Cx = 0 \quad CAx = 0 \quad CA^2x \quad CA^3x = 0$$

解为

$$e_1^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{no} = \text{Span} \{e_1^0 \ e_2^0\}$$

选 X_0 ，使 $X = X_0 \oplus X_{no}$ ，则 $X_0 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow e_3^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_4^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\text{故 } P = [e_1^0 \ e_2^0 \ e_3^0 \ e_4^0]^{-1}$$

由于 X_0 选取不唯一，则 X 的分解不唯一。

若在4个部分中分别选一组基底，设为

$$X_1 : e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_{n_1} \qquad X_2 : e_{n_1+1} \quad e_{n_1+2} \quad \cdots \quad e_{n_1+n_2}$$

$$X_3 : e_{n_1+n_2+1} \quad \cdots \quad e_{n_1+n_2+n_3} \qquad X_4 : e_{n_1+n_2+n_3} \quad \cdots \quad e_n$$

由这组基底总合构成坐标变换，利用该坐标变换，系统状态方程必化为标准分解形式

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3-8)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

例5 对例3和例4的结果继续分解

$$X_c = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad X_{no} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

因而

$$X_1 = X_c \cap X_{no} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

为 X_1 的基底

$$\therefore X_c = X_1 \oplus X_2$$

$$\therefore X_2 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{又 } \therefore X_{no} = X_1 \oplus X_3$$

$$\therefore X_3 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{由 } X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4$$

$$\text{则 } X_4 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

取坐标变换 $P = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4]^{-1}$

在此坐标变换下

$$\dot{X}^\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X^\Delta + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \ 1 \ 0 \ 2] X^\Delta$$

讨论:

- 1) 空间分解的变换阵不唯一，但分解出的各子空间维数是一致的，且能控（观）因子不变（指各部分的特征值）。
- 2) 空间分解不一定所有空间都有，按定义求空间。

总结:

1. 能控子空间构成 $\text{Span}\{B AB \cdots A^{n-1}B\}$

不能观子空间构成 $X_{no} = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i$

2. 按能控与不能控分解 规范型 变换矩阵求法

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_c \\ \dot{X}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_c \\ X_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

3. 按能观与不能观分解 规范型 变换矩阵求法

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{no} \\ \dot{X}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{no} \\ X_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{no} \\ X_0 \end{bmatrix}$$

4. 按全空间分解 规范型 变换矩阵求法

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

3.3 单变量系统标准型

1、能控标准型

单输入单输出系统可表示为

$$\Sigma: \quad \dot{X} = AX + bu \quad y = cX \quad (3-9)$$

其中 b 是 $n \times 1$ 列向量, c 是 $1 \times n$ 行向量。

假设系统完全能控, 则有属性 $\text{rank} [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b] = n$

令系统的特征多项式为 $\det(sI - A) \stackrel{\Delta}{=} \alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$

定义如下 n 个常数

$$\beta_{n-1} = cb$$

$$\beta_{n-2} = cAb + \alpha_{n-1}cb$$

$$\vdots$$

$$\beta_1 = cA^{n-2}b + \alpha_{n-1}cA^{n-3}b + \dots + \alpha_2cb$$

$$\beta_0 = cA^{n-1}b + \alpha_{n-1}cA^{n-2}b + \dots + \alpha_1cb$$

构造如下的变换矩阵

$$P = [A^{n-1}b, \dots, Ab, b] \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \alpha_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

容易看出， P 是非奇异的。

定理3.6 对完全能控的单输入单输出线性定常系统，通过非奇异变换 $\bar{X} = P^{-1}X$ ，可变成能控标准型

$$\sum_c: \quad \dot{\bar{X}} = A_c \bar{X} + b_c u \quad y = c_c \bar{X} \quad (3-11)$$

其中

$$A_c = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, b_c = P^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

$$c_c = cP = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

证明：略 30

例6 考虑单输入单输出系统

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 1 \quad 1]X$$

解：特征多项式 $\alpha(s) = s^3 - 5s + 4$

β_i 常数

$$\beta_2 = cb = [0 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \quad \beta_1 = cAb + \alpha_2 cb = 4$$

$$\beta_0 = cA^2b + \alpha_2 cAb + \alpha_1 cb = 0$$

利用 (3-12)，可导出系统的能控标准型

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 4 \quad 3] \bar{x}$$

变换矩阵为

$$P = [A^2b \quad Ab \quad b] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

2、能观测规范形

对于系统(3-9), 假设完全能观, 有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

构造如下矩阵 $Q = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cA^{n-1} \\ \vdots \\ cA \\ A \end{bmatrix}$ 很明显, Q 为非奇异阵。

定理3.7 对完全能观测的单输入单输出线性定常系统, 通过非奇异变换 $\hat{x} = Qx$, 可变成能观标准型

$$\sum_0 : \dot{\hat{x}} = A_0 \hat{x} + b_0 u \quad y = C_0 \hat{x} \quad (3-13)$$

其中, $A_0 = QAQ^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ \hline 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{array} \right], b_0 = Qb = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$

$$C_0 = cQ^{-1} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

例7 考虑例6系统，变成能观规范型

解：已知 $\alpha(s) = s^3 - 5s + 4$ $\beta_2 = 3$ $\beta_1 = 4$ $\beta_0 = 0$

利用(3-13)，可得到能观规范型

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 0 \quad 1] \hat{x}$$

变换矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cA^2 \\ cA \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 多输入多输出系统标准型

特点：（1）规范型不唯一

（2）构造变换矩阵较复杂

重点讨论两种标准型：龙伯格标准型和旺纳姆标准型

3.4.1 搜索线性无关列或行的方法

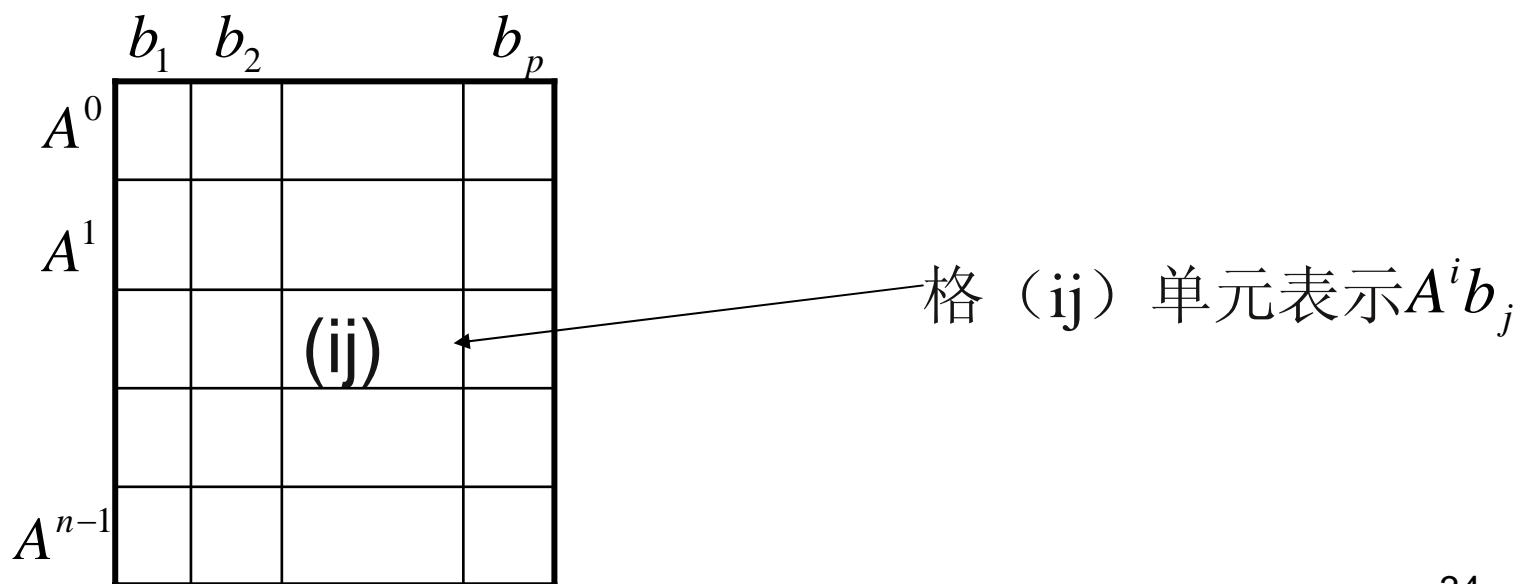
共同性问题：搜索能控性矩阵中的 n 个线性无关列
或能观性矩阵中的 n 个线性无关行。

下面以能控性矩阵 W_c 为例，说明搜索方法。

$$W_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

W_c 为 $n \times pn$ ，从 W_c 中选 n 个线性无关列，有不同选法，

用格栅图表示



方法1 按列搜索格栅

	b_1		b_p
I	×	×	
A	×	×	
A^2	×	×	
	×	0	
	0		
A^{n-1}			

$$\begin{array}{cc}
 b_1 & b_2 \\
 Ab_1 & Ab_2 \\
 \vdots & \vdots \\
 A^{v_1-1}b_1 & A^{v_2-1}b_2
 \end{array}$$

Step1: 从格栅栏第1列开始, 自上往下, 顺序找出所有线性无关的列向量;

Step2: 转入右邻列从上往下继续搜索, 直到找到n个线性无关列向量。

最后排成:

$$\left[b_1 \quad Ab_1 \quad \cdots \quad A^{v_1-1}b_1 \quad b_2 \quad b_2A \quad \cdots \right]$$

不一定用足 b_p

方法2 按行搜索格栅

	b_1	b_2		b_p	
I	×	×	×	0	
A	×	0	×		
A^2	×		0		
	×				
	0				
A^{n-1}					

$$\text{rank } B = r < p$$

Step1: 从格栅栏第1行开始，自左至右，顺序找出所有线性无关的列向量；

Step2: 转入下一行，从左到右搜索，对每格判断列向量和先前的向量组是否相关。若相关，划0，无关画×。若某格已画0，则所在列中位于其下的所有列向量必和先前的列向量相关，该列无需搜索。

Step3: 直到找到n个线性无关列向量，停止。

最后排成： $[b_1 \quad Ab_1 \cdots A^{\mu_1-1}b_1 \cdots b_r \quad Ab_r \cdots b_r A^{\mu_r-1}]$

可以证明 $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$ 为能控性指数。

3.4.2 龙伯格能控标准型

这种标准型在极点配置方面有着很大的用途。下面考虑线性多变量时不变系统

$$\begin{aligned} \Sigma : \quad \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3-14)$$

其中，A为 $n \times n$ 常阵，B为 $n \times p$ 常阵，C为 $m \times n$ 常阵， $\text{rank } B = r$ 。

假设按行搜索，找出 W_c 中 n 个线性无关的列向量，组成非奇异矩阵

$$Q_1 = [b_1 \quad Ab_1 \cdots A^{\mu_1-1}b_1 \quad b_2 \quad Ab_2 \cdots A^{\mu_2-1}b_2 \cdots b_r \quad Ab_r \cdots A^{\mu_r-1}b_r]$$

对 Q_1 求逆，将 Q_1^{-1} 表为

$$P = Q_1^{-1} = \begin{bmatrix} e_{11}^T \\ \vdots \\ e_{1\mu_1}^T \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ e_{r1}^T \\ \vdots \\ e_{r\mu_r}^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} \text{为块矩阵, 每块行数为 } \mu_i, i=1,2,\dots,r$$

在矩阵 \mathbf{P} 中, 取出各个块阵的末行, 即为 $e_{1\mu_1}^T, e_{2\mu_2}^T, \dots, e_{r\mu_r}^T$,

并组成变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} e_{1\mu_1}^T \\ e_{1\mu_1}^T A \\ \vdots \\ e_{1\mu_1}^T A^{\mu_1-1} \\ \dots \dots \\ \vdots \\ \dots \dots \\ e_{r\mu_r}^T \\ e_{r\mu_r}^T A \\ \vdots \\ e_{r\mu_r}^T A^{\mu_r-1} \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

定理3.8 [龙伯格能控标准型] 对完全能控的多变量定常系统 (3-14)，通过非奇异变换 $\hat{x} = Tx$ ，可得到下列龙伯格能控标准型

$$\Sigma_{cL} : \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}_c \hat{x} + \hat{B}_c u \\ y &= \hat{C}_c \hat{x} \end{aligned} \quad (3-16)$$

其中

$$\hat{A}_c = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \cdots & \hat{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{A}_{r1} & \cdots & \hat{A}_{rr} \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \vdots & & & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ * & \vdots & * & \cdots & * \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\hat{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}, \quad i \neq j$$

$$\hat{B}_c = TB = \begin{bmatrix} 0 & & & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 1 & * & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \ddots & & & & \\ & & & 0 & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ & & & 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_c = CT^{-1} \quad \text{无特殊形式}$$

例8 给定线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u, \quad n=3$$

解:

$$W_c = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & -2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -12 & -8 \end{bmatrix}$$

按行搜索, 找出3个线性无关列

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Ab_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{完全能控})$$

$$\text{组成 } Q_1 \quad Q_1 = [b_1 \quad Ab_1 \quad b_2]$$

对 Q_1 求逆, 得

$$P = Q_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -0.5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} e_{12}^T \\ e_{12}^T A \\ e_{21}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -0.5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

利用变换矩阵 T ，可得到龙伯格标准型

$$\begin{aligned} \hat{A}_c = TAT^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -0.5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -0.5 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -19 & 7 & -2 \\ -36 & 0 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\hat{B}_c = TB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -0.5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定理3.9（龙伯格能观标准型）对完全能观的多变量线性定常系统（3-14），利用对偶性原理，可得到龙伯格能观标准型

$$\sum_L : \dot{\bar{x}} = \bar{A}_0 \bar{x} + \bar{B}_0 u \quad (3-17)$$

$$y = \bar{C}_0 \bar{x}$$

其中

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \cdots & \bar{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{A}_{r1} & \cdots & \bar{A}_{rr} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & | & * \\ \hline 1 & & & | & * \\ & \ddots & & | & \vdots \\ & & & 1 & | & * \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}, \quad i \neq j$$

$$\bar{C}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & | & & | & \\ \hline & & & & & \ddots & & \\ \hline & & & & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline * & \cdots & & & & & \cdots & & & & * \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ * & \cdots & & & & & \cdots & & & & * \end{bmatrix}$$

\bar{B}_0 无特殊形式 $n \times m$ $r < m$

系统（3-16）和系统（3-17），存在关系

$$\bar{A}_0 = \hat{A}_c^T \quad \bar{B}_0 = \hat{C}_c^T \quad \bar{C}_0 = \hat{B}_c^T$$

3.4.3 旺纳姆标准型

对于多变量线性定常系统 (3-14)，假设按列搜索方法，找出 W_c 中 n 个线性无关列向量，组成非奇异矩阵

$$Q_1 = [b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{v_2-1}b_2, \dots, b_l, Ab_l, \dots, A^{v_l-1}b_l]$$

其中 $v_1 + v_2 + \dots + v_l = n$

定义基组

(1) 设
$$A^{v_1}b_1 = -\sum_{j=0}^{v_1-1} \alpha_{1j} A^j b_1$$

定义相应的基组
$$\begin{cases} e_{11} = A^{v_1-1}b_1 + \alpha_{1,v_1-1}A^{v_1-2}b_1 + \dots + \alpha_{11}b_1 \\ e_{12} = A^{v_1-2}b_1 + \alpha_{1,v_1-1}A^{v_1-3}b_1 + \dots + \alpha_{12}b_1 \\ \dots \\ e_{1v_1} = b_1 \end{cases}$$

(2) 设
$$A^{v_2}b_2 = -\sum_{j=0}^{v_2-1} \alpha_{2j} A^j b_2 + \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^{v_i} r_{2ji} e_{ij}$$

定义相应的基组
$$\begin{cases} e_{21} = A^{v_2-1}b_2 + \alpha_{2,v_2-1}A^{v_2-2}b_2 + \dots + \alpha_{21}b_2 \\ e_{22} = A^{v_2-2}b_2 + \alpha_{2,v_2-1}A^{v_2-3}b_2 + \dots + \alpha_{22}b_2 \\ \dots \\ e_{2v_2} = b_2 \end{cases}$$

定理3.10 (旺纳姆能控标准型) 对完全能控的多变量线性定常系统, 利用非奇异变换 $\bar{x} = P x$, 可得到旺纳姆能控标准型

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_c \bar{x} + \bar{B}_c u \quad (3-18)$$

$$y = \bar{C}_c \bar{x}$$

其中,

$$\bar{A}_c = P A P^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \cdots & \bar{A}_{1l} \\ & \bar{A}_{22} & \cdots & \bar{A}_{2l} \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{A}_{ll} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\alpha_{i0} & -\alpha_{i1} & \cdots & -\alpha_{i v_i - 1} \end{bmatrix}, \quad i=1,2,\dots,l$$

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} r_{jli} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{jvi} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad j=i+1,\dots,l$$

$$\bar{B}_c = P B = \begin{bmatrix} 0 & & & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & & & \vdots & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ & & & 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

} v_1
} v_l
} 45

} l
} $p-l$

$$\bar{C}_c = c P^{-1} \text{ 无特殊形式}$$

(m \times n)

例9 考虑下列完全能控的线性系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u, \quad n = 3$$

解: $W_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & -2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -12 & -8 \end{bmatrix}$

按列搜索3个线性无关列

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Ab_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A^2b_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$A^3b_1 = \begin{bmatrix} 46 \\ -30 \\ -31 \end{bmatrix} = -(\alpha_{12}A^2b_1 + \alpha_{11}Ab_1 + \alpha_{10}b_1) = -\alpha_{12} \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ -12 \end{bmatrix} - \alpha_{11} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha_{10} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{导出 } \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -7 & -1 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{10} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 46 \\ -30 \\ -31 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -7 & -1 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 46 \\ -30 \\ -31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -15 \end{bmatrix}$$

定义基组

$$e_{11} = A^2 b_1 + \alpha_{12} A b_1 + \alpha_{11} b_1 = \begin{bmatrix} 18 \\ -3 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$e_{12} = A b_1 + \alpha_{12} b_1 = \begin{bmatrix} -12 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad e_{13} = b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = [e_{11} \quad e_{12} \quad e_{13}]^{-1} = \begin{bmatrix} 18 & -12 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ -18 & -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

利用 (3-18), 可求出

$$\bar{A}_c = P A P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \bar{B}_c = P B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{36} \\ 0 & \frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{旺纳姆标准型 } \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & 2 & 4 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{36} \\ 0 & \frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} u$$

定理3.11 [旺纳姆能观标准型] 对完全能观的多变量线性定常系统，利用对偶性原理，可导出下列旺纳姆能观标准型为

$$\begin{aligned} \Sigma_{ow} : \dot{\hat{x}} &= \hat{A}_o \hat{x} + \hat{B}_o u \\ y &= \hat{C}_o \hat{x} \end{aligned} \quad (3-19)$$

其中

$$\hat{A}_o = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & & & & \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \hat{A}_{l1} & \hat{A}_{l2} & \cdots & \hat{A}_{ll} & \end{bmatrix} \quad \hat{A}_{ii} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{io} \\ \hline 1 & & & -\alpha_{i1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{iv_i-1} \end{array} \right], \quad i=1,2,\dots,l$$

$$\hat{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \rho_{i1j} & \cdots & \rho_{iv_i j} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad j=1,2,\dots,i-1$$

\hat{B}_o 无特殊形式

$$\hat{C}_o = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & \ddots & & & \\ \hline & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline * & & \cdots & & & \cdots & & * \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ * & & \cdots & & & \cdots & & * \end{bmatrix}$$

知识点:

1、线性系统等价坐标变换关系式，性质

2、结构分解

(1) 能控子空间，不能观子空间，概念与求法

(2) 按能控与不能控、能观与不能观、全空间结构分解
规范型与求法

3、单变量标准型

能控标准型、能观标准型

4、多变量标准型

龙伯格标准型（按行）、旺纳姆标准型（按列）

习题:

1. p212, 4. 11

2. P212, 4. 13

3. 将系统化为全空间的标准结构形式

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 3 \\ -5 & -1 & -5 & 5 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} U$$

$$Y = [1 \quad 2 \quad 1 \quad -2]X$$