

# 热环境下夹芯梁声振特性的理论与数值研究

李欢 耿谦 李跃明

(西安交通大学 机械结构强度与振动国家重点实验室 710049 西安)

**摘要:** 针对均匀升温热环境下夹芯梁的声振特性进行了研究。建立了考虑热应力、横向剪切效应、转动惯量影响的夹芯梁振动方程, 获得了简支夹芯梁在热环境下振动响应的理论解; 通过瑞利积分得到远场声压。结果表明, 夹芯梁内存在热应力时, 各阶固有频率均下降, 速度、辐射声压级、声功率响应曲线均向低频方向漂移, 声辐射效率变化不明显。通过与数值仿真结果对比, 验证了本文的热预应力夹芯梁声振耦合响应理论分析方法的可行性。此外, 本文还分析了不同芯材厚度和弹性模量对夹芯梁声振特性的影响。研究发现, 芯层增厚或者软化均会降低整个结构的刚度。

**关键词:** 热环境; 声振特性; 夹芯梁

**中图分类号:** V414.2; O326 **文献标识码:** A **DOI:** 10.11776/cjam.32.01.C001

## 1 引言

高超声速飞行器运行时受气动加热作用, 常处于极端热环境中, 结构特性会产生一系列变化<sup>[1]</sup>。为准确预测结构服役特性, 需考虑热环境的影响。

针对热环境下结构的声振特性, 文献[2]以某飞行器为对象, 采用数值方法考察了热应力对结构及其内腔声-振耦合特性的影响。文献[3]根据材料物理性质随温度的变化规律, 对飞行器结构声振耦合特性在热环境下的响应开展研究。文献[4-8]运用 ANSYS 和 SYSNOISE 先后对热环境下具有粘性阻尼芯材的夹芯梁<sup>[4]</sup>、各向同性矩形板<sup>[5]</sup>、纤维增强复合材料板<sup>[6]</sup>、具有粘滞阻尼的多层三明治板<sup>[7]</sup>及各向同性圆柱壳结构<sup>[8]</sup>的声振响应进行了数值分析, 但没有提供相应的理论研究和实验验证。文献[9]对热环境下各向同性矩形薄板的声振特性开展了理论研究并进行了数值验证。由于夹芯结构的

比强度和比模量高、耐高温性能好、耐疲劳性能优越<sup>[10]</sup>, 在航天航空领域内被广泛使用。夹芯梁作为基本组成结构, 研究其在热环境下的响应特性对飞行器声振特性设计、结构减重等方面具有一定实际意义。

本文对热环境下夹芯梁的声振特性开展分析。考虑热应力的影响, 以简支边界条件下的夹芯梁为对象, 建立了振动方程, 并进行动力学和声场响应求解。通过相应的有限元分析, 验证了本文给出的理论解的有效性。另外, 通过对不同芯材厚度及弹性模量的分析, 考察芯材变化对夹芯梁声振特性的影响。

## 2 理论分析

考虑横向剪切效应和转动惯量的影响, 建立夹芯梁在热环境下的振动方程, 求解位移响应和速度响应, 并使用瑞利积分得到声场响应。

## 2.1 夹芯材料简支梁在热环境下的振动响应

以两端不可滑动的简支夹芯梁为研究对象, 图 1 为其截面<sup>[11]</sup>。其截面关于  $z$  轴对称, 分为三层, 上下表层为面板材料, 中间层为夹芯材料。

设夹芯材料弹性模量为  $E_0$ 、剪切模量为  $G_0$ 、热膨胀系数为  $C_0$ 、密度为  $\rho_0$ ; 面板材料的弹性模量为  $E_1$ 、剪切模量为  $G_1$ 、热膨胀系数为  $C_1$ 、密度为  $\rho_1$ 。下标 0 和 1 分别表示芯层和面板。由此可得梁抗弯刚度、横截面惯性矩、密度、剪切模量为

$$EI = \int_A E_{xy} y^2 dA = \frac{1}{12} E_1 b h^3 \left[ 1 - \left( \frac{h_0}{h} \right)^3 + \left( \frac{E_0}{E_1} \right) \left( \frac{h_0}{h} \right)^3 \right] \quad (1)$$

$$\rho I = \int_A \rho_{xy} y^2 dA = \frac{1}{12} b h^3 \left[ \rho_1 - \rho_1 \left( \frac{h_0}{h} \right)^3 + \rho_0 \left( \frac{h_0}{h} \right)^3 \right] \quad (2)$$

$$\rho = \frac{\rho_0 h_0 + \rho_1 (h - h_0)}{h} = \rho_1 + (\rho_0 - \rho_1) \frac{h_0}{h} \quad (3)$$

$$G = \frac{G_0 h_0 + G_1 (h - h_0)}{h} = G_1 + (G_0 - G_1) \frac{h_0}{h} \quad (4)$$

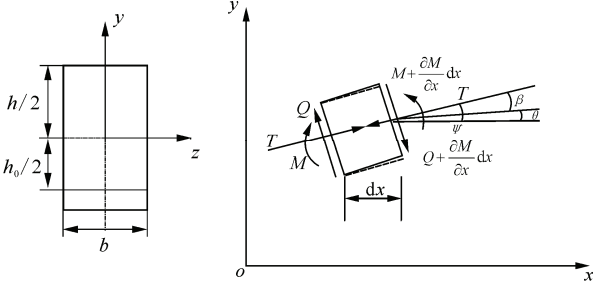


图1 夹芯梁截面  
Fig.1 Cross-section of the sandwich beam

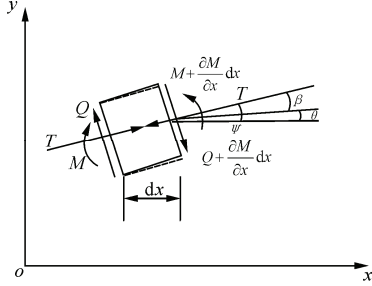


图2 热应力下梁微元体振动受力图  
Fig.2 Force diagram of the element body of the thermally loaded beam

在均匀温度场下, 将热应力等效为沿梁长均匀分布的轴力, 梁微元体振动受力如图 2 所示。

夹芯梁微段在外激励  $p$  作用下的横向运动方程可表示为

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ k'AG \left( \psi - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] = p(x, t) \quad (5)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k'AG \psi - k'AG \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

其中:  $A$  为梁截面面积;  $F$  为热环境变化导致的轴向力;  $k'$  表示剪切变形效应的系数;  $Q$  为横向剪力;  $\beta$  为剪切引起的梁轴线转角, 且  $\beta = k'Q/AG$ ;  $\psi$  为弯曲引起的梁轴线转角;  $\theta$  为  $\beta$  与  $\psi$  的差值。

当  $F=0$  时, 式(6)退化为无热应力情况下的振动方程。联立式(5)和式(6), 消去转角项, 可得

$$a \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - c \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + d \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + e \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = f \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - g \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + hp \quad (7)$$

其中

$$a = \frac{EI k'AG}{F + k'AG}, \quad b = k'AG - \frac{k'^2 A^2 G^2}{F + k'AG},$$

$$c = \frac{\rho I k'AG + EI \rho A}{F + k'AG}, \quad d = \frac{k' \rho A^2 G}{F + k'AG}, \quad e = \frac{\rho^2 I A}{F + k'AG},$$

$$f = \frac{\rho I}{F + k'AG}, \quad g = \frac{EI}{F + k'AG}, \quad h = \frac{k'AG}{F + k'AG}$$

令式(7)右端为零, 即得梁的自由振动方程为

$$a \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - c \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + d \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + e \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (8)$$

可由式(8)求出梁的固有频率。

采用分离变量法求解, 则有

$$y_m = A_m \sin \left( \frac{m\pi}{l} x \right) \sin \omega_m t \quad (9)$$

将式(9)代入式(8)可得

$$a \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 - (b + c \omega_m^2) \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 - d \omega_m^2 + e \omega_m^4 = 0 \quad (10)$$

$$\omega_m^2 = \frac{c \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 + d}{2e} - \frac{\sqrt{\left[ c \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 + d \right]^2 - 4e \left[ a \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 - b \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \right]}}{2e} \quad (11)$$

将强迫振动的位移响应按照正则振型函数展开, 则有

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(x) \eta_m(t) \quad (12)$$

式中:  $Y_m$  为振型函数;  $\eta_m(t)$  为正则坐标。将式(12)代入式(7)可得

$$a \sum_{m=1}^{\infty} Y_m^{(4)}(x) \eta_m(t) + b \sum_{m=1}^{\infty} Y_m^{(2)}(x) \eta_m(t) - c \sum_{m=1}^{\infty} Y_m^{(2)}(x) \eta_m^2(t) + d \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(x) \eta_m^2(t) + e \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(x) \eta_m^4(t) = f \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - g \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + hp \quad (13)$$

上式两端同乘以  $Y_n$ , 根据正交性条件化简可得

$$\left[ a \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 - b \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \right] \eta_n(t) + \left[ c \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 + d \right] \eta_n^{(2)}(t) + e \eta_n^{(4)}(t) = \int_0^l \left( f \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - g \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + hp \right) Y_n(x) dx \quad (14)$$

求解上式，可得梁的振动响应。

### 2.2 声场分析

根据瑞利积分<sup>[12]</sup>计算远场声压，则有

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{j\omega\rho_a}{2\pi} e^{j\omega t} \int_s \frac{\tilde{v}_n(\mathbf{r}_s) e^{-jkR}}{R} dS \quad (15)$$

其中： $\rho_a$  为声介质密度； $\mathbf{r}$  为考察点的位置向量； $\mathbf{r}_s$  为梁表面积分微元的位置向量； $\tilde{v}_n$  为该微元的法向速度； $R$  为声压观测点与积分点间的距离； $k$  为波数，且  $k = \omega / c$ 。

## 3 算例分析及验证

### 3.1 热载对夹芯梁振动特性的影响

针对具体夹芯梁结构进行分析，选取梁长为 0.5m、总高度为 0.02m、芯层高度为 0.018m、梁宽度为 0.04m。热环境为均匀温度场，初始温度为 0℃，温度载荷分别选取 20℃、40℃、60℃。

首先考察夹芯梁在不同温度时的固有振动特性，再分析其受迫振动响应及声辐射响应特性。设外激励(简谐激励)作用在梁长的 7/8 处，激励频率范围为 1~2000Hz，观察激励作用点处的振动响应以及该点正上方 1.5m 处远场空间点的声压响应。梁所选用材料参数如表 1 所示。

表 1 夹芯梁材料常数

Tab.1 Material properties of the sandwich beam components

夹芯梁组成 (component)	弹性模量 (elastic modulus)/ GPa	密度 (density)/ kg·m <sup>-3</sup>	泊松比 (Poisson's ratio)	热膨胀系数 (thermal expansion coefficient)/℃ <sup>-1</sup>
面层 (sheet)	70	2700	0.29	2.3×10 <sup>-5</sup>
夹芯 (core)	7	2700	0.29	2.3×10 <sup>-5</sup>

由受迫振动响应可得

表 2 夹芯梁固有频率(Hz)

Tab.2 Natural frequencies of sandwich beam (Hz)

阶次 (order)	T=0℃		T=20℃		T=40℃		T=60℃	
	Nastran	理论解 (theory)	Nastran	理论解 (theory)	Nastran	理论解 (theory)	Nastran	理论解 (theory)
1	107.8	107.8	96.6	96.9	83.9	84.5	69.0	69.9
2	425.8	425.3	414.4	415.4	403.3	404.7	391.7	393.7
3	938.3	936.0	924.9	928.1	913.7	917.9	902.4	907.6
4	1622.9	1615.4	1604.0	1613.0	1592.6	1603.1	1581.1	1593.2
5	2453.8	2435.5	2423.8	2444.3	2412.0	2434.7	2400.1	2425.1

由计算结果可知：随着温度升高，夹芯梁各阶固有频率均降低，这是由热压应力对结构刚度的折减作用引起的；各温度载荷下，理论方法与数值计

$$\eta_n(t) = \frac{\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{7n\pi}{8} \left[ h - f\omega^2 - g \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \right]}{e\omega^4 - \left[ c \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 + d \right] \omega^2 + a \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 - b \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2} \sin \omega t \quad (16)$$

数值模拟采用商用软件 Nastran 计算固有特性，再用 VA One 计算振动及声响应。数值分析模型见图 3。在有限元分析中，首先进行热弹性静力分析，将夹芯梁上由温度变化产生的热应力视为结构的初始应力，由该热预应力得到结构的应力刚度  $K_\sigma$ ，将此应力刚度叠加至结构的原有刚度，可得结构在热载荷作用下的整体刚度。结构热应力刚度矩阵可由单元应力刚度矩阵获得，即

$$K_\sigma = \sum_m \int_{A_m} \mathbf{H}^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \mathbf{H} dA \quad (17)$$

其中： $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_{xy}$  为单元内的热致薄膜力； $\mathbf{H}$  为几何矩阵。在此基础上，进行有预应力作用的结构动态特性分析，其控制方程为

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + (K + K_\sigma)u = f \quad (18)$$

由此可得结构在热应力作用下的固有振动及受迫振动响应特性。本文在有限元模拟中采用 8×50 个四节点板单元(CQUAD4)近似模拟夹芯梁结构，给有限元网格赋予层合属性，分别定义表板及芯层材料。

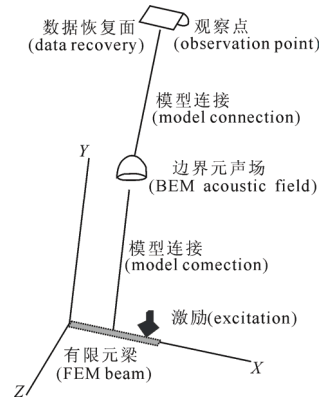


图 3 数值分析模型

Fig.3 FEM/BEM model for numerical simulation

夹芯梁固有频率的理论数值仿真结果对比如表 2 所示。

算结果得到的各阶固有频率吻合较好。

图 4 为各温度载荷作用下夹芯梁的振动速度  $v$  和声压响应理论解。图 4(a)表明，当温度载荷升高

时振动速度响应曲线波峰均向低频漂移, 各共振峰均向低频方向移动。图 4(b)表明, 当温度载荷升高时, 声压响应曲线波峰均向低频漂移。速度响应曲线与声压曲线波峰出现位置相同, 即在共振频率处出现声压峰值。由于当激励频率达到共振频率时, 速度响应达到最大; 又由瑞利积分可知, 声压与结构振动速度直接相关, 因此当振动速度响应达到最大值时声压响应达到峰值。

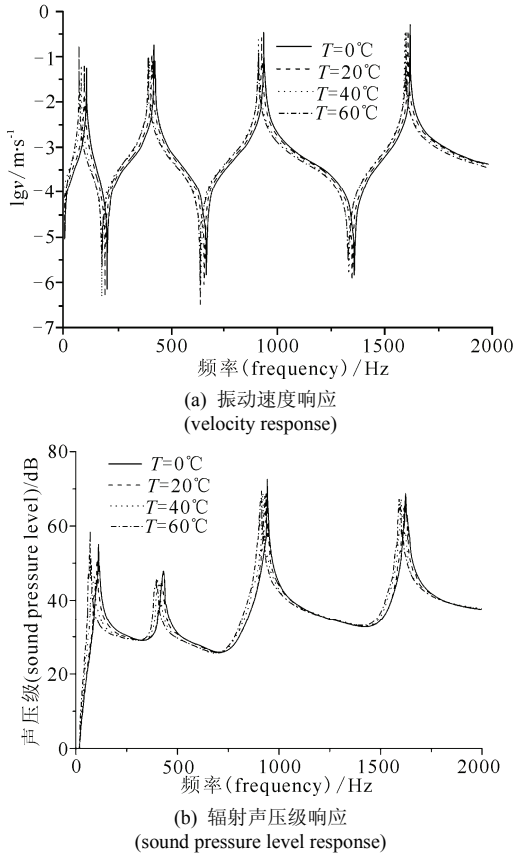


图 4 夹芯梁速度及声压级响应随温度的变化  
Fig.4 Velocity and sound pressure level response of sandwich beam at different temperature

图 5 为夹芯梁的声功率  $P$  和声辐射效率响应曲线。由计算结果可知, 结构的声辐射功率在共振频率处达到极值, 可知结构的声辐射功率主要由结构的共振模态产生。在热环境中, 当温度载荷升高时, 结构的声辐射功率峰值向低频漂移, 与声压曲线趋势相似。由声辐射效率曲线可发现, 声辐射效率随激励频率升高而增大, 并且由温度载荷导致的热应力对声辐射效率的影响很小, 最大相对变化量约为 5%。在远离共振频率处, 结构热应力对结构的共振频率几乎没有影响; 在共振频率附近, 热应力的增加会导致声辐射效率的细微下降。

图 6 为 60°C 热载荷作用下, 振动速度和声场声压响应理论分析和数值计算对比情况。结果表明, 二者吻合很好, 波峰出现位置相同, 波峰幅值也比较接近。这说明将热应力视为初始应力来求解热环境下声振问题的数值方法是可行的。

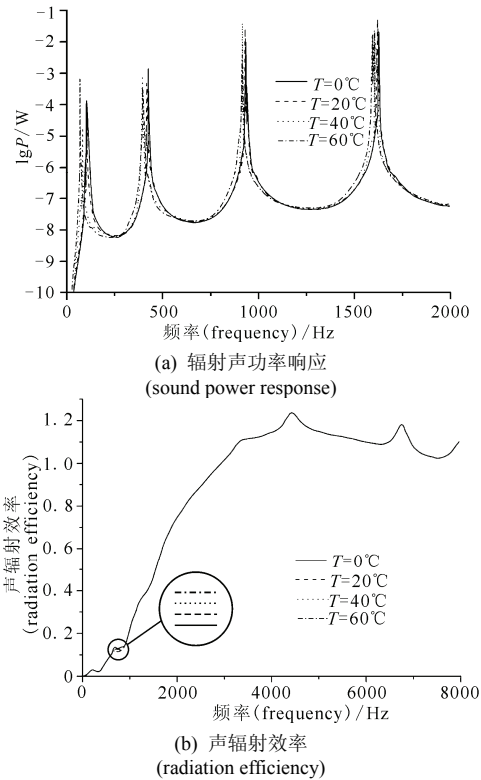


图 5 不同温度时夹芯梁的声功率和声辐射曲线  
Fig.5 Sound power and radiation efficiency of sandwich beam at different temperature

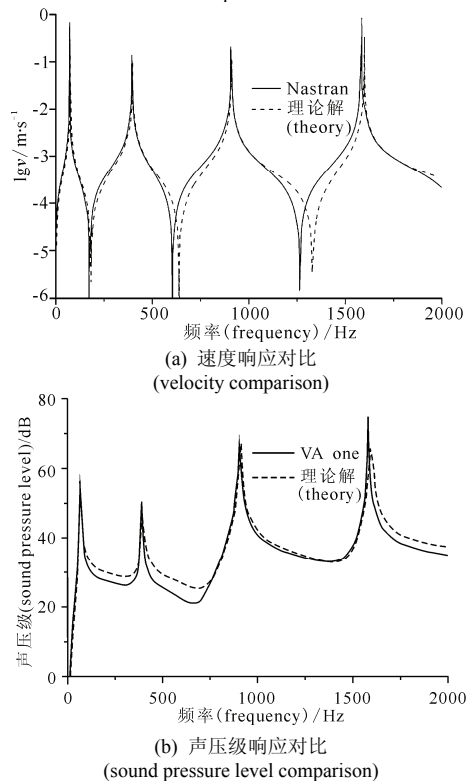


图 6 60°C 时夹芯梁速度响应和声压响应  
Fig.6 Velocity and sound pressure level response of sandwich beam at 60°C

### 3.2 芯材厚度对夹芯梁振动特性的影响

为考察夹芯梁的夹芯厚度对声振特性的影响, 令



梁总高度为 0.02m 保持不变, 芯层厚度分别选取 0.018m、0.01m、0m 进行计算, 设温度载荷为 20℃。材料常数如表 1 所示。其中当芯层厚度为 0m 时, 夹芯厚度为零, 即退化为各向同性实体梁。不同厚度夹芯梁的速度和声压响应如图 7 所示, 声功率和声辐射效率响应如图 8 所示。

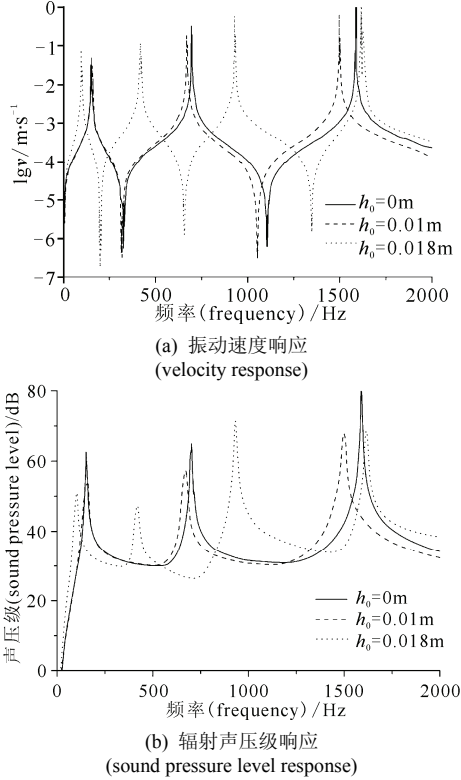


图 7 20℃时不同厚度夹芯梁速度响应和声压响应

Fig. 7 Velocity and sound pressure level response of sandwich beams with different thickness at 20℃

由计算可知, 当夹芯材料厚度增加, 速度响应、声压响应和声功率曲线波峰均向低频漂移, 第一个波峰偏移位置较小, 第二个、第三个波峰偏移位置较大。芯材厚度对夹芯梁的声辐射效率影响比较大, 在 1~2000Hz 频段, 夹芯材料厚度越大, 声辐射效率则越低; 在 2000Hz 附近, 声辐射效率曲线交汇, 芯材厚度对夹芯梁声辐射效率影响很小; 在交汇点之后, 声辐射效率随芯材厚度变化的规律不明显; 声辐射曲线的极值出现在 4500Hz 附近, 在极值点频率之后声辐射效率下降平缓。

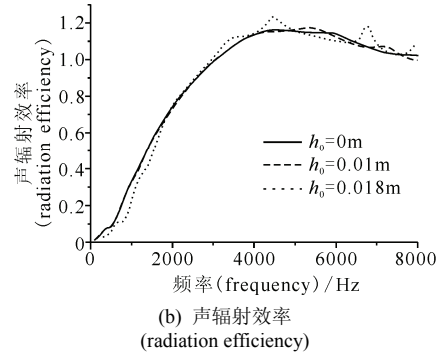
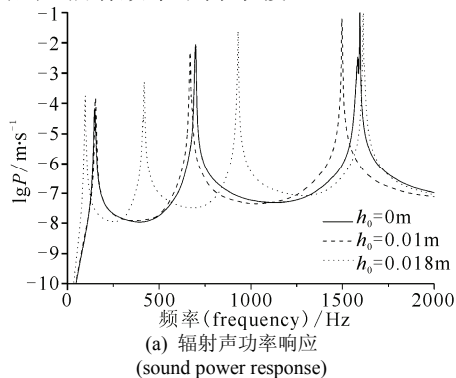


图 8 20℃时不同厚度夹芯梁声功率和声辐射效率曲线

Fig. 8 Sound power and radiation efficiency of sandwich beams with different thickness at 20℃

### 3.3 芯材材料弹性模量对夹芯梁振动特性的影响

夹芯梁的力学性能与芯材的材料弹性模量相关。为此, 通过改变芯材的弹性模量来考察热环境下夹芯梁的夹芯材料属性对声振特性的影响。材料常数如表 1 所示, 令芯层弹性模量分别为 7GPa、10GPa、40GPa、70GPa 进行计算。设温度载荷为 20℃, 固定夹芯梁高度为 0.02m 及芯层高度为 0.018m 保持不变。夹芯梁的速度和声压响应如图 9 所示, 声功率和声辐射效率响应如图 10 所示。

计算结果表明, 当夹芯材料弹性模量降低时, 速度响应、声压响应、声功率曲线波峰均向低频漂移, 第一个波峰偏移位置较小, 第二个、第三个波峰偏移位置较大。芯材弹性模量对夹芯梁的声辐射效率影响比较大, 在 1~2000Hz 阶段, 夹芯材料弹性模量越大, 声辐射效率越高; 在 2000Hz 附近, 声辐射效率曲线交汇, 此时芯材弹性模量对夹芯梁声辐射效率影响很小; 在交汇点之后, 声辐射效率随芯材模量变化的规律不明显; 声辐射曲线的极值出现在 4500Hz 附近, 在极值点频率之后, 声辐射效率下降平缓。综上所述, 改变芯材弹性模量或芯材厚度对夹芯梁的声振特性影响是相似的, 加大芯材厚度和减小芯材弹性模量都会使夹芯梁弯曲刚度降低, 导致夹芯梁的固有频率降低, 速度响应曲线、声压曲线、声功率曲线波峰向低频漂移。在结构设计中, 为了达到特定的声振特性, 可以通过改变芯材弹性模量和改变芯材厚度两种方式实现。

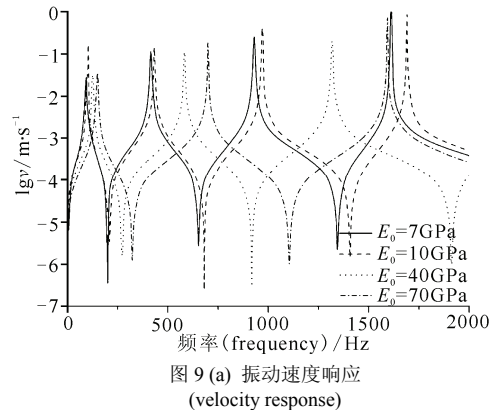


图 9(a) 振动速度响应

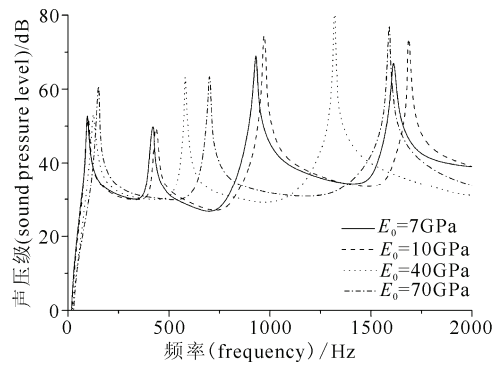
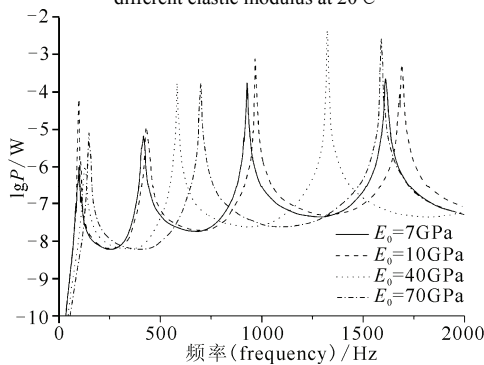


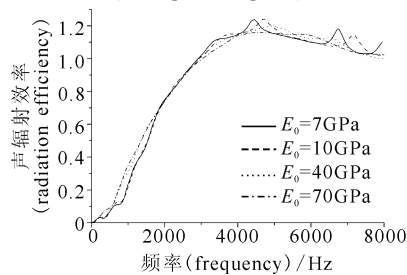
图9 (b) 辐射声压级响应  
(sound pressure level response)

图9 20℃时芯材弹性模量变化时的速度响应和声压响应

Fig.9 Velocity and sound pressure level response of sandwich beams with different elastic modulus at 20℃



(a) 辐射声功率响应  
(sound power response)



(b) 声辐射效率  
(radiation efficiency)

图10 20℃时芯材弹性模量变化时的声功率和声辐射效率曲线

Fig.10 Sound power and radiation efficiency of sandwich beams with different elastic modulus at 20℃

## 4 结 论

热环境下结构刚度发生变化, 会对结构动态特性产生影响。本文对热应力作用下简支夹芯梁的声振特性进行了理论研究, 并与数值计算结果进行了比较, 得出以下结论。

- 1) 热作用下梁各阶固有频率值均下降, 速度响应和辐射声压响应均向低频方向漂移。
- 2) 热应力对声辐射效率的影响很小, 在共振频率附近, 热应力会导致声辐射效率的细微下降。
- 3) 芯材厚度增加或芯材弹性模量降低时, 夹芯梁各阶固有频率下降, 速度响应、声压响应、声功率曲线均向低频漂移。

## 参 考 文 献 (References)

- [1] 杨超, 许赞, 谢长川. 高超声速飞行器气动弹性力学研究综述[J]. 航空学报, 2010, 31(1): 1-11. (Yang Chao, Xu Yun, Xie Changchuan. Review of studies on aeroelasticity of hypersonic vehicles[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2010, 31(1): 1-11 (in Chinese)).
- [2] 耿谦, 李跃明, 杨雄伟. 热应力作用下结构声-振耦合响应数值分析[J]. 计算力学学报, 2012, 29(1): 99-104. (Geng Qian, Li Yueming, Yang Xiongwei. Vibro-acoustic numerical analysis of thermally stressed aircraft structure[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2012, 29(1): 99-104 (in Chinese)).
- [3] 杨雄伟, 李跃明, 闫桂荣. 考虑材料物性热效应飞行器声振耦合动态特性分析[J]. 固体力学学报, 2010, 31(S1): 134-142. (Yang Xiongwei, Li Yueming, Yan Guirong. Vibro-acoustic dynamic analysis of aircraft with temperature-dependent material property[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2010, 31(S1): 134-142 (in Chinese)).
- [4] Ganesan N, Pradeep V. Buckling and vibration of sandwich beams with viscoelastic core under thermal environments[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 286(4): 1067-1074.
- [5] Jeyaraj P, Padmanabhan C, Ganesan N. Vibration and acoustics response analysis of an isotropic plate under a thermal environment[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2008, 130: 1-6.
- [6] Jeyaraj P, Ganesan N, Padmanabhan C. Vibration and acoustic response of a composite plate with inherent material damping in a thermal environment[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 320: 322-338.
- [7] Jeyaraj P, Padmanabhan C, Ganesan N. Vibro-acoustic behavior of a multilayered viscoelastic sandwich plate under a thermal environment[J]. Journal of Sandwich Structures and Materials, 2011, 13(5): 509-537.
- [8] Jeyaraj P, Padmanabhan C, Ganesan N. Vibro-acoustic response of a circular isotropic cylindrical shell under thermal environment[J]. International Journal of Applied Mechanics, 2011, 3(3): 525-541.
- [9] Geng Qian, Li Yueming. Analysis of dynamic and acoustic radiation characters for a flat plate under thermal environments[J]. International Journal of Applied Mechanics, 2012, 4(3): 1-16.
- [10] 吴林志, 洋世东. 夹芯结构的设计及制备现状[J]. 中国材料进展, 2009, 28(4): 40-45. (Wu Linzhi, Pan Shidong. Survey of design and manufacturing of sandwich structures[J]. Materials China, 2009, 28(4): 40-45 (in Chinese)).
- [11] Carrera E, Brischetto S. A Survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates[J]. Applied Mechanics Reviews Transactions of ASME, 2009, 62(1): 1-17.
- [12] Fahy F, Gardonio P. Sound and structural vibration: radiation, transmission and response[M]. 2nd ed. Boston: Academic Press, 2007.