

基于 POD 降阶模型的气动弹性快速预测方法研究

陈 刚¹, 李跃明¹, 闫桂荣¹, 徐 敏², 曾宪昂²

(1 西安交通大学强度与振动教育部重点实验室, 西安 710049; 2 西北工业大学航天学院, 西安 710072)

摘 要: CFD/CSD 耦合数值模拟是解决复杂气动弹性问题精度最高的方法, 但同时也是计算效率最低的方法。研究了气动弹性系统的时域 POD 降阶模型方法, 并引入平衡截断技术进一步降低时域 POD/ROM 的阶数, 从而有效克服了时域 POD/ROM 阶数过高的缺点。以 AGARD445 6 机翼为例, 说明了时域 POD/ROM 建模的各个细节, 并将其用于气动弹性动响应及颤振边界的预测。计算结果表明, POD/ROM 具有接近 CFD/CSD 耦合计算的精度, 同时又大大提高了计算效率约 1 到 2 个量级。

关键词: 降阶模型; 正则正交分解; 平衡截断; 计算气动弹性

中图分类号: V411.3 文献标识码: A 文章编号: 1000-1328(2009)05-1765-05

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2009.05.004

0 引言

随着计算气动弹性力学的发展, 可以直接在时域预测飞行器任意运动下气动弹性响应, 避免了有理函数逼近所需的频域到时域的变换和不能很好描述非线性响应的不足。但是, 直接利用 CFD/CSD 技术在时域进行系统分析与综合也产生了一些问题。主要是 CFD/CSD 耦合计算时间耗费太大。特别是对于需要反复迭代修改的多学科优化初步设计阶段, 其计算量更为巨大, 很不便于应用。为了解决这个问题, 美国在 20 世纪 90 年代后期提出了建立非定常气动力降阶模型 ROM (Reduced Order Model ROM) 的想法^[1]。ROM 强调建立一个简单的数学模型, 该模型即以较高精度反映气动弹性系统的主要动力学特性, 计算量不太大, 又能够方便地用于多学科优化的初步设计阶段。该思想提出后立刻就得到了学术界和工程界的广泛关注, 成为目前计算气动弹性领域的一个研究热点^[2]。

基于正则正交分解 (Proper Orthogonal Decomposition, POD) 的 POD/ROM 是目前最受关注的降阶模型方法。Lumley^[3] 首先将 POD 方法应用于流体力学中来研究湍流。Ramanowski^[4] 和 Dowell^[5] 将 POD 应用到时域离散 Euler 方程和频域 Euler 方程中进行二维翼型的气动弹性降阶, 阐述了计算气动弹性

力学框架下的 POD/ROM 建模方法。很快 POD/ROM 就被推广到三维机翼^[6] 和复杂外形的全机气动弹性分析^[2,7]。随后 POD 方法开始用于非线性气动弹性例如跨音速壁板的非线性颤振特性^[8] 和极限环的预测^[9]。由于计算量、模型阶数和实现难度相对较小, 目前研究较多的是频域 POD/ROM。但是时域 POD/ROM 能够捕捉更多的流场信息, 对流场参数变化具有更强的鲁棒性, 这在设计气动弹性系统的主动控制律时具有较强的优势。本文研究时域 POD/ROM 建模方法, 并利用控制理论中的平衡截断 (Balanced Truncation, BT) 技术对时域 POD/ROM 进行进一步的降阶, 从而克服其相对于频域 POD/ROM 阶数过高的缺点, 使之获得与频域 POD/ROM 相当的性能。

1 POD 理论

POD 方法是要利用 n 维空间 $\Omega \in R^{n \times n}$ 中的一组数据集 $\{x^k\}$, $x^k \in R^n$ (称之为快照, snapshot) 来寻找一个 m ($m \ll n$) 维正交子空间 $\Psi \in R^{n \times m}$, 使得 $\{x^k\}$ 到 Ψ 的映射误差最小, 即:

$$\begin{aligned} G &= \min_{\Phi} \sum_{k=1}^m \|x^k - \Phi \Phi^H x^k\| \\ &= \sum_{k=1}^m \|x^k - \Psi \Psi^H x^k\| \quad (1) \\ \Phi^H \Phi &= I \end{aligned}$$

式 (1) 的最小值问题可以转化为如下的一个最大值问题:

$$H = \max_{\Phi} \sum_{k=1}^m \frac{\langle (x^k, \Phi)^2 \rangle}{\|\Phi\|^2} = \sum_{k=1}^m \frac{\langle (x^k, \Psi)^2 \rangle}{\|\Psi\|^2}$$

$$\Phi^H \Phi = I \quad (2)$$

其中: (\cdot, \cdot) 表示内积; $\langle \cdot \rangle$ 为平均操作符, 如果快照是由数值仿真得到的, 那么该符号可以从式 (2) 中去掉。对于 (2) 这个有约束优化问题可以通过标准的优化技术得到如下的拉格朗日方程:

$$J(\Phi) = \sum_{k=1}^m (x^k, \Phi)^2 - \lambda (\|\Phi\| - 1) \quad (3)$$

式中 λ 为拉格朗日乘子。将目标函数 $J(\Phi)$ 对 Φ 求偏导数得:

$$\frac{d}{d\Phi} J(\Phi) = 2XX^H \Phi - 2\lambda \Phi \quad (4)$$

其中矩阵 $X = \{x^1, \dots, x^m\}$, 它是快照点的集合, 称为快照矩阵。令方程 (4) 为零, 就能得到式 (3) 的最优解:

$$(XX^H - \lambda I) \Psi = 0 \quad (5)$$

式 (5) 是一个实对称矩阵特征值问题。由于 X 是一个 $n \times m$ 阶的大型矩阵, 那么 POD 核 $R = XX^H$ 为 $n \times n$ 的矩阵, 求解这样一个大型矩阵的特征值和特征向量在计算上会遇到许多困难。由于矩阵 R 的秩 $\text{rank}(R) = m$, 那么式 (5) 可以简化为一个 m 维的特征值问题进行求解:

$$\begin{cases} X^H X V = V \Lambda \\ \Psi = X V \Lambda^{-1/2} \end{cases} \quad (6)$$

矩阵 Ψ 中的每一个列向量 ϕ_i 都对应于一个实特征值 λ_i 。 λ_i 表征的物理意义是向量 ϕ_i 对快照矩阵的贡献, 它的值越大表明 ϕ_i 的贡献越大。于是将特征值 λ_i 从大到小排列, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$ 。取前 r 个特征值和它对应的特征矩阵 Ψ_r 来代替 Ψ , 把满阶向量 $x^{n \times 1}$ 映射到 Ψ_r 上就能使模型的阶数降低:

$$x^{n \times 1} = \Psi_r \xi^{r \times 1} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{v} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_0^{-1}H & -A_0^{-1}(E+C) & -A_0^{-1}G \\ \frac{1}{2}\rho_{\infty} V_{\infty}^2 M^{-1}P & -M^{-1}C & -M^{-1}K_S \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \\ u \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中: $\frac{1}{2}\rho_{\infty} V_{\infty}^2 P = \frac{\partial f^{\text{int}}}{\partial v}$, $K_S = K - \frac{\partial f^{\text{ext}}}{\partial u}(u_0, w_0)$ 。若结构模态取 s 阶, 那么三维线性化气动弹性系统的自由度总共为 $J = 5 \times n + 2 \times s$ (二维情况为 $4 \times n +$

2 气动弹性系统降阶模型

2.1 气动弹性方程的线性化

气动弹性系统是由流体动力系统和结构系统两部分组成。流体动力系统用有限体积法离散, 结构动力系统用有限元方法离散。流体和结构的控制方程分别如下式所示:

$$\begin{aligned} (A(u)w)_{,t} + F(w, u, v) &= 0 \\ M v_{,t} + f^{\text{int}}(u, v) &= f^{\text{ext}}(u, w) \end{aligned} \quad (8)$$

其中: u 和 v 分别表示结构的位移和速度矢量; A 为流体网格单元的体积矩阵; w 是流体的守恒型变量; F 是非线性的数值通量函数; M 是质量矩阵; f^{int} 表示结构内力; f^{ext} 是作用于结构上的气动载荷; $_{,t}$ 表示变量对时间的偏导数。

方程 (8) 是一个非线性方程, 首先要对它进行线性化, 以便求解进行降阶操作所需要的变量协方差阵。对于气动弹性系统, 一般选取结构变形为零的定常状态作为操作点。将控制方程 (8) 在该点处做一阶泰勒展开得:

$$A_0 w_{,t} + H w + (E + C) v + G u = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial F}{\partial w}(w_0, u_0, v_0), G = \frac{\partial F}{\partial u}(w_0, u_0, v_0), \\ E &= \frac{\partial A}{\partial u} w_0, C = \frac{\partial F}{\partial v}(w_0, u_0, v_0) \end{aligned} \quad (10)$$

变量 $w, w_{,t}, u, v$ 此时表示的是扰动量; $A_0, w_0, w_{,t}(w_0), u_0, v_0$ 表示操作点处的变量值。若 CFD 系统中共有 n 个网格, 那么对于二维和三维 Euler 方程, 系统 (10) 的阶数分别为 $J = 4 \times n$ 和 $J = 5 \times n$ 。对一般的 CFD 系统, 其自由度 J 在 10^4 以上。对 CFD 这样的大型系统求偏导数是一个非常繁杂的工作, 尤其是矩阵 H , 它是一个 $J \times J$ 的大型矩阵。该矩阵具有很强的稀疏性, 这就使得对它的求解和存储得到了很大的简化。把方程 (8) 和 (9) 联立起来就能建立线性化的气动弹性方程:

$2 \times s$)。

2.2 气动弹性系统的时域 POD/ROM

线性化的流体动力学模型 (9) 可以写成一个线性系统状态空间方程的形式:

$$\begin{cases} \dot{w} = Aw + By \\ F = Pw \end{cases} \quad (12)$$

其中: $A = -A_0^{-1}H$, $B = -A_0^{-1}(E + C G)$, $y = [v \ u]^T$ 。POD 降阶方法的关键在于 POD 快照如何得到。POD 快照可以由方程 (12) 求时域和频域响应得到。设 CFD 系统快照矩阵为 W 。由于 W 为实矩阵, 则 POD 核为 $R = WW^T$ 。采用第 1 节描述的方法求得一

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_r \\ \dot{v} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Psi_r^T A_0^{-1} H \Psi_r & -\Psi_r^T A_0^{-1} (E + C) & -\Psi_r^T A_0^{-1} G \\ \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 M^{-1} P \Psi_r & -M^{-1} C & -M^{-1} K_S \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_r \\ v \\ u \end{bmatrix} \quad (14)$$

阶降系统 (14) 的阶数为 $2s + r$, 这个阶数比原系统 (12) 要小得多。因此可以通过求解它的特征值来分析其稳定性, 也可以通过时域推进来观察其响应, 这比 CFD /CSD 耦合计算方法要方便、快速, 特别适合于需要大量计算的气动弹性稳定性及动响应分析。

2.3 POD-BT/ROM

相对于频域 POD/ROM 来说, 时域 POD/ROM 的一个主要的缺点就是阶数较高。频域 POD 在求快照矩阵时只需选择系统特征频率附近的激励, 仅仅覆盖所关心的几个频带就可以。因此所产生的快照矩阵相对较小, 因而 ROM 的阶数也相对较小, 通常几十阶就可以很准确地描述气动弹性系统的主要特征。而时域 POD/ROM 的激励需要激起系统全部频谱范围的响应, 因此其快照矩阵包含系统更多信息, 从而求得的 ROM 具有对流动参数的变化具有较强的鲁棒性。但也因此导致了时域 ROM 模型阶数相对较高, 通常要几百阶才能准确描述系统特征。本文引入控制系统建模常用的平衡截断降阶方法^[10], 对时域 POD/ROM 做进一步降阶, 可以得到精度及阶数同频域 POD/ROM 相当的 POD-BT/ROM。

3 算例仿真研究

3.1 AGARD 445.6 机翼

以 AGRAD 445.6 机翼为例, 通过与 CFD /CSD

个 r ($r \ll n$) 维的正交子空间 Ψ_r 作为流场的模态。那么将方程 (12) 映射到 Ψ_r 上便得到了流体系统的降阶模型:

$$\begin{cases} \dot{w}_r = \Psi_r^T A \Psi_r w_r + \Psi_r^T B y \\ F = P \Psi_r w_r \end{cases} \quad (13)$$

把方程 (13) 代入方程 (12) 中就能得到降阶的气动弹性系统:

耦合求解器计算结果进行比较, 验证本文所发展的时域 POD /ROM 求解器在预测气动弹性响应上的高精度和高效性。气动网格采用 O-H 型网格, 网格数为 $60 \times 42 \times 19$ 如图 1 所示。流场自由度总数为 239400 结构模态取前四阶, 则气动弹性系统的总阶数为 239408 选取计算马赫数 0.678 首先将控制方程线性化。为验证线性化模型的可靠性, 给一阶模态一个强迫振动 $\xi_1 = 0.001 \sin(2\pi \times 55.3 \times t)$, 线性化方程所求得的前四阶模态的广义力与 CFD 计算比较如图 2 所示, 从图中可见线性模型和 CFD 计算的结果吻合得很好。因此可以利用全阶线性化模型代替非线性的 CFD 计算来评价 POD/ROM 的精度。

3.2 POD/ROM 预测的结构响应

在马赫数为 $Ma = 0.678$, $V^* = 0.4074$ 和 $Ma =$

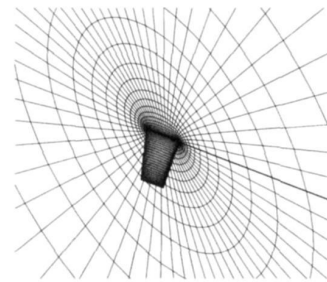


图 1 AGARD445.6 机翼表面网格

Fig 1 Surface grid of AGARD wing

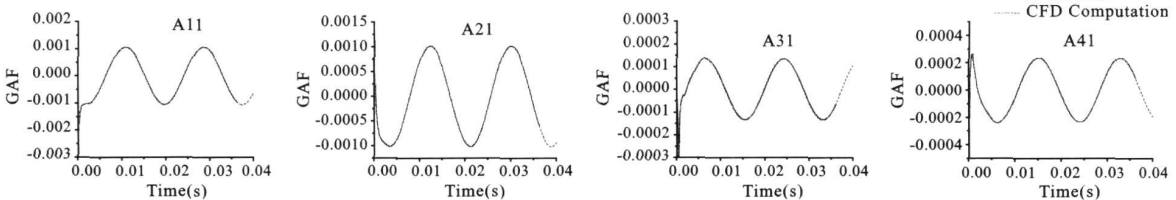


图 2 一阶模态正弦运动的广义气动力响应比较

Fig. 2 General aerodynamics (CFD vs Linearization model)

0.901, $V^* = 0.3873$ 状态下运用时域 POD 方法对 AGARD445.6 机翼进行降阶。求解 Snapshot 时推进的物理时间步长为 5.29×10^{-5} s, 每一阶模态的快照数取 200。采用 (12) 式构建好不同阶数的 POD/ROM 模型后, 就可以利用 ROM 对系统的结构响应进行预测, 前两阶模态的响应如图 3 所示。

从仿真结果中可以看出, 300 阶以上的降阶模型可以很好地表达系统特性。在计算时间上, 利用

CFD/CSD 耦合求解器来模拟一个状态的响应在 P4 3.0G 的 PC 机上要大约 6 个小时。而采用 POD/ROM 来求解响应则只需要不到 2 分钟。加上构造 POD/ROM 所花的时间, 其计算效率也提高了一到二个量级以上。更为重要的是, 对于同一个马赫数, POD/ROM 构建好并予以确认后, 就可以快速求解该马赫数下不同动压和不同结构运动下的非定常气动力, 大大方便了系统设计与分析。

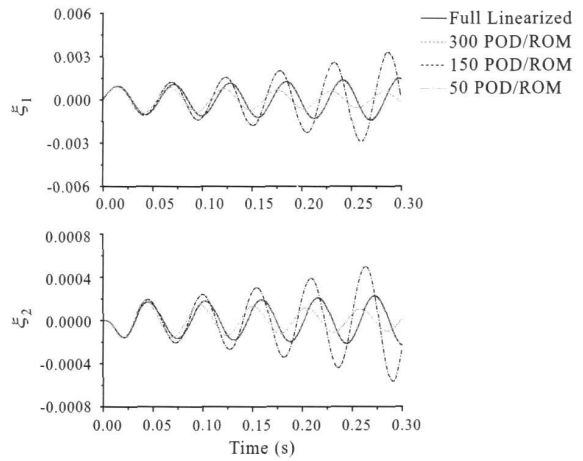
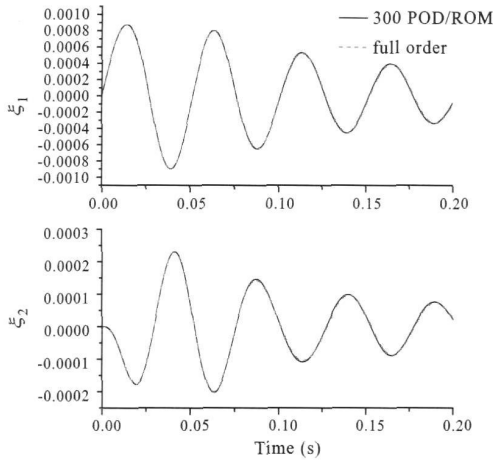


图 3 ROM 预测的结构响应与全阶模型比较

Fig 3 General structure displacements (POD/ROM vs Full order linearization model)

3.3 颤振边界预测

在给定马赫数下气弹系统的 POD/ROM 建立起来以后, 通过改变动压, 可以得到一系列系统矩阵。对降阶模型的系统矩阵进行特征值分析, 就可以对系统进行稳定性的定量分析, 从而可以快速预测系统在该马赫数下的颤振速度及颤振频率。在不同的马赫数下采用 POD/ROM 就可以快速预测气动弹性系统的颤振边界。图 4 为 POD/ROM 预测的 AGARD 445.6 机翼的颤振速度和颤振频率与 CFD/CSD 耦合计算结果

的比较, 可以看出降阶模型的预测结果与 CFD/CSD 耦合计算结果十分接近。这充分说明了所建立的 POD/ROM 具有接近 CFD/CSD 耦合计算的精度。POD/ROM 求一个马赫数下的颤振速度, 只要几分钟; 而采用 CFD/CSD 耦合计算方法即使在准确猜测到颤振速度的情况下, 也要好几个小时。而通常需要经过数个状态的试算才能较准确确定颤振速度和颤振频率。因此 POD/ROM 在颤振边界预测这种需要大量试算的气动弹性分析问题上计算效率显得更加明显。

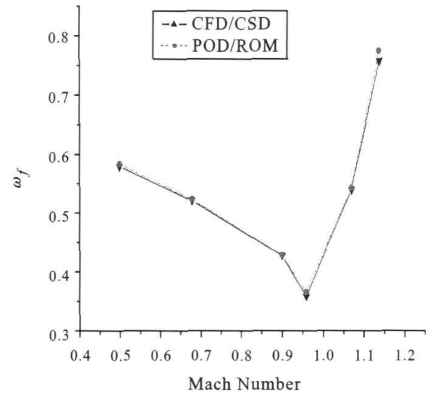
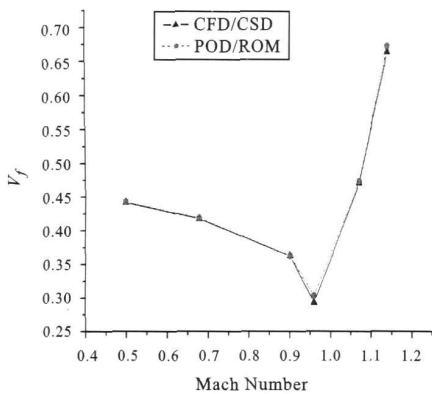


图 4 AGARD 445.6 机翼的颤振边界比较 (POD/ROM vs CFD/CSD)

Fig 4 Flutter boundary of AGARD wing (POD/ROM vs CFD/CSD)

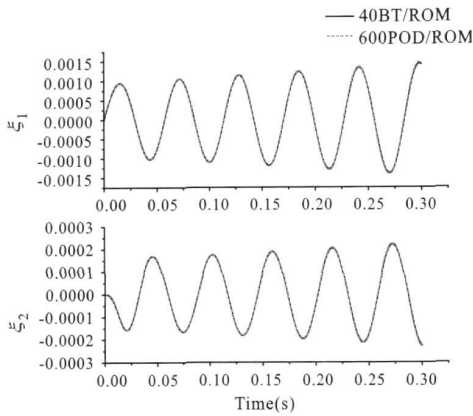


图 5 40阶 BT-ROM vs 600阶 POD-ROM

Fig 5 40-order BT vs 600-order POD

3.4 POD-BT-ROM

300阶的 POD-ROM 模型虽然比全阶系统的约 24 万阶低了很多,对于控制系统设计来说,其阶数仍然较高。采用 102 量级阶数的系统设计出的主动控制律很难应用于工程实际。为了得到实用的便于控制系统设计的低阶模型,本文对时域 POD-ROM 方法采用平衡截断方法进一步降阶。在 $Ma = 0.901$ 时,首先利用时域 POD-ROM 求解器得到一个阶数为 600 阶的模型,然后采用平衡截断降阶方法可以得到 40 阶的 POD-BT-ROM。40 阶 POD-BT-ROM 和 600 阶 POD-ROM 预测的机翼前两阶模态的广义位移响应结果的比较如图 5 所示。从图中可以看出 40 阶的 POD-BT-ROM 模型可以获得 600 阶 POD-ROM 的模型精度,从而使得时域 POD 模型可以应用于实际控制系统的设计,有效克服了时域 POD-ROM 阶数过高的缺点。

4 结束语

本文研究了时域 POD-ROM 的建模方法,并将平衡截断法引入 POD-ROM 的构建。以 AGARD445.6 三维机翼为例进行了数值计算,计算结果表明:气动弹性系统的 POD-ROM 具有接近 CFD/CSD 耦合计算的高精度,能够用于气弹系统的稳定性分析和高精度响应快速预测;同耦合数值模拟方法相比,POD-ROM 可以大大提高气动弹性分析的计算效率(约为 10~102);平衡截断技术获得的几十阶 POD-BT-ROM 与几百阶时域 POD-ROM

具有相近的精度,有效克服了时域 POD-ROM 阶数过高的缺点,从而可以获得与频域 POD-ROM 相近的性能。

参考文献:

- [1] Lucia D J, Beran P S, Silva W A. Reduced-order modeling: new approaches for computational physics[J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2004, 40(1): 51-117.
- [2] 陈刚. 弹性飞行器耦合动力学与主动控制方法研究[R]. 西安交通大学博士后出站报告, 2008, 11 [CHEN gang Dynamics and Active Control Method of Flexible Flight Vehicle [R]. PostDoc Work Report Xi'an Jiaotong University, 2008, 11 (In Chinese).]
- [3] Lumly J L. The Structure of Inhomogeneous turbulence Atmospheric Turbulence and Wave Propagations[M]. 1967: 166-178.
- [4] Romannowski M C, Dowell E H. Reduced order unsteady aerodynamic and aeroelastic models using Karhunen-Loève eigenmodes [A]. 6th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, 1996: 7-13.
- [5] Hall K C, Thomas J P, Dowell E H. Proper Orthogonal Decomposition Technique for Transonic Unsteady Aerodynamic Flows [J]. *AIAA Journal*, 2000, 38(2): 1853-1862.
- [6] Thomas J P, Dowell E H, Hall K C. Three-dimensional Transonic Aeroelasticity Using Proper Orthogonal Decomposition-Based Reduced Order Models [R]. *Journal of Aircraft*, 2003, 40(3): 544-551.
- [7] Lieu T, and Farhat C. Adaptation of POD-Based Aeroelastic ROMs for Varying Mach Number and Angle of Attack Application to a Complete F-16 Configuration [A]. *AIAA Paper 2005-7666*.
- [8] Pettit C L, Beran P S. Application of Proper Orthogonal Decomposition to the Discrete Euler Equations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 55(4): 479-497.
- [9] Thomas J P, Dowell E H, Hall K C. Using Automatic Differentiation to Create a Nonlinear Reduced Order Model of a Computational Fluid Dynamic Solver [A]. *AIAA Paper 2006-7115*.
- [10] Moore B C. Principal component analysis in linear system: controllability, observability, and model reduction [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, 26(1): 17-31.

作者简介: 陈刚(1979-),男,博士,副教授,主要研究方向为气动伺服弹性与主动控制,飞行器动力学与控制。

通信地址: 西安交大强度与振动重点实验室(710049)

电话: (029) 82660978

E-mail: npu_b1is@163.com

(下转第 1796 页)

- The Touchdown Dynamics of a Soft-Landing Vehicle[R]. NASA TN D-7045, 1971.
- [2] 朱汪, 杨建中. 月球探测器软着陆机构着陆腿模型与仿真分析[J]. 宇航学报, 2008, 29(6). [ZHU Wang YANG Jian-zhong Modeling and simulation of landing leg for the lunar landing gear system[J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(6) (in Chinese).]
- [3] MSC Corporation. ADAMS/Solver Online help version 2005[OL].
- [4] Robert E L, George C. Monte Carlo Approach to Touchdown Dynamics for Soft Lunar Landing[R]. NASA TN D-3117, 1965
- [5] 朱汪. 月球着陆器软着陆机构着陆稳定性研究[D]. 中国空

间技术研究院硕士学位论文, 2008. [ZHU Wang Touchdown Stability Investigation of Landing Gear for Lunar Lander[D]. Thesis of China Academy of Space Technology, 2008 (in Chinese).]

作者简介: 朱汪(1981-), 男, 助理工程师, 中国空间技术研究院总体部, 研究方向为航天器机构技术与分析。

通信地址: 北京市 5142信箱 87分箱(100094)

电话: (010) 68746805

E-mail: jzwong@china.com.cn

Touchdown Stability Simulation of Landing Gear System for Lunar Lander

ZHU Wang YANG Jian-zhong

(Beijing Institute of Spacecraft System Engineering Beijing 100094 China)

Abstract Landing gear system model was presented. Touchdown stability criteria was established. Discretization searching method was developed. With four main factors of the vertical and horizontal velocity, yaw angle of the lander and lunar surface slope at the impact moment, touchdown stability boundaries were derived. Analysis results show symmetrical landing mode is more stable than unsymmetrical one and strength failure of connection points for struts easily occurs at relatively high horizontal velocity. Compared with uphill horizontal velocity instance, the downhill one overturns more easily at a slope.

Key words Touchdown stability; Landing impact; Landing gear system; Lunar lander

(上接第 1769 页)

A Fast Aeroelastic Response Prediction Method Based on Proper Orthogonal Decomposition Reduced Order Model

CHEN Gang¹, LI Yue-ming¹, YAN Gui-rong¹, XU Min², ZENG Xian-gang²

(1 MOE Key Laboratory for Strength & Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

2 College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract CFD/CSD coupled numerical simulation is the most accurate method in aeroelasticity, but it is also with the least computation efficiency. A reduced order model (ROM) based on proper orthogonal decomposition (POD) for aeroelastic system was investigated in this paper. In order to further reduce the higher order of time-domain POD/ROM relative to frequency-domain POD/ROM, the balanced truncation method in control theory was introduced. The detail of the construction of time-domain POD/ROM was demonstrated by AGARD 445.6 wing and the ROM was then used to predict the aeroelastic dynamic response and flutter boundary. The numerical results show that the POD/ROM nearly has the same accuracy as the CFD/CSD coupled method and improves the computation efficiency about 1~2 order of magnitude.

Key words Reduced order model; Proper orthogonal decomposition; Balanced truncation; Computational aeroelasticity