

不同边界条件下截顶正交各向异性圆锥壳的振动和声辐射研究

赵鑫^{1,2}, 张博¹, 李跃明¹

(1. 西安交通大学 机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049; 2. 中国华阴兵器试验中心, 陕西 华阴 714200)

摘要: 采用波传播法和 Galerkin 法, 研究了两端简支和固支边界条件对截顶正交各向异性圆锥壳的固有频率和声辐射的影响, 通过与现有文献及数值仿真结果相比较, 验证了理论分析的正确性。结果表明, 简支和固支边界对正交各向异性圆锥壳固有频率的影响与圆锥壳半顶角的大小和母线与环向方向的弹性模量比的大小相关。当正交各向异性圆锥壳的半顶角较大时, 对与不同的弹性模量比, 固支圆锥壳的固有频率都大于简支圆锥壳的固有频率; 而对于小半顶角的正交各向异性圆锥壳, 当弹性模量比较小时, 简支圆锥壳在大周向波数处的固有频率略大于固支圆锥壳的固有频率。随着圆锥壳半顶角的增大, 两种边界对正交各向异性圆锥壳的声压级的影响也逐渐增大。

关键词: 正交各向异性圆锥壳; 固有振动; 声辐射; 边界条件

中图分类号: V214.3; O422.6

文献标志码: A

DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2016.03.016

Influences of boundary conditions on the vibration and sound radiation of a truncated orthotropic conical shell

ZHAO Xin^{1,2}, ZHANG Bo¹, LI Yue-ming¹

(1. Xi'an Jiaotong University, State Key Lab. for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an 710049, China;

2. Huayin Ordnance Test Centre, Huayin 714200, China)

Abstract: The wave propagation approach and Galerkin method were employed to study the influence of the simply-supported and clamp-supported boundary conditions at both ends on natural frequency and acoustic radiation of a truncated orthotropic conical shell. In order to validate the present analysis, the theoretical results were compared with those in published literatures and those by numerical simulation. The results indicate that the influences of simply-supported and clamp-supported boundary conditions are related to the half cone angle and the ratio of elasticity moduli in meridional and circumferential directions. The natural frequencies of the orthotropic conical shell with clamp-supported boundary are greater than those with simply-supported boundary for the larger half cone angle, but the natural frequencies of the orthotropic conical shell with simply-supported boundary are only slightly larger than those with clamp-supported boundary under the modes with large circumferential wave number for the smaller half cone angle as the ratio of elasticity moduli is smaller. With the increase of the half cone angle, the effects of the two boundary conditions on the natural frequencies and sound pressure level both increase.

Key words: orthotropic conical shell; natural vibration; sound radiation; boundary condition

由复合材料制成的截顶正交各向异性圆锥壳是航天航空领域中广泛使用的结构形式。对其开展相关的固有振动及声响应特性研究, 是领域内进行圆锥壳设计和使用的现实需求。国内外学者已经对圆锥壳的自由振动开展了广泛的研究。Irie 等^[1-2] 采用传递矩阵法对九种边界条件下以及不同厚度形式下的各向同性圆锥壳的频率特性进行了研究。Tong^[3] 对正交各向异

性圆锥壳在多种边界条件下的自由振动进行了研究, 位移解是通过幂级数方法获得, 得到了较好精度的近似解析解。Mecitoglu^[4] 对加肋各向同性锥壳的自由振动开展了研究, 通过平均能量法, 得到一个简单的正交各向异性圆锥壳模型。Lam 等^[5] 对旋转状态下的各向同性截顶圆锥壳在简支边界条件下的自由振动进行了研究。Lam 等^[6] 采用 Galerkin 法对不同边界条件下各向同性旋转圆锥壳的频率特性开展了研究。基于 Reissner 薄壳理论, 吴仕昊等^[7] 采用区域分解法分析了不同边界条件下圆锥壳-圆柱壳-球壳组合结构的自由振动。

基金项目: 国家自然科学基金项目(11321062; 91016008; 91216107)

收稿日期: 2014-10-08 修改稿收到日期: 2015-02-06

第一作者 赵鑫 男, 博士生, 工程师, 1977 年生

通信作者 李跃明 男, 教授, 博士生导师, 1961 年生

圆锥壳体的声辐射的研究工作相对比较少。Caresta 等^[8]用幂级数序列求解了流体作用下锥壳的动力响应。通过将圆锥壳分段并近似为小圆柱壳,然后确定每一小段圆柱的流体载荷。曹雄涛等^[9]研究了简支边界条件下正交铺设层合锥壳的声辐射理论模型。锥壳的位移利用波传播法和 Galerkin 法求解。通过将圆锥壳划分为多个小段圆柱来叠加成锥壳的远场声辐射。Luo 等^[10]将一个锥形海底山峰进行了分段,每个小锥段近似圆柱,并分析了圆锥山峰在偏置声源作用下的三维声传播和散射特性。

综上所述,国内外对各向同性圆锥壳在简支边界条件下的固有振动研究较为广泛,而针对正交各向异性圆锥壳在不同边界条件下的振动和声辐射特性的研究较少。本文采用波传播法和 Galerkin 法对截顶正交各向异性圆锥壳在两端简支和固支边界条件下的固有频率和远场声压进行了对比研究。为验证理论模型的正确性,本文将两种边界条件下圆锥壳的固有频率值同已有文献的结果进行了对比;同时,采用有限元和边界元相结合的数值模拟方法,对圆锥壳的远场声压进行了对比验证。

1 数学模型

图 1 所示为一个薄壁截顶正交各向异性圆锥壳。 α 是圆锥的半顶角; L_1 和 L 分别是圆锥体小端母线方向和大端母线方向的长度; r_1 和 r_2 分别是圆锥壳小端和大端的半径; h 是壳体厚度; E_1 和 E_2 分别为母线方向和圆周方向的弹性模量; u 、 v 和 w 分别是壳体中面在母线方向 x 、圆周方向 θ 和法线方向 z 的位移。 $F(x, \theta)$ 为作用在壳体中面的简谐点激励。

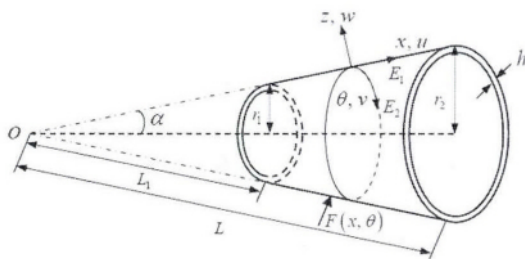


图 1 正交各向异性圆锥壳坐标系

Fig. 1 The coordinates of an orthotropic conical shell

1.1 基本方程

基于经典的 Reissner 薄壳理论^[11],正交各向异性圆锥壳的运动方程可以写为:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_\theta \\ F_z - p_a \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 F_x 、 F_θ 、 F_z 和 p_a 分别是作用在 x 、 θ 和 z 方向上的表

面力载荷和作用于锥壳表面法向的空气载荷。

$L_{ij}(i, j=1, 2, 3)$ 为微分算子,表示如下:

$$\begin{aligned} L_{11} &= -K_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{K_{11}}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{K_{22}}{x^2} - \frac{K_{66}}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ L_{12} &= \frac{(K_{22} + K_{66})}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{(K_{12} + K_{66})}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\ L_{13} &= -\frac{K_{12}}{x \tan \alpha} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{K_{22}}{x^2 \tan \alpha} \\ L_{21} &= -\frac{(K_{12} + K_{66})}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} - \frac{(K_{22} + K_{66})}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ L_{22} &= -\left(\frac{K_{22}}{x^2 \sin^2 \alpha} + \frac{D_{22}}{x^4 \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left(\frac{D_{66}}{x^3 \tan \alpha} - \frac{K_{66}}{x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{K_{66}}{x^2} - \left(K_{66} + \frac{D_{66}}{x^2 \tan^2 \alpha} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ L_{23} &= -\frac{K_{22}}{x^2 \sin \alpha \tan \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{D_{22}}{x^3 \sin \alpha \tan \alpha} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{x^2 \sin \alpha \tan \alpha} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{D_{22}}{x^4 \sin^3 \alpha \tan \alpha} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \\ L_{31} &= \frac{K_{12}}{x \tan \alpha} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{K_{22}}{x^2 \tan \alpha} \\ L_{32} &= \left(\frac{K_{22}}{x^2 \sin \alpha \tan \alpha} - \frac{2D_{12} + 2D_{22} + 4D_{66}}{x^4 \sin \alpha \tan \alpha} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2D_{12} + D_{22} + 4D_{66}}{x^3 \sin \alpha \tan \alpha} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} - \frac{D_{12} + 4D_{66}}{x^2 \sin \alpha \tan \alpha} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{D_{22}}{x^4 \sin^3 \alpha \tan \alpha} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \\ L_{33} &= \frac{K_{22}}{x^2 \tan^2 \alpha} + \frac{D_{22}}{x^3} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{D_{22}}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2D_{11}}{x} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{2D_{12} + 4D_{66}}{x^3 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{2D_{12} + 4D_{66}}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2D_{12} + 2D_{22} + 4D_{66}}{x^4 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{D_{22}}{x^4 \sin^4 \alpha} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2)$$

式中 ρ 为材料的体积密度。薄膜刚度和弯曲刚度分别为:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{E_1 h}{(1 - \mu_{12} \mu_{21})}, \quad K_{22} = \frac{E_2 h}{(1 - \mu_{12} \mu_{21})} \\ K_{12} &= K_{21} = \frac{\mu_{12} E_2 h}{(1 - \mu_{12} \mu_{21})}, \quad K_{66} = G_{12} h \\ D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})} \\ D_{12} &= D_{21} = \frac{\mu_{12} E_2 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})}, \quad D_{66} = \frac{G_{12} h^3}{12} \end{aligned} \quad (3)$$

式中 E_1 、 E_2 、 G_{12} 、 μ_{12} 和 μ_{21} 为正交各向异性圆锥壳的弹性常数。

圆锥壳两端简支边界条件(S-S)为:

$$v = 0 \quad \mu w = 0 \quad N_x = 0 \quad M_x = 0 \quad x = L_1, L \quad (4)$$

对于稳态振动, 时间因子 $e^{-j\omega t}$ 可略去不写; 采用波传播的形式, 对应的位移场可写为^[6,9],

$$\begin{aligned}
 u^s(x, \theta) &= \sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_m \sum_n U_{mn\varepsilon}^s \cos[k_m(x - L_1)] \cos\left(n\theta + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) \\
 v^s(x, \theta) &= \sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_m \sum_n V_{mn\varepsilon}^s \sin[k_m(x - L_1)] \sin\left(n\theta + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) \\
 w^s(x, \theta) &= \sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_m \sum_n W_{mn\varepsilon}^s \sin[k_m(x - L_1)] \cos\left(n\theta + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right)
 \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $k_m = m\pi / (L - L_1)$ 是母线方向的波数; $\varepsilon = 0$ (或 1) 表示反对称 (或对称) 模式; m 和 n 分别表示母线和圆周方向的波数; 上标 s 表示简支边界条件 (下同)。

圆锥壳两端固支边界条件 (C - C) 为:

$$u = 0 \quad v = 0 \quad \mu w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad x = L_1, L \quad (6)$$

对应的位移场可写为^[6,9]

$$\begin{aligned}
 u^c(x, \theta) &= \sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_m \sum_n U_{mn\varepsilon}^c \sin[k_m(x - L_1)] \cos\left(n\theta + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) \\
 v^c(x, \theta) &= \sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_m \sum_n V_{mn\varepsilon}^c \sin[k_m(x - L_1)] \sin\left(n\theta + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) \\
 w^c(x, \theta) &= \sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_m \sum_n W_{mn\varepsilon}^c \left\{ \sinh\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) + \gamma_m \left[\cosh\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) \right] \right\} \cos\left(n\theta + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right)
 \end{aligned} \quad (7)$$

式中上标 c 表示固支边界条件 (下同), λ_m 和 γ_m 应满足下面的条件:

$$\begin{aligned}
 \cos\lambda_m \cosh\lambda_m = 1 \quad \gamma_m = \frac{\sinh\gamma_m - \sin\lambda_m}{\cos\lambda_m - \cosh\lambda_m} \\
 (m = 1, 2, \dots) \quad (8)
 \end{aligned}$$

由于方程 (1) 是一组变系数的偏微分方程, 无法用解析法来求解, 因此, 采用加权积分的 Galerkin 方法来求解,

$$\begin{aligned}
 \int_{\theta} \int_x (L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w - F_x) \delta u dx d\theta = 0 \\
 \int_{\theta} \int_x (L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w - F_{\theta}) \delta v dx d\theta = 0 \\
 \int_{\theta} \int_x (L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w + p_a - F_z) \delta w dx d\theta = 0
 \end{aligned} \quad (9)$$

1.2 空气载荷的作用

Helmholtz 方程在锥壳的正交曲线坐标系中是不能用分离变量法来处理的。因此, 一个分段加载方法来

近似圆锥壳的空气载荷^[9], 如图 2 所示。

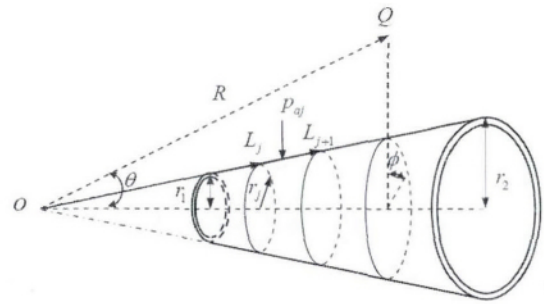


图 2 圆锥壳的划分

Fig. 2 Segments of conical shell

空气中的声压满足柱坐标系下的 Helmholtz 方程:

$$\nabla^2 p + k_0^2 p = 0 \quad (10)$$

式中: 波数 k_0 为 ω/c_0 , ω 是角频率, c_0 是空气中的声速。Laplace 算子为:

$$\nabla^2 = \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (11)$$

第 j 个圆锥段 (近似为圆柱段) 与空气间的边界条件为^[9,12]:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=r_j} = \omega^2 \rho_0 w(x, \theta) \quad (12)$$

式中 ρ_0 为空气密度。将方程 (10), (12) 和方程组 (5) 或 (7) 的第三个方程联立起来, 运用 Sommerfeld 远场辐射条件, 就得到了第 j 个圆柱壳在简支和固支边界下的空气载荷作用 p_{aj}^s 和 p_{aj}^c :

$$\begin{aligned}
 p_{aj}^s(x, \theta, r_j) &= \sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \rho_0 W_{mn\varepsilon}^s}{k_r H_n^{(1)}(k_r r_j)} H_n^{(1)}(k_r r_j) \times \\
 &\quad \sin[k_m(x - L_1)] \cos\left(n\theta + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right)
 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 p_{aj}^c(x, \theta, r_j) &= \sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \rho_0 W_{mn\varepsilon}^c}{k_r H_n^{(1)}(k_r r_j)} H_n^{(1)}(k_r r_j) \times \\
 &\quad \left\{ \sinh\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) + \gamma_m \left[\cosh\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) \right] \right\} \times \cos\left(n\theta + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right)
 \end{aligned} \quad (14)$$

式中: $H_n^{(1)}$ 是 n 阶第一类 Hankel 函数, 阶次为 n 。 r_j 是第 j 段圆柱壳的半径; x 大于 L_j 且小于 L_{j+1} , L_j 和 L_{j+1} 是第 j 段圆柱壳两端在母线 x 方向上的坐标。这些参数如图 2 中所示, 空气载荷逐段加载。

如果圆锥壳被划分为 s 段圆柱壳, 圆锥壳的空气载荷 p_a 由 s 段以方程 (13) 或 (14) 的形式表示的空气载荷组成。运用方程 (13) 或 (14), 则空气载荷在方程 (9) 中的作用 $p_{amn\varepsilon}^s$ 或 $p_{amn\varepsilon}^c$ 可以分别写为:

$$\begin{aligned}
 p_{amn\varepsilon}^s &= \sum_{j=1}^s \int_{L_j}^{L_{j+1}} \frac{\omega^2 \rho_0 W_{mn\varepsilon}^s}{k_r H_n^{(1)}(k_r r_j)} H_n^{(1)}(k_r r_j) \times \\
 &\quad \sin^2[k_m(x - L_1)] dx
 \end{aligned} \quad (15)$$

$$p_{amne}^c = \sum_{j=1}^s \int_{L_j}^{L_{j+1}} \frac{\omega^2 \rho_0 W_{mne}^c}{k_r H_n^{(1)}(k_r r_j)} H_n^{(1)}(k_r r_j) \times \left\{ \sinh\left(\frac{\lambda_m(x-L_1)}{L-L_1}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_m(x-L_1)}{L-L_1}\right) + \gamma_m \left[\cosh\left(\frac{\lambda_m(x-L_1)}{L-L_1}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_m(x-L_1)}{L-L_1}\right) \right] \right\}^2 dx \quad (16)$$

1.3 正交各向异性圆锥壳的声辐射求解

通过求解方程(9),可得到空气载荷作用下的圆锥壳的动力响应。圆锥壳的远场声辐射可以通过在波数域求解得到。

1.3.1 空气加载下的圆锥壳的振动

将位移场函数方程组(5)或(7)代入方程组(9),假设圆锥壳只受径向点激励 F_z 的作用,其幅值为 F_{zj} ,得到:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mne} \\ V_{mne} \\ W_{mne} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{F}_z \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中简支和固支条件下的 \bar{F}_z 分别为,

$$\bar{F}_z^s = F_{zj}^s \sin[k_m(x_j - L_1)] \cos\left(n\theta_j + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) / (\varepsilon_n x_j \sin\alpha) \quad (18)$$

$$\bar{F}_z^c = F_{zj}^c \left\{ \sinh\left(\frac{\lambda_m(x_j - L_1)}{L - L_1}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_m(x_j - L_1)}{L - L_1}\right) + \gamma_m \left[\cosh\left(\frac{\lambda_m(x_j - L_1)}{L - L_1}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_m(x_j - L_1)}{L - L_1}\right) \right] \right\} \times \cos\left(n\theta + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) / (\varepsilon_n x_j \sin\alpha) \quad (19)$$

式中 (x_j, θ_j) 是激励点坐标。当 $n=0$ 时, ε_n 为 2π ; 否则 ε_n 为 π 。这里的系数 C_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 是非常复杂的表达式,涉及到频率、材料弹性常数和几何参数。附录中仅给出了简支边界条件下 C_{11} 的表达式。通过求解方程(17)左边的行列式问题,可以得到圆锥壳在真空中的固有频率和在空气中的固有频率^[11]。求解方程(17),可得到圆锥壳的径向位移幅值,

$$W_{mne} = \frac{\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} \bar{F}_z}{\det(C)} \quad (20)$$

1.3.2 波数域内的远场声压

圆锥壳的声辐射可通过将圆锥壳分割成的各段圆柱壳的声辐射声压叠加而成,每一个圆柱壳段的两端都假定有无限长圆柱障板,圆锥壳的远场声压将在波数域推导。

傅里叶变换定义为,

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (21)$$

逆变换为,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \quad (22)$$

对方程(10)中的 x 做傅里叶变换,得到

$$\left[\frac{1}{z^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial}{\partial z} \right) + (k_0^2 - k^2) \right] \tilde{p}_{ja} = 0 \quad (23)$$

式中 p 用 p_{ja} 来代替,表示由第 j 段圆柱壳引起的声压。

\tilde{p}_{ja} 是 p_{ja} 的傅里叶变换。满足 Sommerfeld 辐射条件的远场声压,方程(23)的解可以写为^[13]:

$$\tilde{p}_{ja}(k, \theta, z) = \sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} A_{n\varepsilon} H_n^{(1)}(\sqrt{k_0^2 - k^2} z) \cos\left(n\theta + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) \quad (24)$$

式中 $H_n^{(1)}$ 是 n 阶第一类 Hankel 函数。对方程(12)中的 x 进行傅里叶变换,得到

$$\sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{k_0^2 - k^2} A_{n\varepsilon} H_n^{(1)}(\sqrt{k_0^2 - k^2} r_j) \cos\left(n\theta + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) = \omega^2 \rho_0 \tilde{w}^j(k, \theta) \quad (25)$$

式中 $\tilde{w}^j(k, \theta)$ 是 $w^j(x, \theta)$ 的傅里叶变换。 $w^j(x, \theta)$ 代替 $w(x, \theta)$, 表示第 j 个圆柱段的径向位移。由位移方程(5)或(7)的第三个式子,得到

$$w^j(x, \theta) = \sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} w_{n\varepsilon}^j(x) \cos\left(n\theta + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) \quad (26)$$

式中:根据简支或固支边界条件 $w_{n\varepsilon}^j(x)$ 分别定义为:

$$w_{n\varepsilon}^{js}(x) = \sum_m W_{mne}^s \sin[k_m(x - L_1)], \quad (L_j \leq x \leq L_{j+1}) \quad (27)$$

$$w_{n\varepsilon}^{jc}(x) =$$

$$\sum_m W_{mne}^c \left\{ \sinh\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) + \gamma_m \left[\cosh\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) \right] \right\} \quad (L_j \leq x \leq L_{j+1}) \quad (28)$$

对方程(26)分别在简支和固支边界条件下的径向位移进行分段后的傅里叶变换,则 $\tilde{w}^j(k, \theta)$ 可表示为

$$\tilde{w}_j(k, \theta) = \sum_{\varepsilon=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{w}_{n\varepsilon}^j(k) \cos\left(n\theta + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) \quad (29)$$

式中:简支和固支条件下的 $\tilde{w}_{n\varepsilon}^j(k)$ 分别为:

$$\tilde{w}_{n\varepsilon}^{js}(k) = \int_{L_j}^{L_{j+1}} w_{n\varepsilon}^{js}(x) e^{-ikx} dx = \int_{L_j}^{L_{j+1}} \sum_m W_{mne}^s \sin[k_m(x - L_1)] e^{-ikx} dx \quad (30)$$

$$\tilde{w}_{n\varepsilon}^{jc}(k) = \int_{L_j}^{L_{j+1}} w_{n\varepsilon}^{jc}(x) e^{-ikx} dx =$$

$$\int_{L_j}^{L_{j+1}} \sum_m W_{mne}^c \left\{ \sinh\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) + \gamma_m \left[\cosh\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_m(x - L_1)}{L - L_1}\right) \right] \right\} e^{-ikx} dx \quad (31)$$

方程(30)和(31)的积分变换很容易获得。联立方程(25)和(29)得到

$$A_{n\epsilon} = \frac{\omega^2 \rho_a \tilde{w}_{n\epsilon}^j(k)}{\sqrt{k_0^2 - k^2} H_n^{(1)}(\sqrt{k_0^2 - k^2} r_j)} \quad (32)$$

将方程(32)代入(24),并对方程(24)进行傅里叶逆变换可得

$$p_{ja}(x, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\epsilon=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^2 \rho_a \tilde{w}_{n\epsilon}^j(k) H_n^{(1)}(\sqrt{k_0^2 - k^2} z)}{\sqrt{k_0^2 - k^2} H_n^{(1)}(\sqrt{k_0^2 - k^2} r_j)} \cos\left(n\theta + \frac{\epsilon\pi}{2}\right) e^{ikx} dk \quad (33)$$

利用大参数渐进表示和稳相法^[13],远场声压 p_{ja} 能够在球坐标中表示为(稳相点 $k = k_0 \cos\theta$)

$$p_{ja}(R, \theta, \phi) = \frac{\omega^2 \rho_a e^{ik_0 R}}{\pi k_0 R \sin\theta} \times$$

$$\left[\sum_{\epsilon=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{w}_{n\epsilon}^j(k_0 \cos\theta)}{H_n^{(1)}(k_0 r_j \sin\theta)} \cos\left(n\phi + \frac{\epsilon\pi}{2}\right) (-i)^{n+1} \right] \quad (34)$$

式中 R 是原点到远场点的距离, θ 是方向角, ϕ 是极角,如图2所示。圆锥壳辐射的远场声压 $p_a(R, \theta, \phi)$ 表示为^[9,12]

$$p_a(R, \theta, \phi) = \frac{\omega^2 \rho_a e^{ik_0 R}}{\pi k_0 R \sin\theta} \left[\sum_{j=1}^s \sum_{\epsilon=0}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{w}_{n\epsilon}^j(k_0 \cos\theta)}{H_n^{(1)}(k_0 r_j \sin\theta)} \times \cos\left(n\phi + \frac{\epsilon\pi}{2}\right) (-i)^{n+1} \right] \quad (35)$$

式中 s 表示圆锥壳的分段数。声压级(SPL)定义为:

$$SPL = 20 \lg\left(\frac{|p_a|}{p_0}\right) \quad (36)$$

式中 p_0 是参考声压 2.0×10^{-5} Pa。

弹性结构中心到流体区域最外层边界的距离 R_0 所满足的远场条件为^[14-15]:

$$R_1 > \frac{D^2}{\lambda}, \text{ 高频限制 } D = (L - L_1) \quad (37)$$

$$R_2 > (5 \sim 10) \lambda, \text{ 低频限制}$$

式中 R_0 取 R_1 和 R_2 中的最大值。在实际计算中, $R_0 = 5\lambda$ 即可满足工程计算精度的需要。

2 模型有效性验证

2.1 固有振动验证

令本模型中的 $E_1 = E_2$,则正交各向异性圆锥壳近似为各向同性圆锥壳。将计算得到的无量纲频率参数同Lam^[6]的结果进行比较。无量纲频率定义为:

$$\omega_c = r_2 \omega \sqrt{\rho(1 - \mu_{12}\mu_{21})/E_1} \quad (38)$$

各向同性圆锥壳的参数为 $m = 1, h/r_2 = 0.01, \mu = 0.3, (L - L_1) \sin\alpha/r_2 = 0.25$ 。表1和表2分别给出了圆锥壳在简支和固支边界条件下的无量纲频率的对比结果。

表 1 简支圆锥壳无量纲频率 ω_c

Tab.1 Nondimensional frequency ω_c of conical shell with simply-supported boundary condition

周向波数 n	$\alpha = 30^\circ$		$\alpha = 45^\circ$		$\alpha = 60^\circ$	
	本文	Lam ^[6]	本文	Lam ^[6]	本文	Lam ^[6]
2	0.842 0	0.842 0	0.765 5	0.765 5	0.634 8	0.634 8
3	0.737 7	0.737 6	0.721 3	0.721 2	0.623 8	0.623 8
4	0.636 3	0.636 2	0.673 9	0.673 9	0.614 5	0.614 5
5	0.552 9	0.552 8	0.632 3	0.632 3	0.611 0	0.611 1
6	0.495 2	0.495 0	0.603 5	0.603 5	0.617 0	0.617 1
7	0.466 4	0.466 1	0.592 0	0.592 1	0.634 8	0.635 0
8	0.466 3	0.466 0	0.599 9	0.600 1	0.665 7	0.666 0
9	0.492 1	0.491 6	0.627 2	0.627 3	0.709 7	0.710 1

表 2 固支圆锥壳无量纲频率 ω_c

Tab.2 Nondimensional frequency ω_c of conical shell with clamped-supported boundary condition

周向波数 n	$\alpha = 45^\circ$		$\alpha = 60^\circ$	
	本文	Lam ^[6]	本文	Lam ^[6]
1	0.846 9	0.845 2	0.645 1	0.644 9
2	0.685 0	0.680 3	0.558 5	0.556 8
3	0.558 7	0.555 3	0.482 6	0.481 8
4	0.474 4	0.477 8	0.432 7	0.436 1
5	0.433 9	0.439 5	0.419 4	0.420 2

从表1和表2中的数据对比可以看出,当前给出的结果同Lam^[6]给出的结果吻合的很好。

为验证空气载荷对圆锥壳固有频率的影响,表3给出了简支条件下各向同性圆锥壳在真空中和空气中的无量纲频率的对比。从表3中可见,由于空气载荷的作用,圆锥壳的固有频率有所下降,但通过与真空中的频率对比可以看出,空气载荷对圆锥壳动态特性的影响极小,在实际工程中可以不予考虑。

表 3 真空中和空气中简支圆锥壳的无量纲频率 ω_c 对比

Tab.3 Comparison of Nondimensional frequency ω_c for conical shell with vacuum and air

周向波数 n	$\alpha = 30^\circ$		$\alpha = 45^\circ$		$\alpha = 60^\circ$	
	真空	空气	真空	空气	真空	空气
2	0.842 0	0.842 0	0.765 5	0.765 5	0.634 8	0.634 4
3	0.737 7	0.737 7	0.721 3	0.721 2	0.623 8	0.623 4
4	0.636 3	0.636 3	0.673 9	0.673 8	0.614 5	0.614 1
5	0.552 9	0.552 7	0.632 3	0.631 6	0.611 0	0.610 7
6	0.495 2	0.494 7	0.603 5	0.603 1	0.617 0	0.616 7
7	0.466 4	0.466 1	0.592 0	0.591 7	0.634 8	0.634 6
8	0.466 3	0.466 2	0.599 9	0.599 7	0.665 7	0.665 4
9	0.492 1	0.491 9	0.627 2	0.627 0	0.709 7	0.709 4

2.2 声辐射验证

为验证声辐射模型的有效性,本节采用有限元与边界元相结合的数值方法获得圆锥壳的远场声压,并

同理论模型做对比。

圆锥壳的边界条件为两端简支,圆锥的小端和大端的半径分别为 $r_1 = 0.6 \text{ m}$ 和 $r_2 = 0.8 \text{ m}$; L_1 和 L 分别为 1.2 m 和 1.6 m ; 圆锥壳的厚度 h 和半顶角 α 分别为 0.005 m 和 30° 。圆锥壳的材料参数为: $E_1 = E_2 = 210 \text{ GPa}$, $\mu_{12} = 0.3$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ 和结构阻尼 $\eta = 0.01$ 。空气密度 $\rho_0 = 1.21 \text{ kg/m}^3$; 声速 $c_0 = 340 \text{ m/s}$ 。

首先对声压级的收敛性进行检验。根据式(37),可取远场距离 R_0 为 10 m 。声场的指向性场点定义在一个随 ϕ 变化的圆上,由 $R_0 = 10 \text{ m}$ 这个圆定义为^[9]

$$R = \sqrt{((L_1 + L) \cos \alpha)^2 / 4 + (10 + (L_1 + L) \sin \alpha / 2)^2} = 10.82 \text{ m}$$

极角 $\theta = \arctan((20 + (L_1 + L) \sin \alpha) / ((L_1 + L) \cos \alpha)) = 83.5^\circ$ 。单位法向力位于圆锥壳的中面 $((L_1 + L) / 2, 0)$ 处。声场的参考点 Q 位于球坐标下的 $(10.82, 83.5^\circ, \rho^\circ)$ 。图3给出了分段数 s 、波数 m 和 n 对声压级收敛性的影响。可以看出,在计算频率段内,当分段数 $s = 4$ 、波数 $m = 10$ 、 $n = 10$ 时,声压级就已经收敛的很好了。

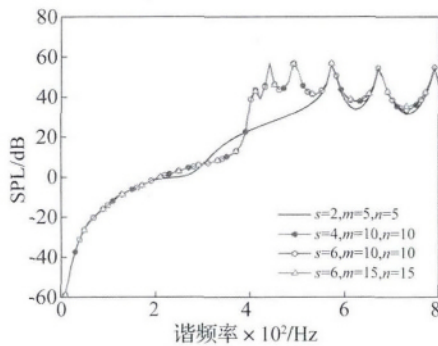


图3 圆锥壳声压级的收敛性

Fig. 3 SPL convergence for conical shell

图4为在商用软件VA One中,采用有限元和边界元相结合的方法建立的圆锥壳的声辐射模型。

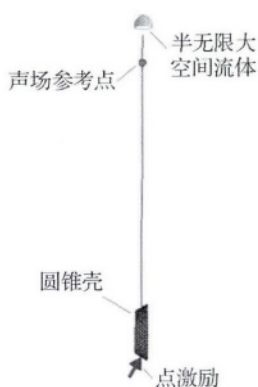


图4 圆锥壳声辐射的有限元/边界元模型

Fig. 4 FEM/BEM model for the acoustic radiation of conical shell

图5为声压级的理论解与数值仿真解的对比,可见在整个计算频率带内,二者整体吻合的较好。

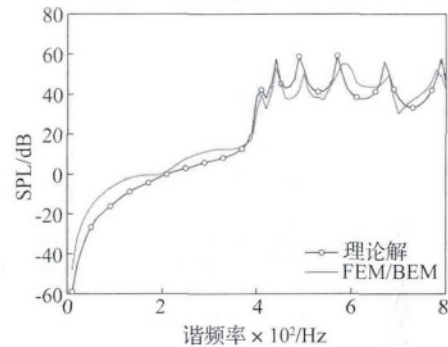


图5 声压级的理论解与数值仿真解的对比

Fig. 5 A comparison for the sound pressure level between the theoretical and numerical solution

3 数值算例和讨论

3.1 不同边界条件下圆锥壳的固有频率的对比研究

通过对简支和固支边界条件下的正交各向异性圆锥壳的频率参数的对比研究,得到两种边界条件下圆锥壳固有频率的变化特点。

圆锥壳体的正交各向异性复合材料参数为: $E_1 = 172.5 \text{ GPa}$, $E_2 = E_1 / r_{12}$, $\mu_{12} = 0.25$, $\eta = 0.01$, $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$ 。其中,弹性模量和泊松比的关系满足 $E_1 \mu_{21} = E_2 \mu_{12}$ 。圆锥壳的几何参数为: $h / r_2 = 0.01$, $(L - L_1) \sin \alpha / r_2 = 0.25$ 。

图6~8给出了母线波数 $m = 1$ 时,两种边界条件下正交各向异性圆锥壳的频率随环向波数增大时的变化特性。其中,对每个半顶角的圆锥壳,给出了几个不同的弹性模量比组合 $r_{12} = 25, 5, 1$ 。随着 r_{12} 的减小,圆锥壳的整体刚度增大,当 $r_{12} = 1$ 时,圆锥壳近似为各向同性圆锥壳。

在图6中,圆锥壳的半顶角 $\alpha = 5^\circ$,两种边界下的圆锥壳的频率都是先减小后增大;在 $n = 0$ 和大周向波数 ($n > 11$) 时,不同弹性模量比的圆锥壳在两种边界条件下的频率之差都较小。对任意的弹性模量比率,当 $0 < n \leq 11$ 时,固支圆锥壳的频率大于简支圆锥壳的频率;当 $n = 4$ 时,两种边界条件下的圆锥壳的频率之差最大。当 $r_{12} = 5$ 和 $r_{12} = 1$ 时,对于大周向波数 ($n > 11$),简支圆锥壳的频率略大于固支圆锥壳的频率。

图7给出了两种边界条件下,半顶角 $\alpha = 30^\circ$ 的正交各向异性圆锥壳的无量纲频率的对比。当 $r_{12} = 25$ 和 $r_{12} = 5$ 时,固支圆锥壳的固有频率明显大于简支圆锥壳的固有频率。对 $r_{12} = 1$,当周向波数较大时 ($n > 11$),简支边界下的固有频率略大于固支边界下的固有频率。

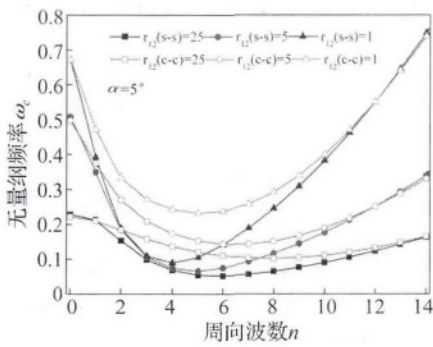


图 6 两种边界下正交各向异性圆锥壳的固有频率比较 $\alpha = 5^\circ$

Fig. 6 Comparison of nondimensional frequencies for orthotropic conical shell with S-S and C-C boundary conditions, $\alpha = 5^\circ$

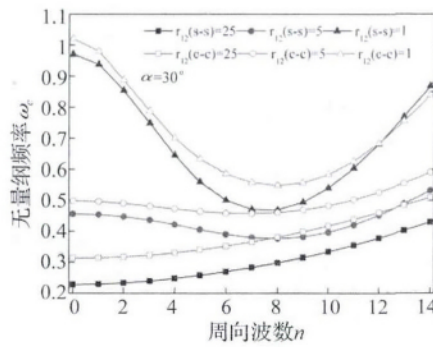


图 7 两种边界下正交各向异性圆锥壳的固有频率比较 $\alpha = 30^\circ$

Fig. 7 Comparison of nondimensional frequencies for orthotropic conical shell with S-S and C-C boundary conditions, $\alpha = 30^\circ$

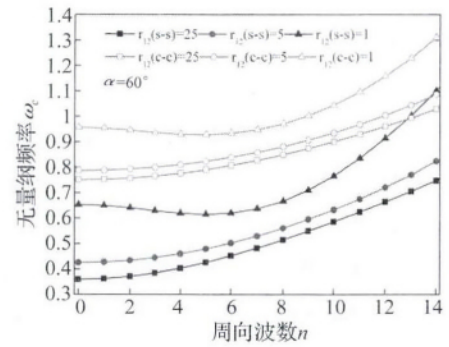


图 8 两种边界下正交各向异性圆锥壳的固有频率比较 $\alpha = 60^\circ$

Fig. 8 Comparison of nondimensional frequencies for orthotropic conical shell with S-S and C-C boundary conditions, $\alpha = 60^\circ$

图 8 给出了两种边界下,半顶角 $\alpha = 60^\circ$ 的正交各向异性圆锥壳的固有频率的对比。可以看到,对任意的弹性模量比率 r_{12} ,固支圆锥壳的频率都明显大于简支圆锥壳的频率。

3.2 不同边界条件下圆锥壳的远场声压的对比研究

采用上节中的正交各向异性圆锥壳来研究简谐激励下圆锥壳的声辐射特性。为方便讨论,假设弹性模量比 $r_{12} = 25$ 。参照 2.2 节的方法,可设定远场距离 $R_0 = 50$ m,单位法向力位于圆锥壳的中面 $((L_1 + L) / 2, \rho)$ 处。经计算,可确定圆锥壳分段数 $s = 10$,波数 m 和 n 都取到 20

时,不同半顶角下的圆锥壳的声压级可全部收敛。

图 9 ~ 11 给出了简支和固支边界条件的正交各向异性圆锥的远场声压级的对比。

在图 9 可见,圆锥壳的半顶角为 5° 时,由于在计算频率范围内的模态密度较大,因此声压级曲线有较多的波动,两条曲线的声压级在量级上相差不大。对简支和固支边界条件,圆锥壳的一阶固有频率分别为 92 和 174 Hz,在图中可以看到,两条曲线在上述两个频率处分别出现了第一个峰值。可观察到,在中高频段,固支圆锥壳的声压级略大于简支圆锥壳的声压级。

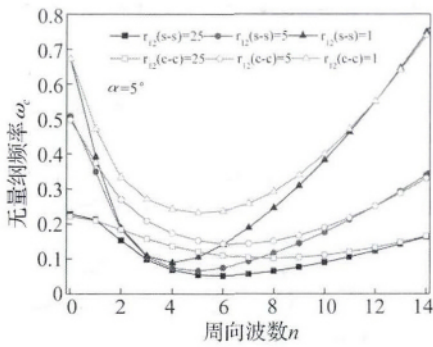


图 9 半顶角为 5° 的正交各向异性圆锥壳在两种边界下的声压级比较

Fig. 9 Comparison of SPL for orthotropic conical shell with S-S and C-C boundary conditions for half cone angle $\alpha = 5^\circ$

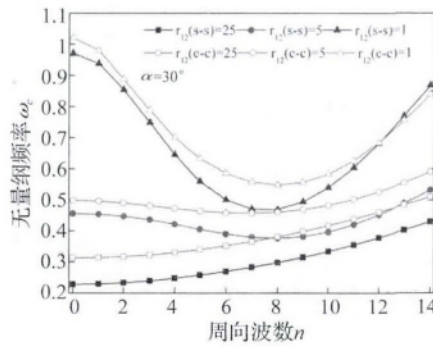


图 10 半顶角为 30° 的正交各向异性圆锥壳在两种边界下的声压级的比较

Fig. 10 Comparison of SPL for orthotropic conical shell with S-S and C-C boundary conditions for half cone angle $\alpha = 30^\circ$

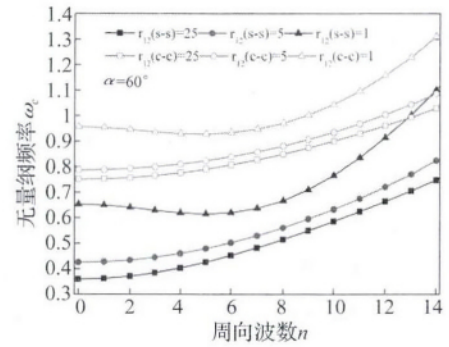


图 11 半顶角为 60° 的正交各向异性圆锥壳在两种边界下的声压级比较

Fig. 11 Comparison of SPL for orthotropic conical shell with S-S and C-C boundary conditions for half cone angle $\alpha = 60^\circ$

图 10 给出了半顶角为 30° 的正交各向异性圆锥壳在两种边界下的声压级的比较。对简支和固支边界条件,圆锥壳的一阶固有频率分别为 378 和 535 Hz,两条曲线在上述两个频率处分别出现了第一个峰值。而在固支圆锥壳的一阶固有频率之前(535 Hz),固支圆锥壳的声压级小于简支圆锥壳的声压级。在大于固支圆锥壳一阶频率的频率段,即 535 ~ 1 290 Hz,固支圆锥壳的声压级明显高于简支圆锥壳的声压级。由于

两条曲线在 1 290 Hz 处交汇,在 1 290 ~ 1 600 Hz 频率段,简支圆锥壳的声压级在整体上高于固支圆锥壳的声压级。

在图 11 中,圆锥壳的半顶角 $\alpha = 60^\circ$,简支和固支边界条件下圆锥壳一阶固有频率分别为 594 和 1 283 Hz。在 1 283 Hz 之前的频率段,简支圆锥壳的声压级整体上远大于固支圆锥壳的声压级。在 1 283 ~ 1 600 Hz 的频率段,二者声压级的幅值相差很小。

4 结 论

本文采用波传播法和 Galerkin 法研究了两端简支和固支边界条件对正交各向异性截顶圆锥壳的振动和声辐射特性的影响。通过与现有文献结果、以及有限元和边界元数值结果的对比,验证了本文振动和声辐射模型的正确性。通过数值算例,可得到以下结论:

(1) 简支和固支边界条件对圆锥壳固有频率的影响与圆锥壳的半顶角的大小以及母线与环向方向的弹性模量比的大小相关。对于小半顶角的圆锥壳($\alpha = 5^\circ$),当弹性模量比较小时($r_{12} = 5, 1$),在大周向波数($n > 11$)处,简支圆锥壳的频率略大于固支圆锥壳的频率;同时,在周向波数 $n = 0$ 和大周向波数($n > 11$)处,两种边界条件下的圆锥壳的频率差很小。随着半顶角的增大,两种边界条件下的频率差也随之增大。对于大半顶角($\alpha = 60^\circ$)的圆锥壳,固支圆锥壳的固有频率整体上都大于简支圆锥壳的固有频率。

(2) 随着圆锥壳半顶角的增大,两种边界条件下的圆锥壳的一阶固有频率之差也随之增大;反映在远场声压级曲线上,表现为两种边界条件下声压级曲线的第一个峰值的距离随半顶角的增大而增大。对于小半顶角($\alpha = 5^\circ$)的圆锥壳,两种边界条件的声压级的幅值在整体上相差不大,在中高频段,固支圆锥壳的声压级略大于简支圆锥壳的声压级。对于较大半顶角的圆锥壳($\alpha = 30^\circ, 60^\circ$),在小于固支边界条件下的圆锥壳的一阶固有频率处,简支圆锥壳的声压级明显大于固支圆锥壳的声压级。

参 考 文 献

- [1] Irie T, Yamada G, Kanko Y. Free vibration of a conical shell with variable thickness [J]. Journal of Sound and Vibration, 1982, 82(1): 83-94.
- [2] Irie T, Yamada G, Tanaka K. Natural frequencies of truncated conical shells [J]. Journal of Sound and Vibration, 1984, 92(3): 447-453.
- [3] Tong L Y. Free vibration of orthotropic conical shells [J]. 附录

简支边界条件下的矩阵系数 C_{11}

$$C_{11} = \frac{K_{11}k_m^2(L-L_1)}{2} + \frac{K_{11}k_m \cos(2k_m L_1)}{2} [Si(2k_m L) - Si(2k_m L_1)] - \frac{K_{11}k_m \sin(2k_m L_1)}{2} [Ci(2k_m L) - Ci(2k_m L_1)] + \frac{K_{22}}{2} \frac{L-L_1}{LL_1} + \frac{K_{22} \cos(2k_m L_1)}{2} \left[-\frac{\cos(2k_m L)}{L} - 2k_m Si(2k_m L) + \frac{\cos(2k_m L_1)}{L_1} + 2k_m Si(2k_m L_1) \right] + \frac{K_{22} \sin(2k_m L)}{2} \left[-\frac{\sin(2k_m L)}{L} + 2k_m Ci(2k_m L) + \frac{\sin(2k_m L_1)}{L_1} - 2k_m Ci(2k_m L_1) \right] + \frac{K_{66}n^2}{2 \sin^2 \alpha} \frac{L-L_1}{LL_1} +$$

International Journal of Engineering Science, 1993, 31(5): 719-733.

- [4] Mecitoglu Z. Vibration characteristics of a stiffened conical shell [J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 197(2): 191-206.
- [5] Lam K Y, Li H. Vibration analysis of a rotating truncated circular conical shell [J]. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34(17): 2183-2197.
- [6] Lam K Y, Li Hua. Influence of boundary conditions on the frequency characteristics of a rotating truncated circular conical shell [J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 223(2): 171-195.
- [7] 吴仕昊, 瞿叶高, 华宏星. 圆锥壳-圆柱壳-球壳组合结构自由振动分析 [J]. 振动与冲击, 2013, 32(6): 109-114.
- WU Shi-hao, QU Ye-gao, HUA hong-xing. Free vibration analysis of joined conical-cylindrical-spherical shells [J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(6): 109-114.
- [8] Caresta M, Kessissoglou N J. Vibration of fluid loaded conical shells [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2008, 124(4): 2068-2077.
- [9] 曹雄涛, 华宏星, 湛勇. 层合圆锥壳的声辐射(英文) [J]. 船舶力学, 2011, 15(12): 1439-1450.
- CAO Xiong-tao, HUA Hong-xing, CHEN Yong. Acoustic radiation from laminated conical shells [J]. Journal of Ship Mechanics, 2011, 15(12): 1439-1450.
- [10] Luo W, Schmidt H. Three-dimensional propagation and scattering around a conical seamount [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2009, 125(1): 52-65.
- [11] Leissa A W. Vibration of shells [M]. Washington, DC: NASA SP-288, 1973.
- [12] Soedel W. Vibrations of shells and plates, 3rd ed [M]. New York: Marcel Dekker, Inc, 2004.
- [13] Junger M C, Feit D. Sound, structures, and their interactions [M]. Cambridge, MIT press, 1986.
- [14] 商德江, 何祚镛. 加肋双层圆柱壳振动声辐射数值计算分析 [J]. 声学学报, 2001, 26(3): 193-201.
- SHANG De-jiang, HE Zuo-yong. The numerical analysis of sound and vibration from a ring-stiffened cylindrical double-shell by FEM and BEM [J]. Acta Acustica, 2001, 26(3): 193-201.
- [15] 何祚镛. 结构振动与声辐射 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2001.

$$\frac{K_{66}n^2 \cos(2k_m L_1)}{2 \sin^2 \alpha} \left[-\frac{\cos(2k_m L)}{L} - 2k_m Si(2k_m L) + \frac{\cos(2k_m L_1)}{L_1} + 2k_m Si(2k_m L_1) \right] + \frac{K_{66}n^2 \sin(2k_m L_1)}{2 \sin^2 \alpha} \left[-\frac{\sin(2k_m L)}{L} + 2k_m Ci(2k_m L) + \frac{\sin(2k_m L_1)}{L_1} - 2k_m Ci(2k_m L_1) \right] - \frac{(L-L_1)\rho h \omega^2}{2}$$

式中: $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$, $Ci(x) = -\int_0^x \frac{\cos(t)}{t} dt$