第三章 偏微分方程的数学特性：对CFD的影响

某种认知如果不是以数学或者以基于数学科学的其他认知为基础，那么这一认知就是不确定的。

列奥那多·达·芬奇，1425-1519

王 娴

西安交通大学航天学院

内　容

- 简介
- 拟线性偏微分方程的分类
- 不同类型偏微分方程的一般特性

1. 简介

数学特性
不同！！

对于同样的流动控制方程，甚至方程本身是同一的，却会在不同的流动区域展现出完全不同的解。

- ◆ 流体力学控制方程：积分型、微分型；
- ◆ 研究这些方程的数值求解方法之前，非常有必要检查一些偏微分方程本身的一些数学特性；
- ◆ 任何有效数值求解必须体现出其遵循了这些控制方程的一般数学特性。

1. 简介

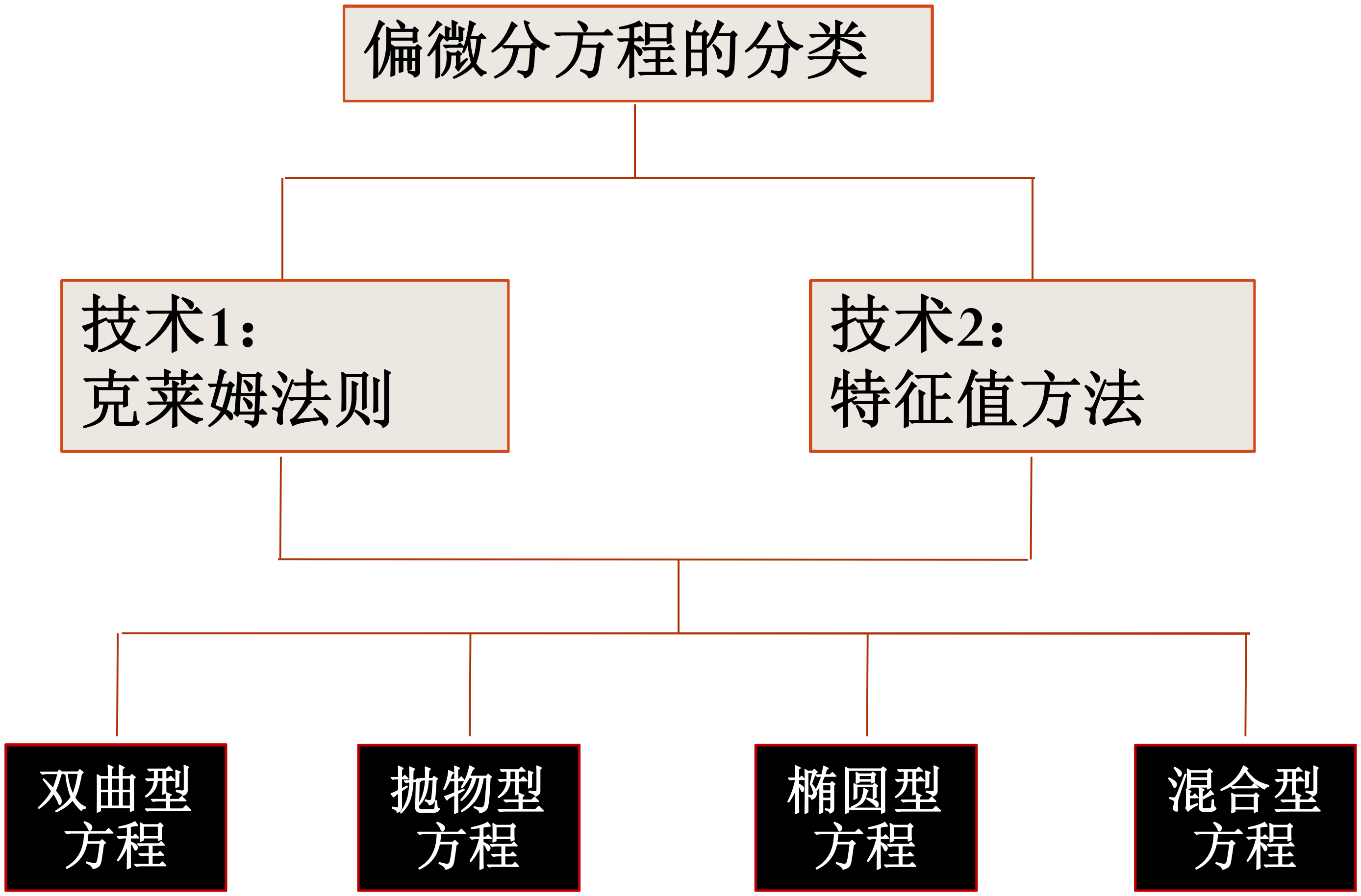
拟线性系统（quasilinear partial differential equation）：

最高阶偏导数均是线性的，即不存在最高阶偏导数的乘方或指数形式，只存在最高阶偏导数本身与一个系数的乘积，该系数是因变量本身的函数，这样的方程组被称为拟线性系统。

黏性流动：
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F_x$$

无黏流动：
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+F_x$$

2. 拟线性偏微分方程的分类



2. 拟线性偏微分方程的分类

二阶二元的拟线性偏微分方程，数学上的一般形式为：

$$a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y + f\phi = g(x,y)$$

下标x,y 表示对该自变量的偏导数，系数a,b,c,d,e,f 可以是因变量$\boldsymbol{\Phi}$及自变量 x, y 的函数

$$a\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + d\frac{\partial\phi}{\partial x} + e\frac{\partial\phi}{\partial y} + f\phi = g(x,y)$$

2. 拟线性偏微分方程的分类

对由上述偏微分方程所描述的物理过程，系数a，b，c之值一般随求解区域中的位置而异。对区域中某点 $P(x_0,y_0)$，视（b^2-4ac）大于、等于或小于零的情况，可把微分方程在该点称为：

$b^2-4ac > 0$，双曲型（hyperbolic），过P点有两条实的特征线；

$b^2-4ac = 0$，抛物型（parabolic），过P点有一条实的特征线；

$b^2-4ac < 0$，椭圆型（elliptic），过P点没有实的特征线；

2. 拟线性偏微分方程的分类

如果在整个求解区域内，描写物理问题的偏微分方程都属于同一个类型，则该物理问题就可以用偏微分方程的类型来称谓。如双曲型问题，抛物型问题，椭圆型问题。

在有的物理问题中，同一求解区域内的偏微分方程可能属于不同的类型，称谓混合型问题。

2. 拟线性偏微分方程的分类

例：

二阶波动方程

一阶波动方程

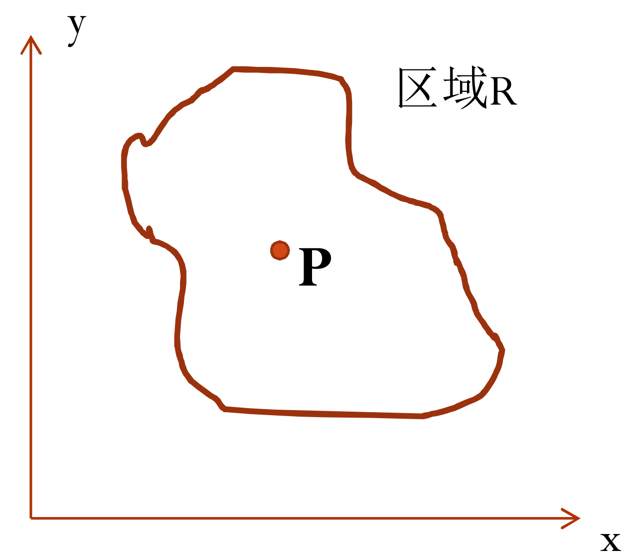
一维非稳态扩散方程

二维稳态扩散方程。。。

3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

依赖区与影响区

在x-y平面上的区域R求解拟线性偏微分方程（组），所谓任意一点P的：

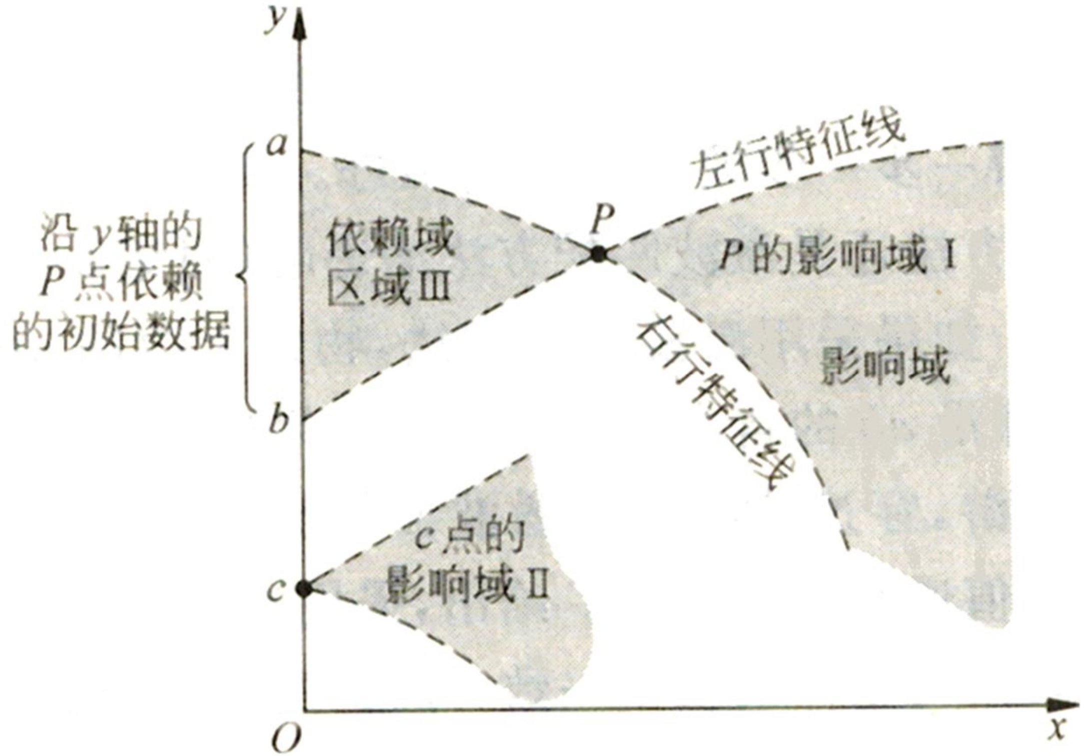


依赖区： R中一些点的集合，为了唯一地确定P点的值，那些点上的值必须完全给定。

影响区： R中一些点的集合，当P点值变化时，那些点上的值也随之变化。

3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

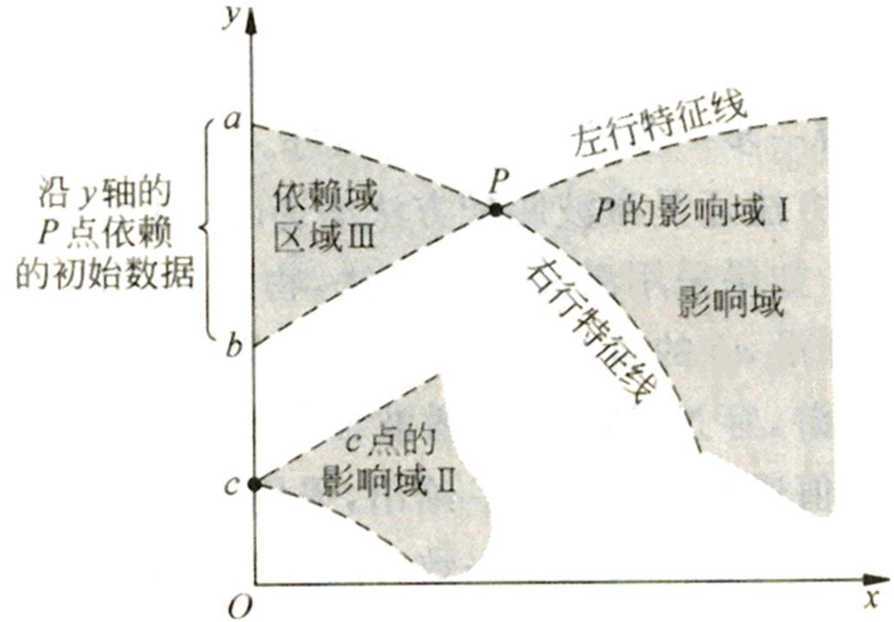
双曲型方程



◆ P 点的信息只影响两条特征线之间的区域 I；

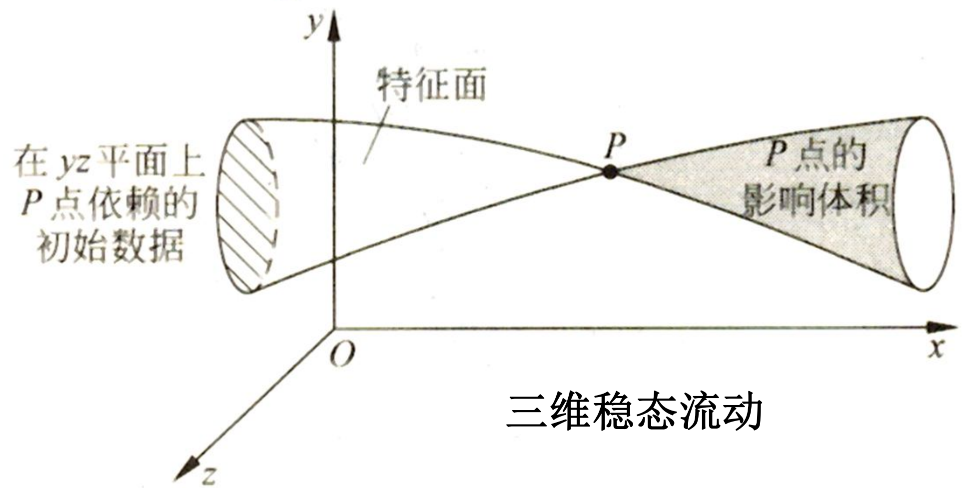
◆ P 点的解仅取决于a和b之间的边界。P 点的性质，仅取决于区域III中发生的事情；

3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响



双曲型方程

- ◆ ab段之外的c点信息，沿过c点的两条特征线传播，仅影响区域II；

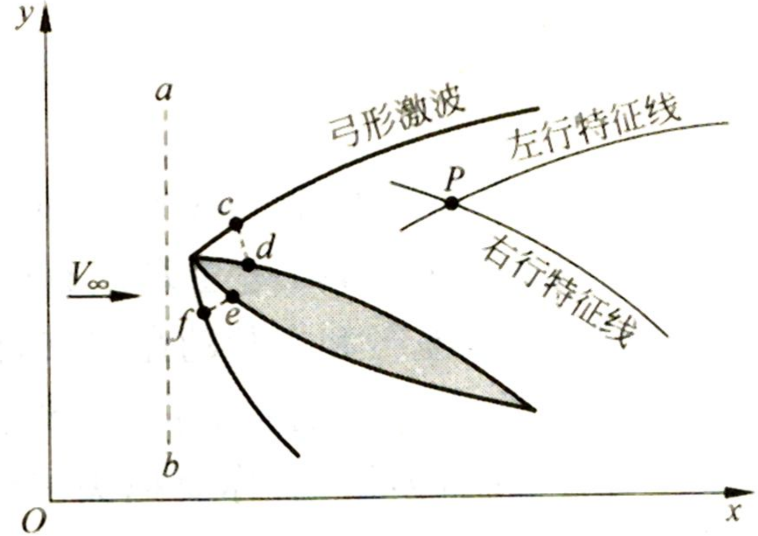


三维稳态流动

- ◆ CFD→ 双曲型→ 推进（步进）求解法：从给定的初始条件，即图中y轴一步一步沿x方向推进，从而计算整个流场。

3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

双曲型方程



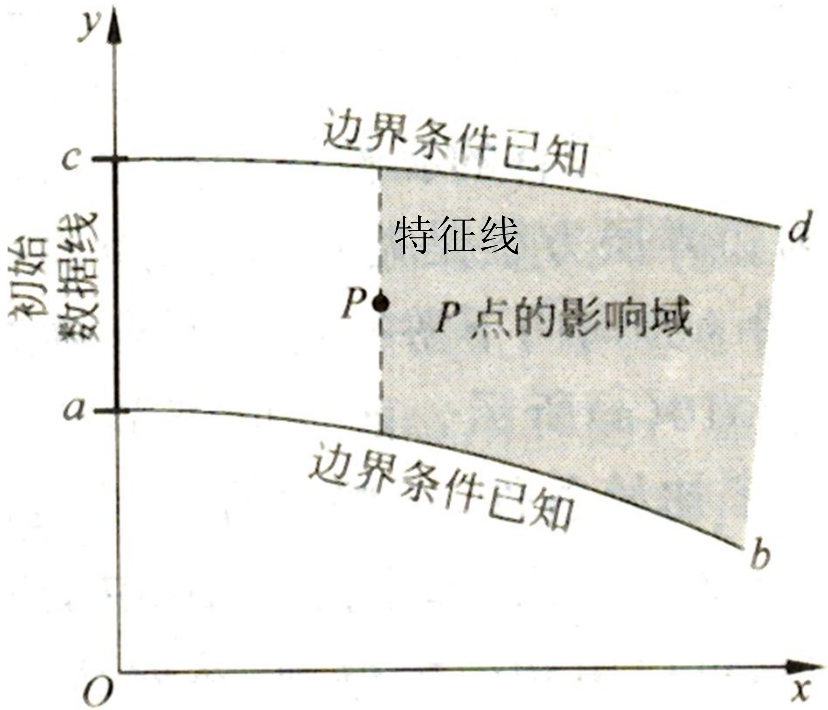
超声速流动流过二维圆弧翼型

- ◆ 物理学中的波动方程
- ◆ 空气动力学中稳态无黏超声速流动
- ◆ 空气动力学中无黏流体非稳态流动
- ◆ 不考虑粘性时气体在管道内的一维非稳态流动
- ◆ 发生在极短时间内的导热过程

3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

抛物型方程

◆ 过P 点只有一条特征线，依赖区与影响区以特征线为界而截然分开；



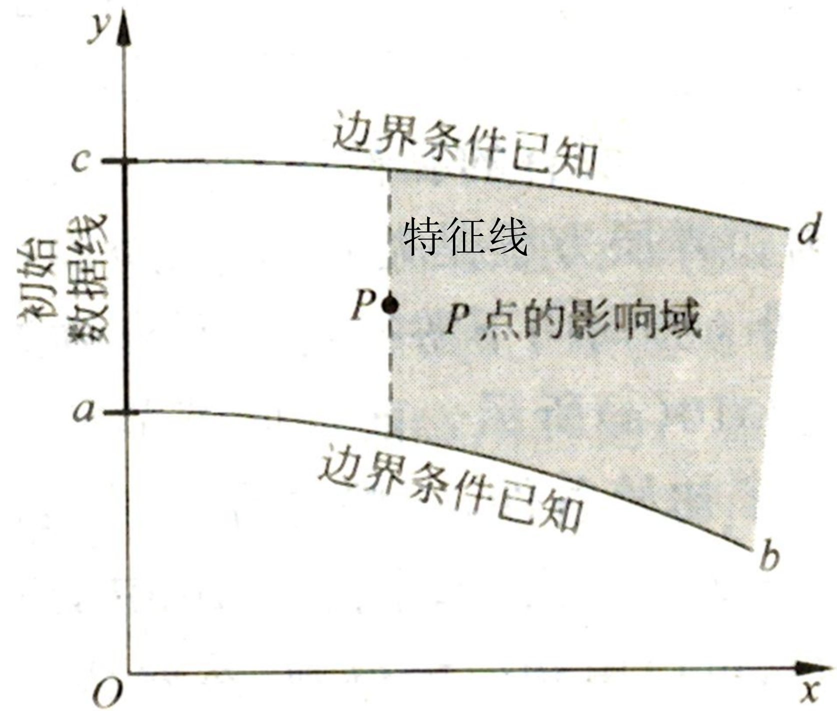
二维抛物型方程解的区域和边界

◆ 描写物理学中的一类步进问题：因变量与时间有关，或问题中有类似于时间的变量，又称初值问题；

3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

抛物型方程

◆ 求解区域是一个开区间，计算时从已知的初值出发，初步向前推进，依次获得适合于给定边界条件的解 ---步进法。



二维抛物型方程解的区域和边界

3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

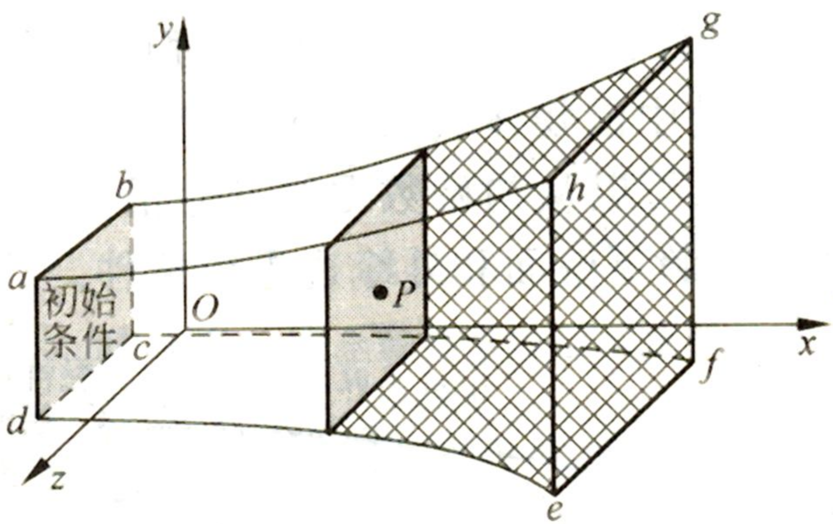
抛物型方程

依赖区与影响区以特征线为界而截然分开

物理意义

◆ 非稳态导热：

某一瞬时物体中的温度分布取决于该瞬时以前的情况及边界条件，而与该瞬时以后将要发生的情形无关。



三维抛物型方程解的区域和边界

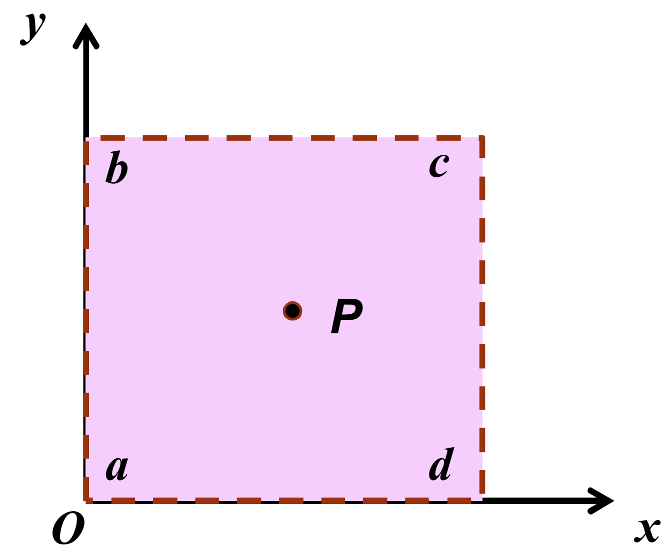
◆ 稳态边界层流动与换热：

下游的物理量取决于上游，而上游的物理量不会受下游影响。

3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

椭圆型方程

◆ 特征线是虚的，与特征线相关的数值方法不适合于求解椭圆型方程；



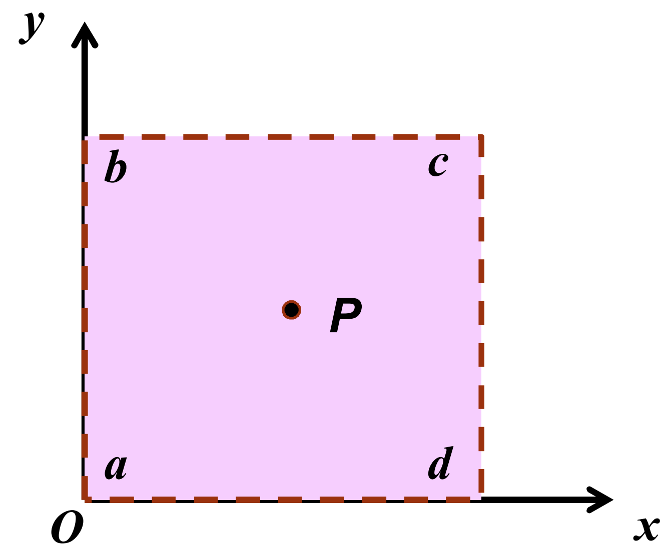
二维椭圆型方程解的区域和边界

◆ 不受影响区和依赖区的限制，信息可以沿各个方向传播到任何地方；

3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

椭圆型方程

- P点影响了区域中的每一个点，反过来说，整个封闭边界abcd均会影响P点的解，所以，P点的求解必须与区域中所有点的求解同时进行；
- 必须在整个边界上abcd应用边界条件—边值问题。



二维椭圆型方程解的区域和边界

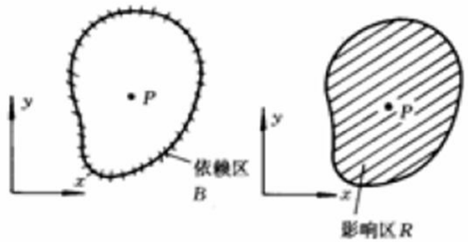
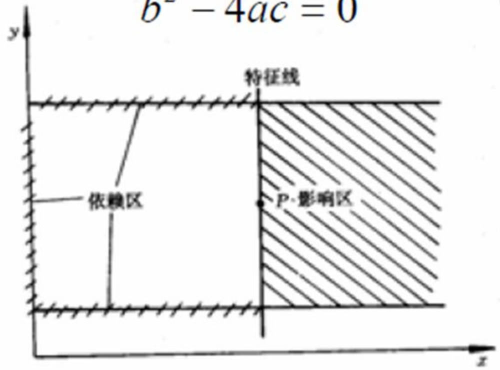
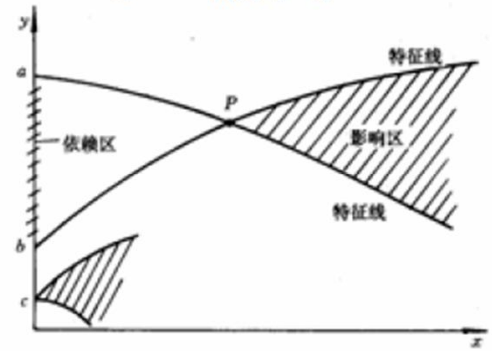
3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

椭圆型方程

- ◆ 稳态、亚声速无黏流动
- ◆ 不可压缩无黏流动
- ◆ 稳态导热过程、有回流的流动、对流换热

椭圆型离散方程求解的基本方法：各节点上的代数方程必须联立求解，而不能先解得区域中某一部分上的值后再去确定其余地区上的值。

3. 不同类型方程的一般特性 例

<table>
<tr><th>椭圆型</th><th>抛物型</th><th>双曲型</th></tr>
<tr>
<td>$b^2-4ac<0$

</td>
<td>$b^2-4ac=0$

</td>
<td>$b^2-4ac>0$

</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$ $$(a=1,b=0,c=1)$$ $$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$</td>
<td>$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$ $$(a=0,b=0,c=a)$$ $$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$</td>
<td>$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$ $$(a=1/c^2,b=0,c=-1)$$ $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=C^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$ $$(a=1,b=0,c=-C^2)$$</td>
</tr>
</table>

3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

椭圆型方程的定解条件

不需要给出初始条件，但必须在所有边界给出边界条件

$$(\phi)_\Gamma = g(x, y, z, t)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_\Gamma = g(x, y, z, t)$$

$$\left(k\frac{\partial \phi}{\partial n} + h\phi\right)_\Gamma = g(x, y, z, t)$$

抛物型方程的定解条件

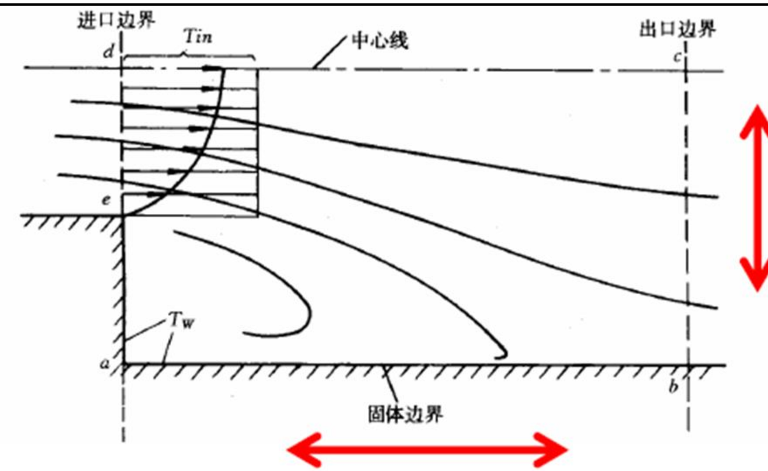
给出初始条件和全部的进出口边界条件

$$t = 0, \quad \phi = f(x, y, z)$$

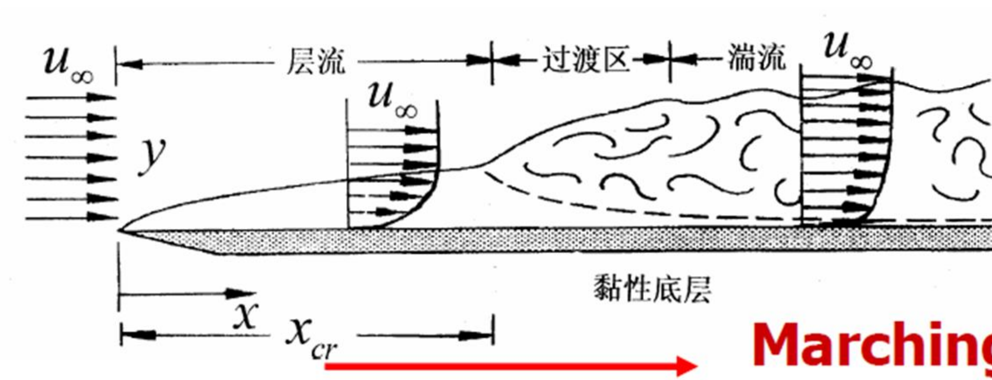
3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

与数值解的关系

（1）椭圆型问题：流动有回流，必须全场同时求解；



（2）抛物型问题：流动无回流，可以沿主流方向步步逼进，不必全场同时求解，大大节省时间。



Marching method

3. 不同类型方程的一
物理和计算的影响

偏微分方程组并不总是可以方便地划分为双曲型、抛物型或椭圆型，有时具有混合特性

混合型方程

速度和温度对时间的偏导数体现了抛物型特性

纳维-斯托克斯方程：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \boxed{\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}$$

部分椭圆型来自于黏性项，它提供了在流动中将信息反馈到上游的机制

3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

单向坐标与双向坐标

单向坐标：在坐标轴上，扰动仅能向一个方向传递，同时该坐标上任一点处的物理量也仅收到来自一侧条件的影响。

One-way coordinate

双向坐标：在坐标轴上，扰动可以向两个方向传递，同时该坐标上任一点处的物理量之值可受到两侧条件的影响。

Two-way coordinate

3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

单向坐标与双向坐标

- 一个多维的非稳态流动（或导热）问题中，时间是单向坐标，所有的空间坐标均为双向坐标。
- 抛物型这一名称表示了一种单向作用的概念，而椭圆型这一术语则具有双向作用的意义。
- 在描述微分方程的类别时，应当指出是对什么坐标而言的。
- 在不同的坐标方向上，扰动或影响的传递具有不同的特性。

3. 不同类型方程的一般特性：对流体力学物理和计算的影响

单向坐标与双向坐标

物理意义的称谓

如果所研究的问题中有一个空间坐标是单向的，就称这种流动或换热是边界层型的问题；

如果所有的空间坐标都是双向的，就称为回流问题。

椭圆型与抛物型

数学角度命名

4. 模型方程及其数学物理性质

什么是模型方程

- 流体力学方程组具有未知数多，空间变量多，非线性强等特点，很难找到流体力学方程组一般情况下的解析解，为此，无法直接分析和理解流体力学方程组所反映的流动本质。

- 另一方面，对某种数值算法的检验与验证非常重要，如精度、误差、稳定性等，希望可以找到一些简单但又可以反映流动本质的模型方程对算法进行初步的试算与分析。

模型方程是流体力学方程组在某种程度上的简化，但又保留流体力学方程组的一些基本数学、物理特性。

4. 模型方程及其数学物理性质

模型方程特点

- 未知量数目较少（一般只含一个未知量）；
- 自变量数目较少（一般只含一个空间变量，一个时间变量）；
- 线性或简单的非线性方程；
- 能较好的反映流动的基本特征；
- 可以找到解析解，可以用来检验与验证数值解。

4. 模型方程及其数学物理性质

N-S方程分析

$$\underline{\frac{\partial u}{\partial t}}+\underline{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}}=\underline{-\frac{\nabla p}{\rho}}+\underline{f_x}+\underline{\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)}$$

•主要部分：

非定常项，对流项，压力梯度效应项，体积力项，粘性扩散项

•一维对流—扩散方程（Burgers方程）

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

4. 模型方程及其数学物理性质

几种典型模型方程

- 对流方程（波动方程）

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (a=const) \qquad (双曲型)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (双曲型)$$

- 扩散方程（热传导方程）

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (t>0,\beta>0) \qquad (抛物型)$$

4. 模型方程及其数学物理性质

几种典型模型方程

- 一维对流—扩散方程（**Burgers方程**）

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad(\alpha,\beta=const)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad(\beta=const)$$

4. 模型方程及其数学物理性质

几种典型模型方程

- 平衡方程（Laplace方程和Poisson方程）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (\text{椭圆型})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) \qquad (\text{椭圆型})$$

- 浅水波方程（Kdv方程）

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\delta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \qquad (\alpha,\delta=const) \qquad (\text{抛物—双曲型})$$

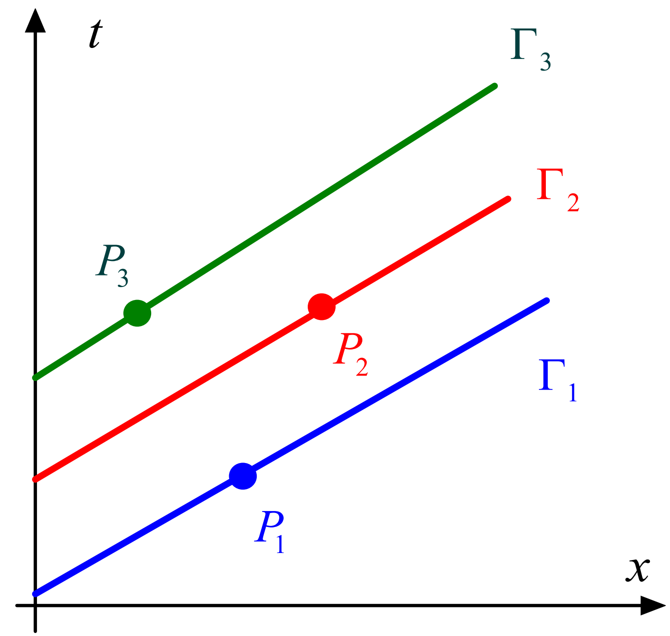
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\delta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \qquad (\delta=const) \qquad (\text{抛物—双曲型})$$

4. 模型方程及其数学物理性质

一维线性对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0\qquad(a=const)$$

初始条件： $u(x,0)=\varphi(x)$



在(x,t)平面上总可以找到一条

曲线 Γ ，其切向方向如下：

在该线上扰动是不变的----特征线

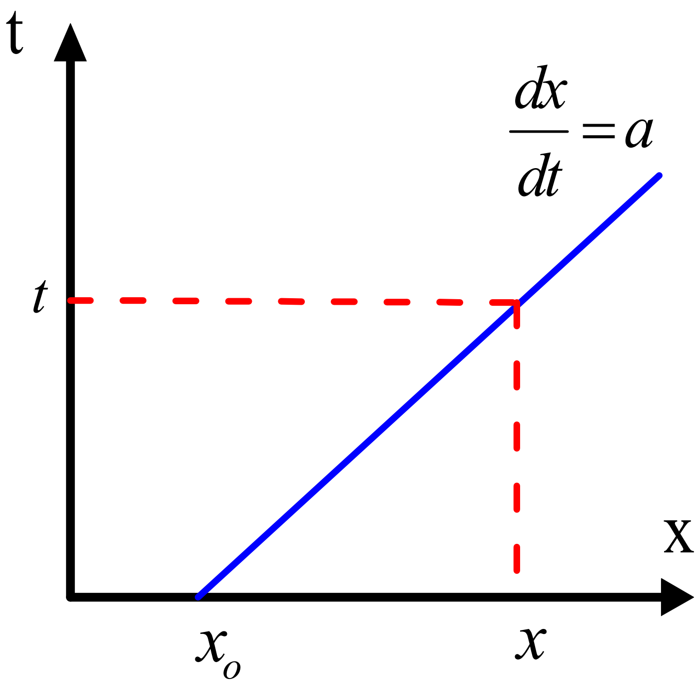
$$\Gamma:\begin{cases}\lambda_t=\dfrac{dt}{ds}=1\\ \lambda_x=\dfrac{dx}{ds}=a\end{cases}$$

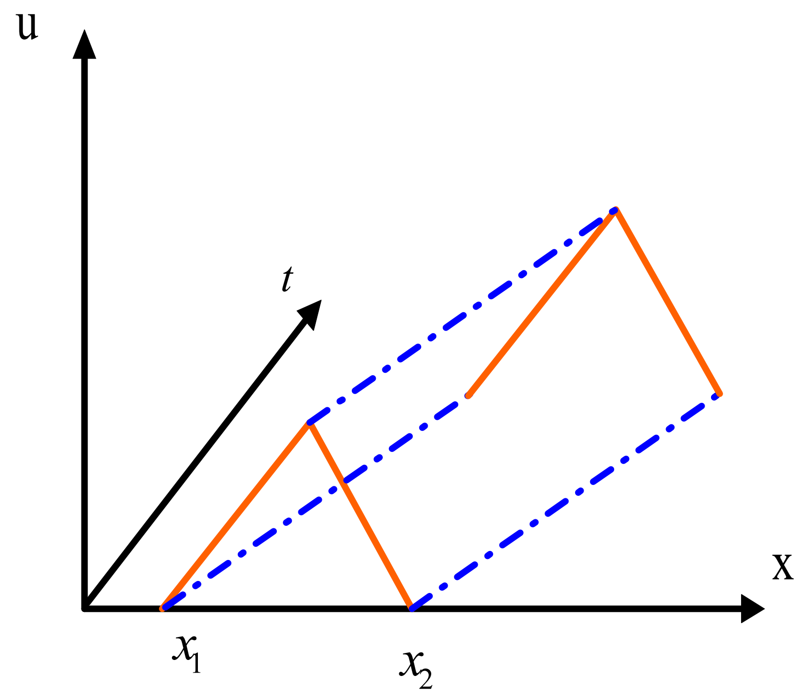
$$\left.\frac{du}{ds}\right|_{\Gamma}=\frac{\partial u}{\partial t}\bullet\frac{dt}{ds}+\frac{\partial u}{\partial x}\bullet\frac{dx}{ds}=\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

4. 模型方程及其数学物理性质

一维线性对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (a = const)$$





$$u(x,t) = u(x_0,0) = \varphi(x_o) = \varphi(x - at)$$

4. 模型方程及其数学物理性质

一维非线性对流方程

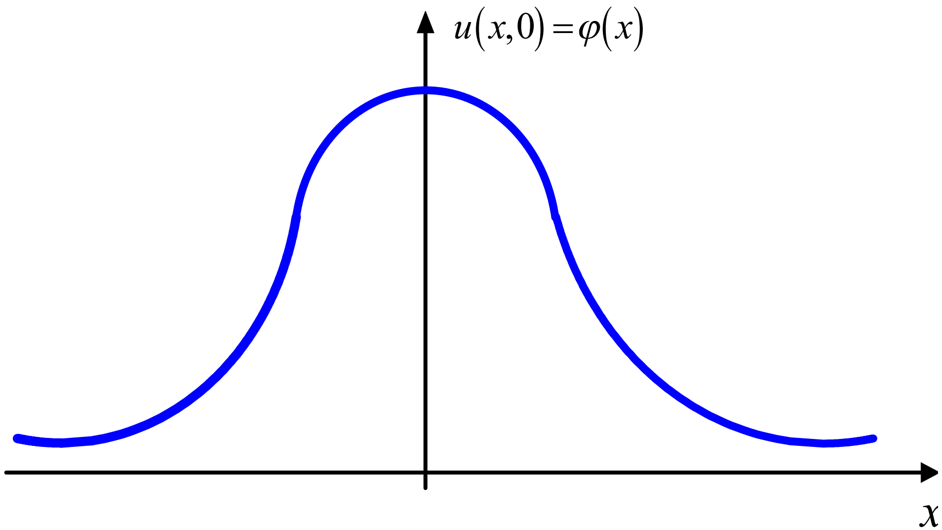
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

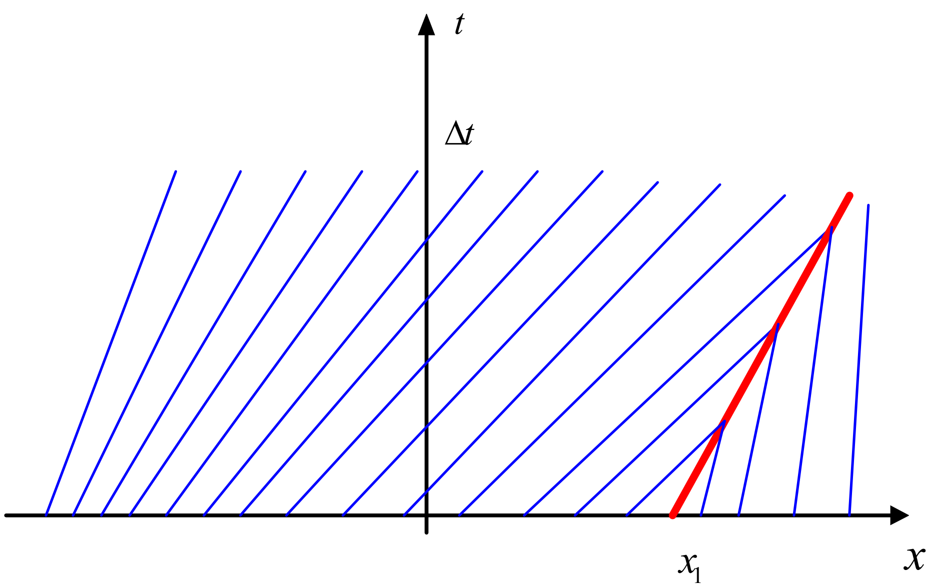
初始条件： $u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right)$

特征线： $\dfrac{dx}{dt}=u$

特征线斜率依赖于当地u值。

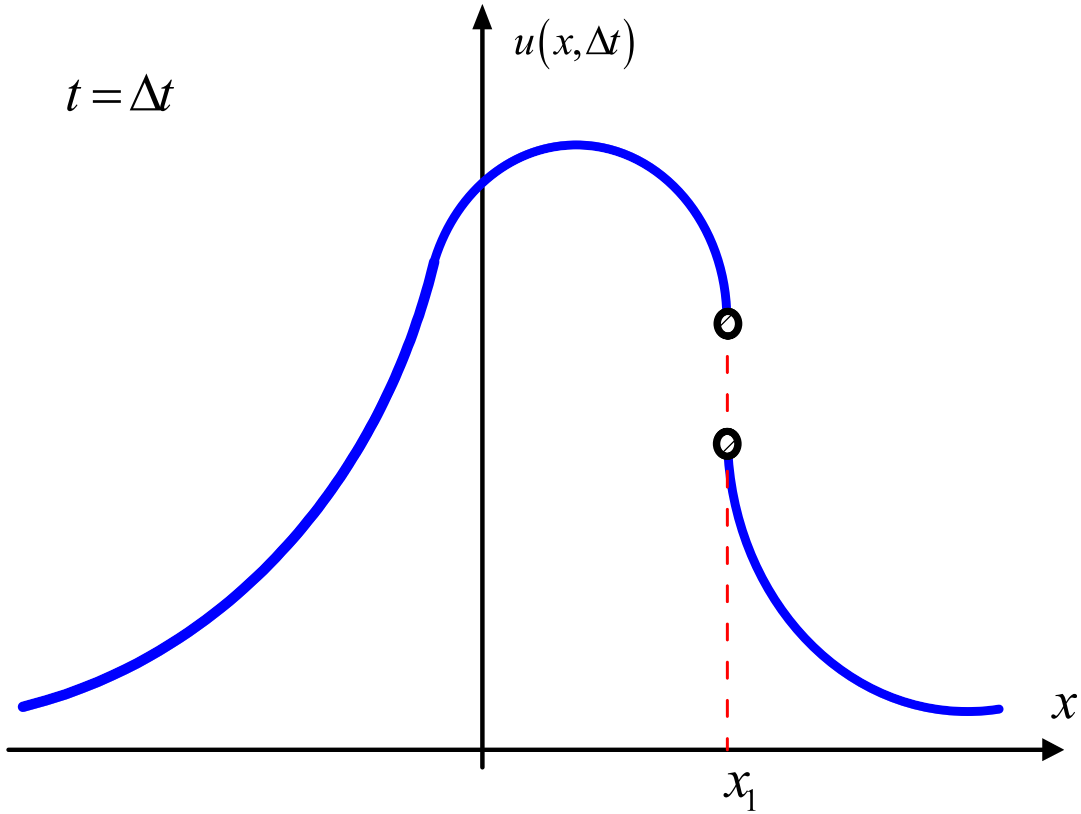
非线性带来的新问题：特征线重叠，速度出现多值！





4. 模型方程及其数学物理性质

一维非线性对流方程



激波间断的形成

反映了流动中波阵面被压缩和增强，最后形成激波间断

4. 模型方程及其数学物理性质

一维（非）线性对流方程

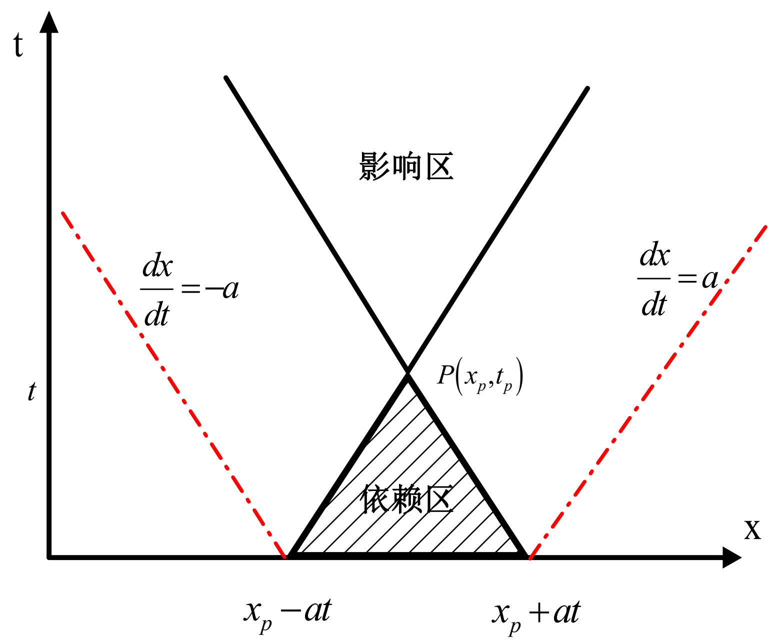
➢当波速 $a=(x,t)$ 不为常数，虽然特征线随时间而变化，但仍为平行的直线簇，当 $t=t_0$ 时，初始函数的幅值与形状仍是不变的。

➢**波动方程**是对流方程的另一种形式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (a = const)$$

初始条件： $u(x,0)=\varphi(x)$

$$u(t,0)=g(x)$$



通解：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\tau)\,d\tau$$

两条特征线

4. 模型方程及其数学物理性质

对流方程的数学物理性质

1. 对流方程是双曲型方程，对流方程所反映的流动特性可以用特征线来描述，流场中扰动沿特征线传播；
2. 流场中扰动传播速度是有限的，并且传播具有方向性（如线性对流方程扰动传播速度为a，a>0向正方向传播，a<0向负方向传播）；
3. 非线性对流方程的特征线可能会发生聚集现象，在流场中出现物理量间断；
4. 对于非线性对流方程，即使初始条件充分光滑连续，解也可能存在间断。

4. 模型方程及其数学物理性质

一维扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad\left(t>0,\beta>0\right)$$

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\qquad -\infty<x<\infty\quad \text{初始条件}$$

微分方程理论已经证明：只要初值 $\varphi\left(x\right)$ 在 $\left|x\right|<\infty$ 范围内是连续和有界函数，扩散方程的解一定存在，且解是唯一的、而且解连续的依赖于它的初值。

其解为：

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\beta t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\xi\right)\exp\left[-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4\beta t}\right]d\xi$$

4. 模型方程及其数学物理性质

扩散方程的数学物理性质

1. 扩散方程是抛物型方程，它描述具有耗散机制的物理现象；
2. 对于扩散方程，不管在初始时刻 $\varphi(x)$ 的分布如何集中，在流场中的任何扰动将瞬时传播到无穷远，扰动传播速度是无限大的，任何局部的扰动会立刻影响全场；
3. 扩散方程不会形成物理量的间断，任何间断都会被瞬时光滑掉；
4. 扩散方程存在极值原理，即如果初值有界 $m \le \varphi(x) \le M$ ，则解一定有界 $m \le u(x,t) \le M$ 。

4. 模型方程及其数学物理性质

Burgers方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (\beta = const)$$

Burgers方程既具有双曲型方程的数学性质，又有抛物型方程数学性质，在流体流动中，**Burgers**方程既能反映无粘流动**Euler**方程组特性，也能反映粘性流动**N-S**方程的性质。

4. 模型方程及其数学物理性质

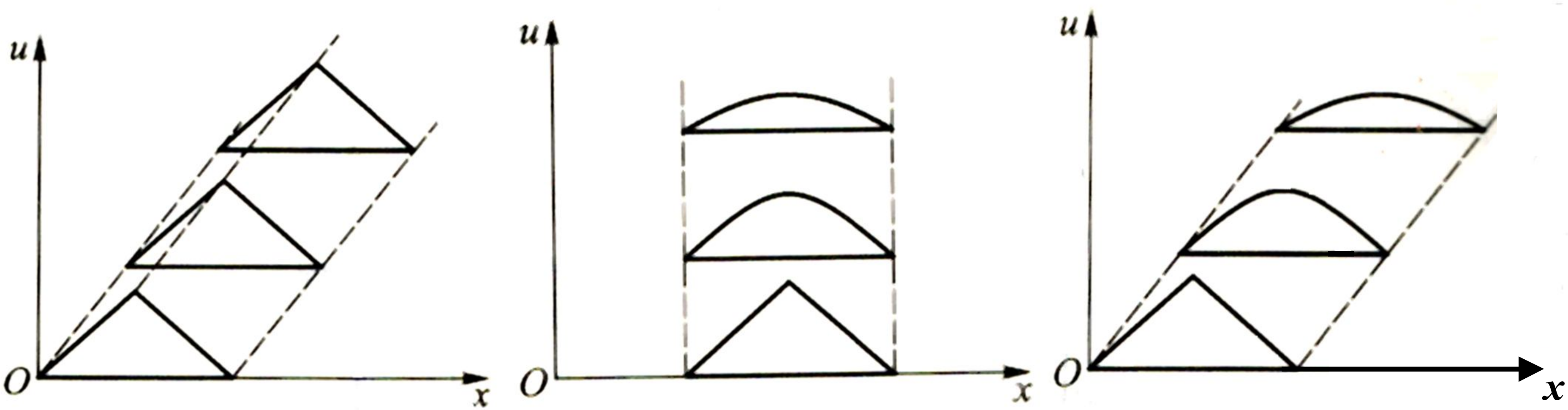
扩散方程的数学物理性质

1. Burgers方程的解是单值连续的，在流场当中不会出现物理量的间断；
2. Burgers方程解具有**波动性**，在流场中扰动沿特征线传播，同时，Burgers方程具有**粘性耗散效应**，扰动在传播的过程中幅值衰减。

4. 模型方程及其数学物理性质

对流方程、扩散方程、对流-扩散方程扰动传播特性

三种不同模型方程当初值分布为一个三角形时，其解的不同数学物理性质示意图



三角形初值的幅值和形状保持不变，传播速度有限----对流方程

三角形初值的幅值越来越小，形状发生变化，且局部扰动会影响全流场----扩散方程

三角形初值的幅值越来越小，形状会发生变化，但传播速度却是有限的----对流-扩散方程

5. 总结

- 许多方程可被清晰地定义成双曲型、抛物型或椭圆型，另外，如非定常的纳维-斯托克斯方程具有混合特性；
- 双曲型和抛物型方程的主要数学特性是，可以借助自身从一个已知的初始平面或线出发推进求解 --- 步进法；
- 椭圆型方程，一个给定点上的流动变量必须同时与流场中其他所有点上的流动变量一起求解---边值问题；
- 椭圆型、抛物型及双曲型方程的不同数学特性是这些方程所描述的不同物理特性的直接反应。

5. 总结

	可压、黏性流动N-S方程组	可压、无黏流动Euler方程组	不可压、黏性流动N-S方程组	可压、无黏流动Euler方程组
非定常	抛物-双曲型	双曲型	椭圆-抛物型	椭圆-双曲型
定常	椭圆-双曲型	亚声速：椭圆-抛物型 超声速：双曲-抛物型	椭圆型	椭圆-双曲型

5. 总结

- 拟线性系统
- 拟线性偏微分方程的分类
- 不同类型方程的一般特性
  - 椭圆型、抛物型、双曲型的影响区与依赖区
  - 典型的椭圆型方程及其定解条件
  - 典型的抛物型方程及其定解条件
  - 与数值解的关系
- 单向坐标与双向坐标
- 模型方程的特点，几种典型的模型方程及特征