

第八章 代数方程组的数值解法

王 嫻

西安交通大学航天学院

内容

本章内容：对流动传热问题的控制方程进行离散后所形成的代数方程组的求解方法，这是对物理过程进行数值模拟的最后一个重要环节。

- 代数方程组求解方法概述
- 求解代数方程组的迭代法
- 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

1. 代数方程组求解方法概述

1.1 多维流动换热问题离散方程组系数矩阵的特点

压力泊松方程，导热问题，离散方程总可以表示成以下形式：

$$a_p P_p + \sum (-a_{nb}) P_{nb} = b$$

$$AP = b$$

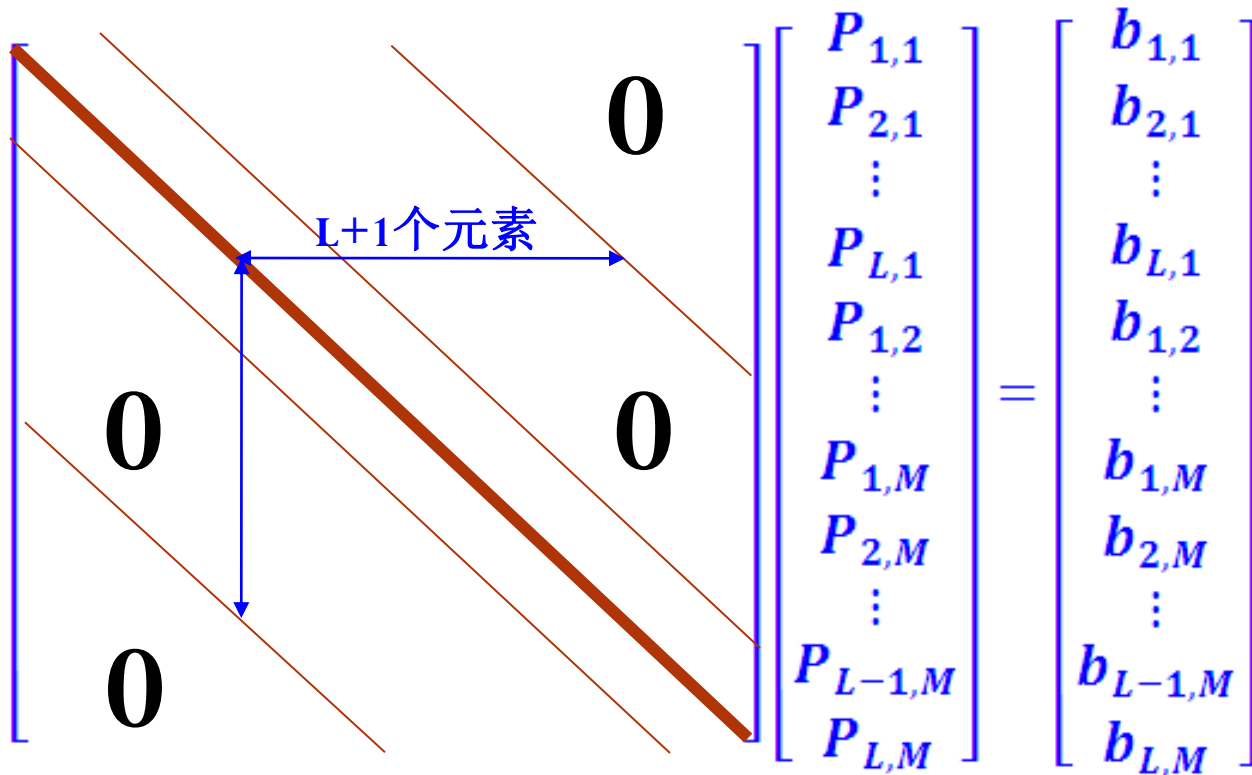
x方向L个节点，y方向M个节点，共有L×M个节点

- ◆系数矩阵A中各主对角元素均大于零；
- ◆除了主对角线及其上下相邻几个位置上元素不为零外，只有离开主元素 L 个元素的位置上才为非零元素，其余全为零；

1. 代数方程组求解方法概述

$$AP = b$$

1.1 多维流动换热问题离散方程组系数矩阵的特点



1. 代数方程组求解方法概述

1.2 求解代数方程组的直接解法与迭代法

◆ **直接解法**：通过有限步的数值计算可以获得代数方程真解的方法（设不考虑舍入误差）。

➤ **Cramer法则**：只适于求解未知数个数极少时的情形。

若未知数个数为 N ，则这种方法的计算次数近似地正比于 $(N+1)!$ 。Cramer法则根本无法应用与数值计算。

1. 代数方程组求解方法概述

1.2 求解代数方程组的直接解法与迭代法

直接解法

➤ Gauss消元法：先要把系数矩阵通过消元而化为上三角阵然后逐一回代

若未知数个数为 N ，该法所用乘法的次数近似正比于 N^3 。

如二维正方形域内的Laplace方程，当采用3200个节点时，采用Gauss消元法所需的计算次数是完成一轮Jacob迭代所需计算次数的168倍！

即使是收敛很慢的
迭代方法也可能比
直接法更有效！

1. 代数方程组求解方法概述

1.2 求解代数方程组的直接解法与迭代法

直接解法

➤ 求解三对角阵（一维问题）的直接解法：TDMA，Thomas算法

TDMA与Thomas算法常用于五对角阵（二维）及七对角阵（三维）迭代求解法中的直接求解部分---加快收敛速度

1. 代数方程组求解方法概述

1.2 求解代数方程组的直接解法与迭代法

$$a_p P_p + \sum (-a_{nb}) P_{nb} = b$$

◆ 迭代解法：假设解记作 $P = A^{-1}b$ ，构造多维空间的一个无限序列 $P^{(n)}$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时，它收敛于 $A^{-1}b$ 。一般地，第 n 次迭代所得之值取决于 A ， b 及上一次迭代值 $P^{(n-1)}$ ，即：
$$P^{(n)} = f(A, b, P^{(n-1)})$$

- 研究：
1. 如何构造迭代方式；
 2. 构造的迭代序列是否收敛；
 3. 如果收敛，如何提高收敛速度。

1. 代数方程组求解方法概述

1.3 代数方程组迭代求解的终止判据

1. 规定迭代轮数（全场的求解变量都作一次更新的计算过程为一轮次）
2. 相对偏差小于允许值

$$\left| \frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(n)}}{\phi^n} \right|_{\max} \leq \varepsilon \qquad \left| \frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(n)}}{\phi_{\max}^{(n)}} \right|_{\max} \leq \varepsilon$$

ε 取决于计算问题、需要的精度及采用的迭代方法。如果采用的迭代方法收敛很慢，则取小值，否则很容易被判断为迭代已收敛而实际尚未收敛。一般取为： $10^{-3} \sim 10^{-6}$

2. 求解代数方程组的迭代法

2.1 迭代法求解对象

- ◆ 线性物理问题的代数方程组
- ◆ 非线性问题每一迭代层次上所形成的线性代数方程组

线性：方程组中被求解的未知数都是以一次方的形式出现

常用：点迭代法，块迭代法、交替方向迭代法、强隐迭代法等

2. 求解代数方程组的迭代法

2.2 离散方程紧凑形式

x方向L个节点，y方向M个节点，共有 **$L \times M$** 个节点

$$a_{kk}P_k = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{L \times M} a_{kl}P_l + b_k, \quad k = 1, 2, \dots, L \times M$$

2. 求解代数方程组的迭代法

2.3 点迭代法

Jacobi 迭代

任一点上未知值的更新是用上一轮迭代中所获得的各邻点之值来计算的

$$P_k^{(n)} = \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{L \times M} a_{kl} P_l^{(n-1)} + b_k \right) / a_{kk},$$
$$k = 1, 2, \dots, L \times M$$

() 中上标表示迭代轮数（不是时间步进）。

“一轮”指把求解区域中每一节点之值都更新一次的运算环节。

2. 求解代数方程组的迭代法

2.3 点迭代法

Jacobi 迭代

- ◆ 迭代前进的方向（**扫描方向**）不影响迭代收敛速度；
- ◆ 收敛速度很慢，较少采用；
- ◆ 规定 n （迭代轮数）的情况下，有利于非线性问题的迭代收敛。

2. 求解代数方程组的迭代法

2.3 点迭代法

Gauss-Seidel 迭代

每一步计算总是取邻点的最新值来进行

$$P_k^{(n)} = \left(\sum_{l=1}^{k-1} a_{kl} P_l^{(n)} + \sum_{l=k+1}^{L \times M} a_{kl} P_l^{(n-1)} + b_k \right) / a_{kk},$$
$$k = 1, 2, \dots, L \times M$$

- ◆ 迭代进行方向（扫描方向）会影响到收敛速度，这是与边界条件的影响传入到区域内部的快慢有关的。

2. 求解代数方程组的迭代法

2.3 点迭代法

Successive Over/ Under Relaxation

SOR/SUR (逐次超松弛/逐次亚松弛) 迭代

第 n 轮迭代中节点 k 的值可以表示成为:

$$P_k^{(n)} = P_k^{(n-1)} + \left[P_k^{(n)} - P_k^{(n-1)} \right]$$

更一般的形式:

$$P_k^{(n)} = P_k^{(n-1)} + a \left[\tilde{P}_k^{(n)} - P_k^{(n-1)} \right] \quad 0 \leq a \leq 2$$

$\tilde{P}_k^{(n)}$: 第 n 轮迭代中Jacobi迭代或G-S迭代所得之值

a : 松弛因子

2. 求解代数方程组的迭代法

2.3 点迭代法

SOR/SUR（逐次超松弛/逐次亚松弛）迭代

- ◆ $a = 1$ ，即为 Jacobi 迭代或 G-S 迭代的解；
- ◆ $a > 1$ ，逐次超松弛；
- ◆ $a < 1$ ，逐次亚松弛；
- ◆ 相邻两轮的迭代值之差永远具有相同的正负号时，采用超松弛迭代可加速收敛速度；
- ◆ 由非线性问题所形成的代数方程，多采用亚松弛迭代，以降低未知量的变化率，避免迭代发散；
- ◆ 最佳松弛因子。

2. 求解代数方程组的迭代法

2.4 块迭代法

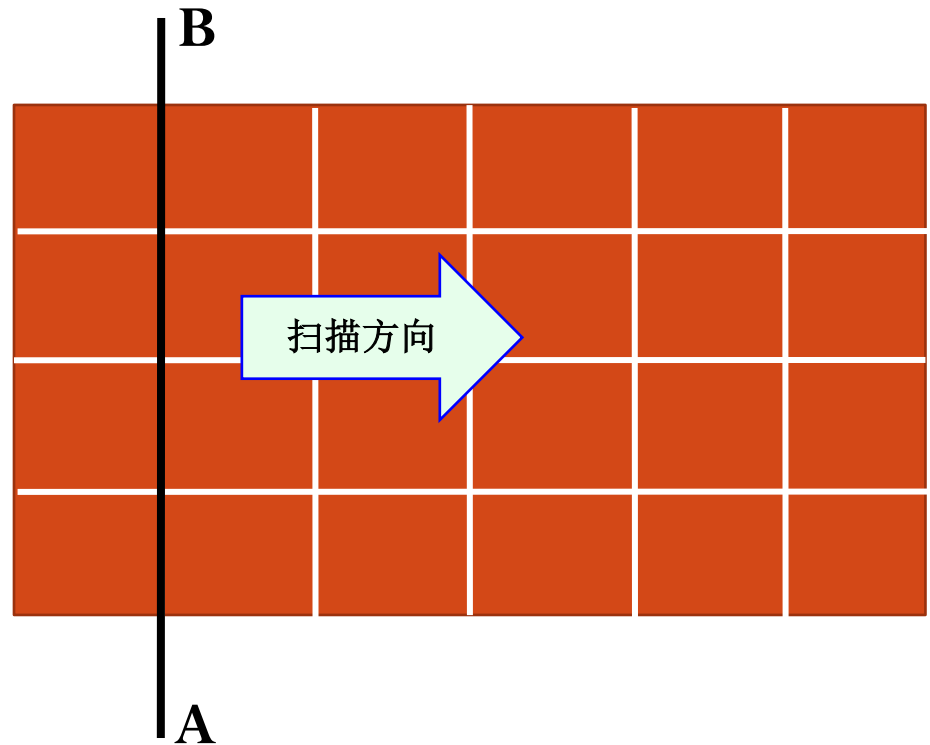
- ◆ 求解区域分成若干块，每块可由一条网格线或数条网格线组成。
- ◆ 在同一块中各节点上的值是用代数方程的直接解法来获得。即同一块内各节点的值是以隐含的方式互相联系着的，但从一块到另一块的推进是用迭代的方式进行的，又叫隐式迭代法。
- ◆ 为获得收敛的解所需迭代次数大大减少，但每一轮迭代中的代数运算次数则有所增加，总计算时间的变化则取决于两者的相对影响。一般情况下，采用块迭代法后计算时间可以缩短。
- ◆ 应较普遍的是线迭代法，即直接求解的块由一条网格线组成。

2. 求解代数方程组的迭代法

2.4 块迭代法

Jacobi 迭代

- ◆ A-B线上未知值用直接解法；
- ◆ 逐列向前推进，做完全区内各列的求解后就完成了一轮迭代。



$$a_P P_P^{(n)} = a_N P_N^{(n)} + a_S P_S^{(n)} + a_E P_E^{(n-1)} + a_W P_W^{(n-1)} + b$$

Thomas等直接解法

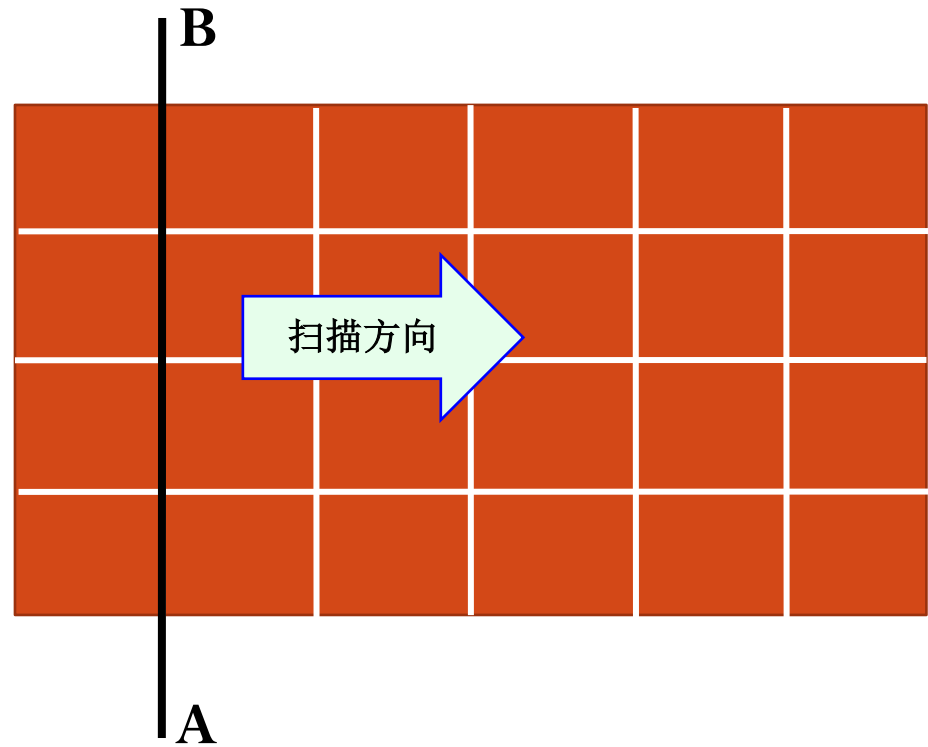
b

2. 求解代数方程组的迭代法

2.4 块迭代法

Gauss-Seidel 迭代

设扫描方向从左到右



$$a_P P_P^{(n)} = a_N P_N^{(n)} + a_S P_S^{(n)} + a_W P_W^{(n)} + a_E P_E^{(n-1)} + b$$

Thomas等直接解法

b

2. 求解代数方程组的迭代法

2.4 块迭代法

SOR/SUR 迭代

$$P_P^{(n)} = P_P^{(n-1)} + a \left[\frac{a_N P_N^{(n)} + a_S P_S^{(n)} + a_E P_E^{(n-1)} + a_W P_W^{(n)} + b}{a_P} - P_P^{(n-1)} \right]$$

$$= \frac{a}{a_P} (a_N P_N^{(n)} + a_S P_S^{(n)}) + \underbrace{(1-a)P_P^{(n-1)} + \frac{a}{a_P} (a_W P_W^{(n)} + a_E P_E^{(n-1)} + b)}_{b}$$

直接求解

b

2. 求解代数方程组的迭代法

2.5 交替方向块迭代法

交替方向隐式迭代法 ADI

Alternating-Direction Implicit Iteration

先逐行（列）进行一次扫描，再逐列（行）进行一次扫描，两次全场扫描组成一轮迭代。

Jacobi 方式按行列交替迭代：

上标 $(n+1/2)$ 表示第 $(n+1)$ 轮迭代中间值

$$\text{行: } \underline{a_P P_P^{(n+\frac{1}{2})} = a_E P_E^{(n+\frac{1}{2})} + a_W P_W^{(n+\frac{1}{2})} + (a_N P_N^{(n-1)} + a_S P_S^{(n-1)} + b)}$$

Thomas

$$\text{列: } \underline{a_P P_P^{(n+1)} = a_N P_N^{(n+1)} + a_S P_S^{(n+1)} + (a_E P_E^{(n+\frac{1}{2})} + a_W P_W^{(n+\frac{1}{2})} + b)}$$

Thomas

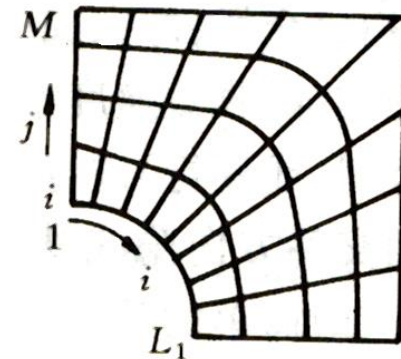
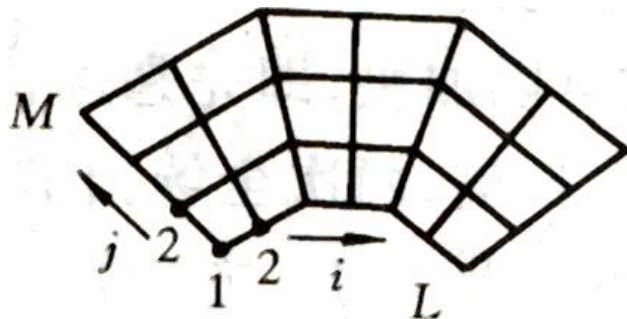
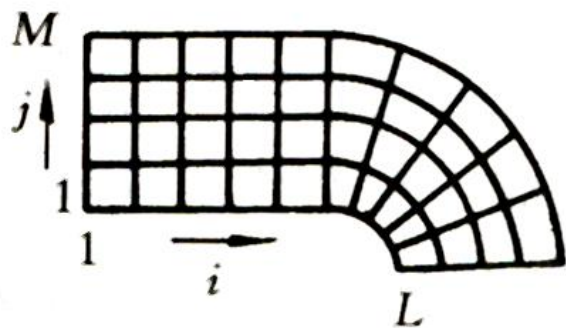
2. 求解代数方程组的迭代法

2.5 交替方向块迭代法

交替方向隐式迭代法 ADI

- ◆ 采用交替方向扫描，收敛速度常常可以加快；
- ◆ 逐次亚松弛的交替方向线迭代法（successive line under-relaxation method, SLUR）在流动与传热的数值计算中应用很广；
- ◆ 结构化网格均可采用SLUR。

凡是计算区域可以采用两组曲线簇来离散，且每组曲线簇具有相同角标变化范围。



3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.1 Jacobi 与G-S点迭代法收敛的充分条件

充分条件：系数矩阵不可约且按行或列弱对角占优，
后者即要求系数矩阵满足：

$$a_p P_p + \sum (-a_{nb}) P_{nb} = b$$

$$\frac{\sum |a_{nb}|}{|a_p|} \leq 1$$

参见第六章讲义49页

对各行成立，且其中至少对一行不等号成立。

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.2 迭代法收敛速度的概念及影响因素

对于给定的代数方程组，采用不同的迭代方法求解时，使一定的初始误差缩小成为 r 倍 ($r < 1$)，所需的迭代轮数是不同的。

某种迭代法的收敛速度 R 与所需迭代轮数 n 之间的关系可近似表示为：

$$R = \frac{-\log r}{n}$$

最终所需的计算时间的多少取决于迭代轮数及每一轮迭代所需的时间。

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.3 迭代法收敛速度的概念及影响因素

1. 加速边界条件影响的传入:

- 1) 增加迭代方法中的直接求解成分（点→线→ADI）；
- 2) 适当选择扫描的起始边，多以第一类或第三类边界条件的边界为起始边，少以第二类（尤其是绝热）边界为起始边。

2. 加速守恒条件的满足（初场的选择）

3. 促使不同频率的误差分量能均匀地予以衰减（网格）

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.4 加速边界条件的影响传入计算区域的方法

Jacobi 点迭代：每做完一轮迭代，边界条件的影响仅可传入一个网格，且迭代扫描方向与收敛快慢无关。

G-S 点迭代：设从左向右扫描，每做完一轮迭代，左边界的影响就传递到整个区域，但右边界，上下边界的影响也只能传入一个网格，故收敛速度比Jacobi点迭代快，且受迭代扫描方向影响。

线迭代（G-S）：自左向右的扫描中，左边界影响传入，每一列直接求解中，上下端点的影响全部传入到该列的各个节点上。每做完一轮迭代，左，上，下边界条件的影响全部，右边界的影响仅前进一个网格。

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.4 加速边界条件的影响传入计算区域的方法

ADI 迭代：每一轮迭代包括了逐行逐列的扫描，因此，每一轮迭代内所有边界条件的影响均已传入到区域内部，从而加快收敛速度。

不同迭代方法的收敛速度

迭代方式	点迭代	线迭代
Jacobi	$h^2/2$	h^2
G-S	h^2	$2h^2$
SOR	$2h$	$2.82 h$

由正方形区域内第一类边界条件的Laplace方程五点格式得出， h 是均分网格步长

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.5 促使不同频率的误差分量能均匀地予以衰减

一个收敛的迭代过程是误差矢量逐渐衰减的过程！

例：设在某一轮迭代计算结束时，各点温度构成矢量 $T^{(n)}$ ， n 为迭代轮数，与其真解的偏差形成一个误差矢量。可以利用离散的Fourier展开将该误差矢量表示成有限个谐波分量的叠加。一个收敛的迭代过程是这些谐波分量的振幅不断衰减的过程。以一维poission方程为例：

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + S(x) = 0 \quad \text{令 } S(x)/\lambda = f(x)$$

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.5 促使不同频率的误差分量能均匀地予以衰减

均分网格上的离散:

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} = -f_i \quad (1)$$

假设采用自左向右的G-S迭代:

$$T_{i-1}^{(n)} - 2T_i^{(n)} + T_{i+1}^{(n-1)} = -f_i \Delta x^2 \quad (2)$$

设经过n轮迭代后的当前值 $T_i^{(n)}$ 与其真解 T_i 的差为 ε_i , 则有:

$$T_{i-1} = T_{i-1}^{(n)} + \varepsilon_{i-1}^{(n)}$$

$$T_i = T_i^{(n)} + \varepsilon_i^{(n)}$$

$$T_{i+1} = T_{i+1}^{(n-1)} + \varepsilon_{i+1}^{(n-1)}$$

代入 (1) (2)

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.5 促使不同频率的误差分量能均匀地予以衰减

得误差传递方程为：

$$\varepsilon_{i-1}^{(n)} - 2\varepsilon_i^{(n)} + \varepsilon_{i+1}^{(n-1)} = 0 \quad (3)$$

上式迭代n轮相当于非稳态问题中的时层，可用Von Neumann 方法来分析前后两次迭代之间误差矢量的变化情况：

$$\text{令 } \varepsilon_i^{(n)} = \psi^{(n)} e^{Ik_m x} = \psi^{(n)} e^{li\theta} \quad (4)$$

其中： $x = i\Delta x$, $\theta = k_m \Delta x$, $k_m \lambda = 2\pi$ $k_m \rightarrow$ 波数
相角 波数 \times 波长 = 2π

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.5 促使不同频率的误差分量能均匀地予以衰减

高频分量（波数大）：短波误差

低频分量（波数小）：长波误差

(4) 代入 (3) :

$$\frac{\psi^{(n)}}{\psi^{(n-1)}} = r = \frac{e^{I\theta}}{2 - e^{-I\theta}} = \frac{\cos\theta + I\sin\theta}{2 - (\cos\theta - I\sin\theta)}$$

r : 某一分量的振幅随迭代进行的衰减速度, 相当于第四章的增长因子 μ

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.5 促使不同频率的误差分量能均匀地予以衰减

对几个典型的相角 $\theta = k_m \Delta x$
计算 r 之模, 可得:

$$\theta = \pi, \quad |r| = \left| \frac{\cos \pi + I \sin \pi}{2 - (\cos \pi - I \sin \pi)} \right| = \frac{1}{3};$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad |r| = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + I \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2 - \left(\cos\frac{\pi}{2} - I \sin\frac{\pi}{2}\right)} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\theta = \frac{\pi}{10}, \quad |r| = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + I \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2 - \left(\cos\frac{\pi}{10} - I \sin\frac{\pi}{10}\right)} \right| = 0.914;$$

设经过三次迭代:

- 对于 θ 较大的分量, 如 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, 误差缩小为原来的 $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 \sim \left(\frac{1}{3}\right)^3$, 即:
0.09 ~ 0.037, 衰减很快!!
- 对于 θ 较小的分量, 如 $\theta = \frac{\pi}{10}$, 误差缩小为原来的 $(0.914)^3 = \mathbf{0.764}$, 衰减得很慢!!

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.5 促使不同频率的误差分量能均匀地予以衰减

设经过三次迭代:

- 对于 θ 较大的分量, 如 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, 误差缩小为原来的 $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 \sim \left(\frac{1}{3}\right)^3$, 即: **0.09~0.037**, 衰减很快!!
- 对于 θ 较小的分量, 如 $\theta = \frac{\pi}{10}$, 误差缩小为原来的 $(0.914)^3 = \mathbf{0.764}$, 衰减得很慢!!

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.5 促使不同频率的误差分量能均匀地予以衰减

对于一定的 Δx :

$$\begin{cases} \theta \text{大}, (K_m \Delta x \text{大}), \text{即} K_m \text{大}, \text{短波分量(衰减快)} \\ \theta \text{小}, (K_m \Delta x \text{小}), \text{即} K_m \text{小}, \text{长波分量(衰减慢)} \end{cases}$$

结论1: 在一套固定的网格上迭代时, 一开始误差中的短波分量迅速衰减, 随后, 主要是长波分量得不到迅速的衰减而使收敛速度变慢!

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.5 促使不同频率的误差分量能均匀地予以衰减

对于一定的 K_m （即对于某一波长误差）：

$$\begin{cases} \theta \text{ 大}, (K_m \Delta x \text{ 大}), \Delta x \text{ 大}, \text{ 衰减快} \\ \theta \text{ 小}, (K_m \Delta x \text{ 小}), \Delta x \text{ 小}, \text{ 衰减慢} \end{cases}$$

结论2：密网格上的收敛速度慢很多！比按线性规律估计的因节点数增加而造成的收敛速度减慢严重得多。

对于某一固定频率（ K_m ）的波， $\Delta x \uparrow$ ，为短波。 $\Delta x \downarrow$ ，为长波。

即：**长波衰减慢**，与结论①实质相同！！

密网格上的迭代使误差矢量中的长波分量得不到有效的衰减，因而收敛速度 $\downarrow\downarrow$ 。

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.5 促使不同频率的误差分量能均匀地予以衰减

所谓**短波**，是相对于网格步长 Δx 而言的，把 $K_m \Delta x$ 在 π 与 2π 之间的误差分量称为短波分量。短波范围内最大衰减率被称为收敛因子，记为 ν ：

$$\nu = \text{Max} |r| \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$

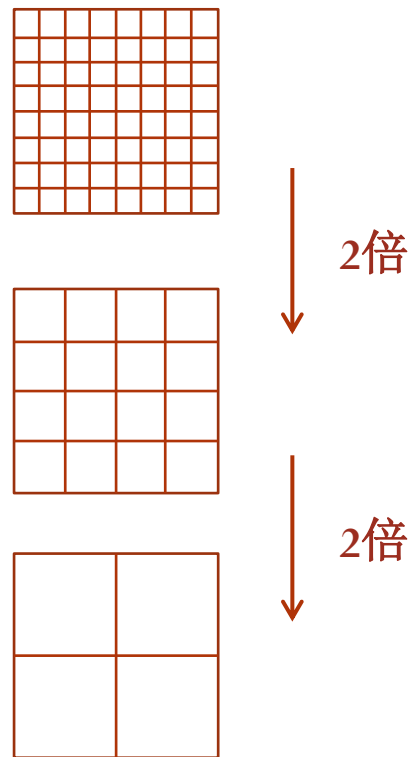
对上述一维问题的G-S迭代， $\nu \approx 0.45$ ($\theta = \pi$ 时)

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

3.5 促使不同频率的误差分量能均匀地予以衰减

多重网格法基本思想：

1. 先在较细的网格上进行迭代，将短波误差分量衰减掉；
2. 再在较粗一点的网格上迭代，把次短波误差分量衰减
(随 Δx 增加，满足 $\frac{\pi}{2} \leq K_m \Delta x \leq \pi$ 的 K_m 变小，即波长增加)
3. 网格越来越粗，把各种波长的误差分量基本消去；
4. 最后一层粗网格时，节点数已不变，直接解法；
5. 再由粗网格依次返回细网格进行计算，如此反复计算，最后在最细的网格上得到解。



结论：各种频率分量的误差可以得到比较均匀地衰减，因而加速了收敛的速度。在每层网上的迭代计算，可利用前述方法，一般利用交替方向线迭代。

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

强隐迭代过程法 (strong implicit procedure, SIP)

块修正技术

多重网格法 (multi-grid method)

3. 迭代法的收敛性及加速收敛的方法

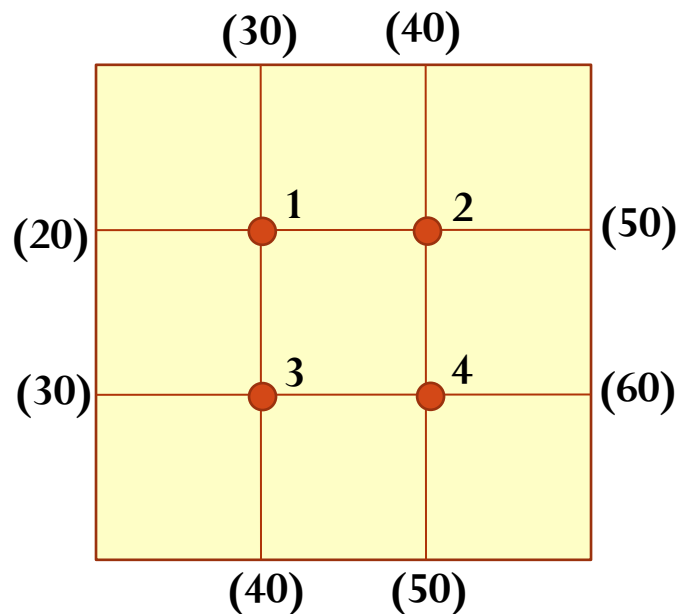
3.4 加速边界条件的影响传入计算区域的方法

例：

设有一正方形区域，边界温度如图所示所示。物体内无内热源，物性为常数。

试分别用Jacobi点迭代，G-S点迭代及线迭代法求解稳态导热时节点1,2,3,4的温度。

(收敛判据：绝对偏差小于 5×10^{-5})



$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \Gamma \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + S$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$