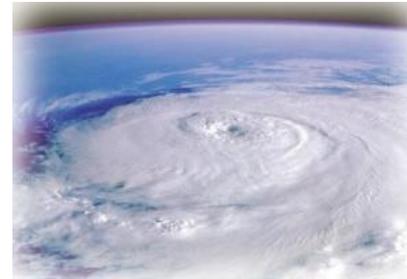


第七章 湍流流动与换热的数值模拟

王 嫻

西安交通大学航天学院



湍流流动是自然界常见的流动现象，在多数工程问题中流体的流动往往处于湍流状态，湍动特性在工程中占有重要的地位。因此，湍流研究一直被研究者高度重视。但由于湍流本身的复杂性，知道现在仍有一些基本问题尚未解决。本章不深入涉及湍流的结构及发生的机理，主要从工程实际应用的观点介绍不可压缩流体湍流流动与换热的常用数值模拟方法。

内 容

- 湍流及其数学描述
- 湍流的数值模拟方法简介
- 零方程与一方程模型
- 标准 $k - \varepsilon$ 两方程模型
- 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策
- 小结

1. 湍流及其数学描述

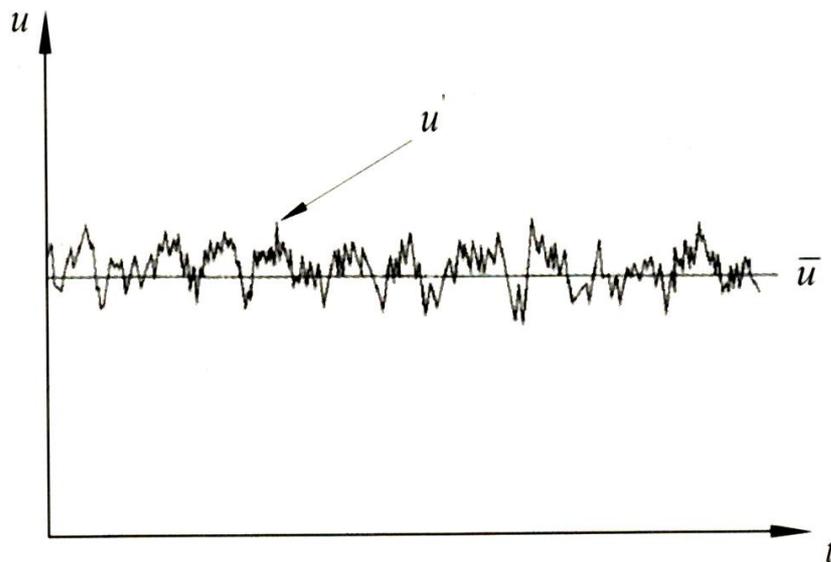
层流：当Reynolds数小于某一临界值时，流动是平滑的，相邻的流体层彼此有序地流动。（laminar flow）

湍流：当Reynolds数大于临界值时，会出现一系列复杂的变化，最终导致流动特征的本质变化，流动呈无序的混乱状态。此时，即使边界条件保持不变，流动也是不稳定的，速度等流动特性都随机变化。

（Turbulent flow）

1. 湍流及其数学描述

1.1 湍流流动特征



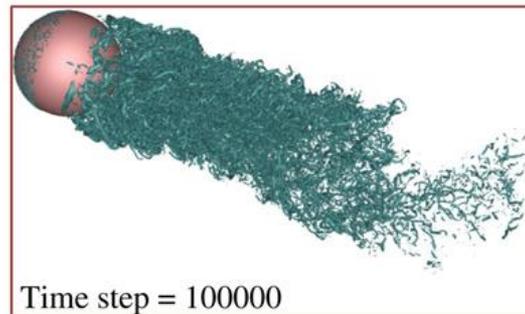
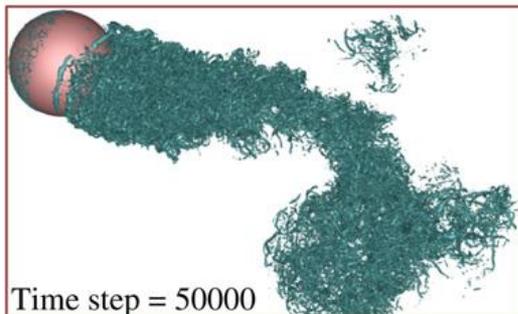
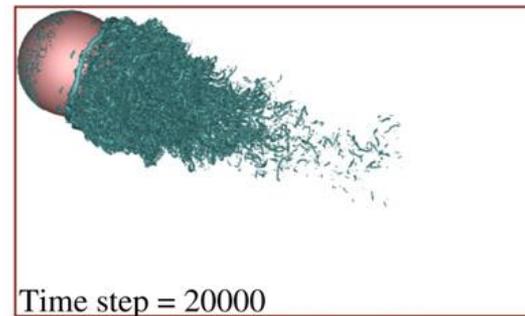
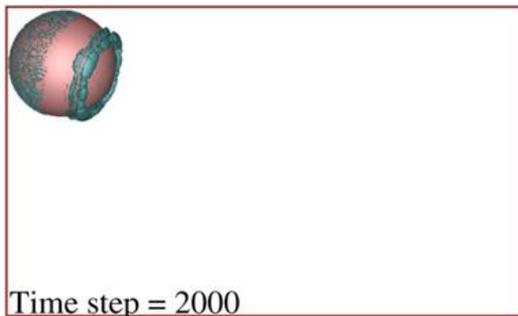
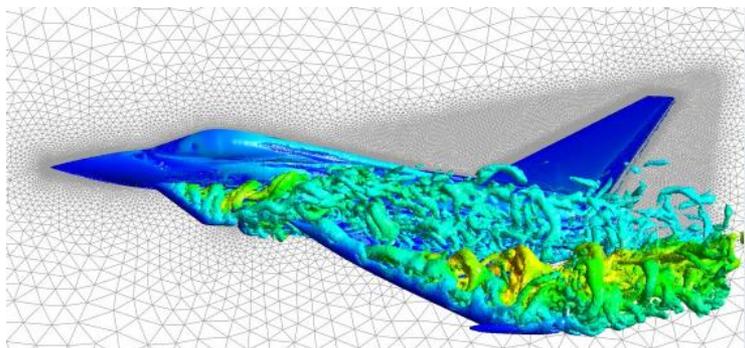
- 速度值的脉动很强；
- 湍流的脉动现象对工程设计有直接的影响：如压力的脉动增大了建筑物上承受的风载的瞬时载荷，有可能引起建筑物的有害振动；对水轮机，脉动压力最大的负波峰增加了发生空化的可能性。

1. 湍流及其数学描述

1.1 湍流流动特征

湍流涡（turbulent eddies）：

湍流带有旋转流动结构，即湍流涡，简称涡（eddy）



1. 湍流及其数学描述

1.1 湍流流动特征

从物理结构上看，可以把湍流看成是由各种不同尺度的涡叠合而成的流动，这些涡的大小及旋转轴的方向分布是**随机**的。**大尺度的涡主要由流动的边界条件所决定**，其尺寸可以与流场的大小相比拟，它主要受惯性影响而存在，是引起低频脉动的原因；**小尺度的涡是由粘性力所决定**，其尺寸可能只有流场尺度的千分之一量级，是引起高频脉动的原因。大尺度的涡破裂后形成小尺度的涡，较小尺度的涡破裂后形成更小尺度的涡。在充分发展的湍流区域内，**流体涡的尺寸可在相当宽的范围内连续变化**。大尺度的涡不断地从主流获得能量，通过涡间的相互作用，能量逐渐向小尺度的涡传递。最后由于流体粘性的作用，小尺度的涡不断消失，**机械能就转化（或称耗散）为流体的热能**。同时，由于边界的作用、扰动及速度梯度的作用，新的涡旋又不断产生，这就构成了湍流运动。流体内不同尺度的涡的随机运动造成了湍流的一个重要特点---**物理量的脉动**。

1. 湍流及其数学描述

1.2 湍流的基本方程

◆ 无论湍流运动多么复杂，非稳态的连续方程和Navier-Stokes方程对于湍流的瞬时运动仍然适用。

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div}(v\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \operatorname{div}(\operatorname{grad} v)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}(w\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \operatorname{div}(\operatorname{grad} w)$$

1. 湍流及其数学描述

1.2 湍流的基本方程

◆ 为了考察脉动的影响，目前广泛采用的方法是[时间平均法](#)。把湍流运动看作由两个流动叠加而成，一是时间平均流动，二是瞬时脉动流动。

◆ [Reynolds平均法](#):

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi(t) dt$$

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'$$

瞬时值 时均值 脉动值

1. 湍流及其数学描述

1.2 湍流的基本方程

- ◆ 用时均值与脉动值之和代替流动变量，即：
$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$$
$$p = \bar{p} + p'$$
- ◆ 代入瞬态方程，并对时间取平均：

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \operatorname{div}(\operatorname{grad} \bar{u}) + \left[-\frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial u'w'}}{\partial z} \right]$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \operatorname{div}(\operatorname{grad} \bar{v}) + \left[-\frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial v'^2}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial v'w'}}{\partial z} \right]$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{w} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \operatorname{div}(\operatorname{grad} \bar{w}) + \left[-\frac{\overline{\partial u'w'}}{\partial z} - \frac{\overline{\partial v'w'}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial w'^2}}{\partial z} \right]$$

1. 湍流及其数学描述

1.2 湍流的基本方程

◆ 其他变量的输运方程做类似处理，可得：

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\phi} \bar{\mathbf{u}}) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \bar{\phi}) + \left[-\frac{\partial \overline{u'\phi'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'\phi'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'\phi'}}{\partial z} \right] + S$$

◆ 细微的密度变动并不对流动造成明显影响，在此，忽略密度脉动的影响，但考虑平均密度的变化写出可压湍流平均流动的控制方程如下：

（为方便起见，除脉动值的时均值外，去掉表示时均值的上划线）

$$\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{u} \quad \bar{\phi} \rightarrow \phi$$

1. 湍流及其数学描述

1.2 湍流的基本方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{I})$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial(\overline{\rho u'^2})}{\partial x} & \frac{\partial(\overline{\rho u'v'})}{\partial y} & \frac{\partial(\overline{\rho u'w'})}{\partial z} \end{array} \right] + S_u$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v) + \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial(\overline{\rho u'v'})}{\partial x} & \frac{\partial(\overline{\rho v'^2})}{\partial y} & \frac{\partial(\overline{\rho v'w'})}{\partial z} \end{array} \right] + S_v$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho w \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} w) + \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial(\overline{\rho u'w'})}{\partial x} & \frac{\partial(\overline{\rho v'w'})}{\partial y} & \frac{\partial(\overline{\rho w'^2})}{\partial z} \end{array} \right] + S_w$$

(II)

1. 湍流及其数学描述

1.2 湍流的基本方程

其他变量的输运方程：

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{u}\phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + \left[-\frac{\partial(\rho\overline{u'\phi'})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho\overline{v'\phi'})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho\overline{w'\phi'})}{\partial z} \right] + S \quad (\text{III})$$

- (I) (II) 方程分别为时均形式的连续方程，Navier-Stokes方程；
- 由于采用了Reynolds平均法，因此，(II) 方程也被称为Reynolds时均NS方程（Reynolds-Averaged Navier-Stokes，简称**RANS**），常直接称为Reynolds方程；
- (III) 方程是标量的时均输运方程。

1. 湍流及其数学描述

1.2 湍流的基本方程

引入张量符号重写方程 (I) (II) (III)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i v'_j} \right) + S_i \quad (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i \phi'} \right) + S$$

- 上面三式是用张量的指标形式表示的时均方程。i, j的取值范围是 (1, 2, 3)
- 当某个指标重复出现两次, 则表示要把该项在指标的取值范围内遍历求和。

1. 湍流及其数学描述

1.2 湍流的基本方程

时均流动的方程里多出了与 $-\rho \overline{u'_i v'_j}$ 有关的项，定义该项为 Reynolds应力，即：

$$\tau_{i,j} = -\rho \overline{u'_i v'_j}$$

➤ $\tau_{i,j}$ 实际对应6个不同的Reynolds应力项，即三个正应力，三个切应力

五个方程，11个未知量（6个应力，5个时均未知量 u, v, w, p, Φ ）。方程组不封闭。需要引入新的方程（湍流模型）

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.1 三维湍流数值模拟方法的分类

1. 直接数值模拟方法：直接求解三维非稳态 Navier-Stokes 方程
2. 非直接数值模拟方法：不直接计算求解三维非稳态 Navier-Stokes 方程

湍流数值模拟方法

直接数值模拟 (DNS)

非直接数值模拟

大涡模拟方法 (LES)

Reynolds平均法 (RANS)

统计平均法

Reynolds应力模型

涡粘模型

Reynolds应力方程模型 (RSM)

代数应力方程模型 (ASM)

零方程模型

一方程模型

两方程模型

标准 $k-\epsilon$ 模型

RNG $k-\epsilon$ 模型

Realizable $k-\epsilon$ 模型

其他两方程模型

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.2 直接数值模拟（DNS）简介

- ◆ 直接数值模拟（Direct Numerical Simulation，简称DNS）方法就是直接用瞬时的NS方程对湍流进行计算；
- ◆ DNS的最大好处是无需对湍流流动做任何简化或近似，理论上可以得到相对准确的计算结果；
- ◆ DNS对内存空间及计算速度的要求非常高，目前还无法用于真正意义上的工程计算，但大量的探索工作正在进行中。

流动区域：0.1 x 0.1 m²

→ 涡：10 ~ 100微米

→ 计算网格：10⁹ ~ 10¹²

湍流脉动频率：10kHz

→ 时间离散步长：< 100微秒

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.3 大涡模拟（LES）简介

为了模拟湍流流动，一方面要求计算区域的尺寸应大到足以包含湍流运动中出现的最大涡，另一方面要求计算网格应小到足以分辨最小涡的运动。然而，就目前的计算机能力来讲，能够采用的计算网格最小尺度仍比最小涡的尺度大许多。因此，目前只能放弃对全尺度范围上的涡运动的模拟，而只将比网格尺度大的湍流运动通过NS方程直接计算出来，对于小尺度的涡对大尺度运动的影响，则通过建立模型来模拟，即大涡模拟法。（Large Eddy Simulation，简称LES）

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.3 大涡模拟（LES）简介

- ◆ 大涡模拟（Large Eddy Simulation，简称LES）方法的基本思想可以概括为：用瞬时的NS直接模拟湍流中的大尺度涡，不直接模拟小尺度涡，而小涡对大涡的影响通过近似的模型来考虑；

系统中动量、质量、能量及其他物理量的输运，主要由大尺度涡影响。大尺度的涡与求解问题密切相关，由几何及边界条件所规定，各个大尺度涡的结构是互不相同的。而小尺度的涡几乎不受几何及边界条件的影响，不像大尺度涡那样与所求解的特定问题密切相关。小尺度涡趋于各向同性，其运动具有共性。目前只能放弃对全尺度范围上的涡的瞬时运动模拟。

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.3 大涡模拟（LES）简介

要实现大涡模拟，有两个重要环节的工作必须完成。首先是建立一种**数学滤波函数**，从湍流瞬时运动方程中将尺度比滤波函数的尺度小的涡滤掉，从而分解出描写大涡流场的运动方程，而这时被滤掉的小涡对大涡运动的影响，则通过在大涡流场的运动方程中引入附加应力项来体现。该应力项好比Reynolds平均法中的Reynolds应力项，被称为亚格子尺度应力。而建立这一**应力项的数学模型**，就是要完成的第二个环节的工作。这一数学模型称为亚格子尺度模型（SubGrid-Scale model），简称SGS模型。

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.3 大涡模拟（LES）简介

2.3.1 大涡的运动方程

在LES方法中，通过使用滤波函数，每个变量都被分成两部分。例如，对于瞬时变量 ϕ ，有：

- 大尺度的平均分量 $\bar{\phi}$ 。该部分叫做滤波后的变量，是在LES模拟时直接计算的部分。
- 小尺度分量 ϕ' 。该部分是需要通过模型来表示的。

注意：这里的平均分量 $\bar{\phi}$ 是滤波后得到的变量，它不是在时间域上的平均，而是在空间域上的平均。

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.3 大涡模拟 (LES) 简介

2.3.1 大涡的运动方程

滤波后的变量 $\bar{\phi}$ 可通过下式得到:

$$\bar{\phi} = \int_D \phi G(x, x') dx' \quad (1)$$

式中, D 是流动区域, x' 是实际流动区域中的空间坐标, x 是滤波后的大尺度空间上的空间坐标, $G(x, x')$ 是滤波函数。 $G(x, x')$ 决定了所求解的涡的尺度, 即将大涡与小涡划分开来。换句话说, $\bar{\phi}$ 只保留了 ϕ 在大于滤波函数 $G(x, x')$ 宽度的尺度上的可变性。 $G(x, x')$ 的表达式有多种选择, 但有限体积法的离散过程本身就隐含地提供了滤波功能, 即在一个控制体积上对物理量取平均值, 因此, 这里采用如下的表达式:

$$G(x, x') = \begin{cases} 1/V, & x' \in v \\ 0, & x' \notin v \end{cases} \quad (2)$$

式中 v 是表示控制体积所占几何空间的大小。这样, 式(1)可以写成:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{V} \int_D \phi dx' \quad (3)$$

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.3 大涡模拟（LES）简介

2.3.1 大涡的运动方程

用式（1）表示的滤波函数处理瞬时状态下的Navier-Stokes方程及连续方程，有：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \bar{u}_i) = 0 \quad (5)$$

以上两式就构成了在LES方法中使用的控制方程组，注意这完全是瞬时状态下的方程。式中带有上划线的量为滤波后的场变量， τ_{ij} 为：

$$\tau_{ij} = \rho \overline{u_i u_j} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (6)$$

τ_{ij} 被定义为亚格子尺度应力（subgrid-scale stress, 简称SGS应力），它体现了小尺度涡的运动对所求解的运动方程的影响。

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.3 大涡模拟（LES）简介

2.3.1 大涡的运动方程

比较发现，滤波后的Navier-Stokes方程（4）与RANS方程P14（*）在形式上非常类似，区别在于**这里的变量是滤波后的值，仍为瞬时值，而非时均值，同时湍流应力的表达式不同。**而滤波后的连续方程（5）与时均化的连续方程P14（*）相比，则没有变化，这是由于连续方程具有线性特征。

由于SGS应力是未知量，要想使式（4）与（5）构成的方程组可解，必须用相关物理量来构造SGS应力的数学表达式，即**亚格子尺度模型**。下面将介绍生成这一模型的方法。

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.3 大涡模拟 (LES) 简介

2.3.2 亚格子尺度模型

亚格子尺度模型简称SGS模型，是关于SGS应力 τ_{ij} 的表达式。建立该模型的目的，是为了使方程（4）、（5）封闭。SGS模型在LES方法中占有十分重要的地位，最早的、也是最基本的模型是由Smagorinsky提出，后来有多位学者发展了该模型。在此，给出文献*中采用的方法，该方法与FLUENT中使用的Smagorinsky-Lilly模型非常接近。

根据Smagorinsky的基本SGS模型，假定SGS应力具有下面的形式：

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = -2\mu_t\bar{S}_{ij} \quad (7)$$

式中， μ_t 是亚格子尺度的湍流粘度，在文献*中推荐用下式计算：

$$\mu_t = (C_s\Delta)^2|\bar{S}| \quad (8)$$

[*] F.Felten, Y. Fautrelle et al. Numerical modeling of electrogenetically-riven turbulent flow using LES method. *Applied Mathematical Modeling*, 28(1): 15-27, 2004.

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.3 大涡模拟（LES）简介

2.3.2 亚格子尺度模型

$$\text{其中, } \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad |\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}, \quad \Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3} \quad (9)$$

式中, Δ_i 代表沿*i*轴方向的网格尺寸, C_s 是Smagorinsky常数。理论上, C_s 通过

Kolmogorov常数 C_k 来计算, 即 $C_s = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{2} C_k \right)^{3/4}$ 。当 $C_k = 1.5$ 时, $C_s = 0.17$ 。

但实际应用表明, C_s 应取一个更小的值, 以减小SGS应力的扩散影响。尤其是在近壁面处, 该影响尤其明显。因此, Van Driest模型建议按下式调整 C_s :

$$C_s = C_{s0} (1 - e^{y^+/A^+}) \quad (10)$$

式中, y^+ 是到壁面的最近距离, A^+ 是半经验常数, 取25.0。 C_{s0} 是Van Driest常数, 取0.1。

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.3 大涡模拟 (LES) 简介

2.3.2 LES控制方程的求解

通过式 (7) 将 τ_{ij} 用相关的滤波后的场变量表示后, 方程 (4) (实际对应3个动量方程) 与 (5) 便构成了封闭的方程组。在该方程组中, 共包含 \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} 和 \bar{p} 4个未知量, 而方程数目正好是4个, 可利用CFD的各种方法进行求解。如有限元法求解, 有限体积法求解。目前多数文献中采用有限体积法求解, 如SIMPLEC算法等。现对LES的求解过程补充说明如下:

(1) 如果需要对能量或组分等进行计算, 需要建立其他针对滤波后的标量型变量 $\bar{\phi}$ 的控制方程。方程中会出现类似式 (6) 中的项 $\overline{\rho u_i \phi} - \rho \bar{u}_i \bar{\phi}$ 。目前有许多文献给出了该项的计算模型。

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.3 大涡模拟（LES）简介

2.3.2 LES控制方程的求解

(2) LES方法在某种程度上属于直接数值模拟(DNS)，在时间积分方案上，应该选择具有至少二阶精度的Crank-Nicolson半隐式方案，或Adams-Bashforth方案，甚至是混合方案。在基于有限体积法的空间离散格式上，为克服假扩散，应选择具有至少二阶精度的离散格式，如QUICK格式、二阶迎风格式、四阶中心差分格式等。

(3) 在计算网格的选择上，可使用交错网格、同位网格或非结构网格。

(4) 与前面介绍的标准 $k-\epsilon$ 模型等一样，LES仍属于高 Re 数模型。当使用LES求解近壁面区内的低雷诺数流动时，同样需要使用壁面函数法或其他处理方式。

(5) 考虑到计算的复杂性，LES多在超级计算机或网络机群的并行环境下进行。

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.4 Reynolds 平均法 (RANS) 简介

多数观点认为：虽然瞬时的NS方程可以用于描述湍流，但NS方程的非线性使得用解析的方法精确描写三维时间相关的全部细节极端困难，即使能真正得到这些细节，对于解决实际问题也没有太大意义。这是因为，从工程应用的观点上看，重要的是湍流所引起的平均流场的变化，是整体的效果。所以，人们很自然地想到求解时均化了的NS方程，而将瞬态的脉动量通过某种模型在时均化的方程中体现出来，由此产生了雷诺平均法。（Reynolds-Averaged Navier-Stokes，简称RANS）

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.4 Reynolds 平均法 (RANS) 简介

- ◆ RANS的核心：不直接求解瞬时的NS方程，而是设法求解时均化的NS方程（将瞬态的脉动量通过某种模型在时均化的方程中体现出来）；
- ◆ RANS不仅避免了DNS、LES的计算量大的问题，而且对于工程实际应用可以取得很好的效果；
- ◆ 目前使用最广泛的湍流数值模拟方法。

方程中有关湍流脉动值的Reynolds应力项 ($\tau_{i,j} = -\rho \overline{u'_i v'_j}$) 为新的未知量。要使方程组封闭，必须对该项作出某种假定，即建立应力的表达式（或引入新的湍流模型方程），通过这些表达式或湍流模型，把湍流的脉动值与时均值等联系起来。由于没有特定的物理规律可以用来建立湍流模型，目前的湍流模型只能以大量的实验观测结果为基础。

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.4 Reynolds 平均法 (RANS) 简介

根据应力作出的假定或处理的方式不同，目前常用的湍流模型有两大类：

- Reynolds应力模型
- 涡粘模型

2.4.1 Reynolds应力模型

直接构建表示Reynolds应力的方程，然后将其与方程 (*) P14 联立求解。

- Reynolds应力方程模型 (微分方程)
- 代数应力方程模型 (代数方程)

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.4 Reynolds 平均法 (RANS) 简介

2.4.2 涡粘模型

不直接处理Reynolds应力项，而是引入**湍动粘度** (turbulent viscosity)，或称涡粘系数 (eddy viscosity)，然后把湍流应力表示为湍动粘度的函数，整个计算的关键在于确定这种湍动粘度。

Boussinesq 涡粘假定：

$$-\overline{\rho u'_i v'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\rho k + \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij}$$

湍动粘度

湍动能

1, i=j

0, i≠j

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.4 Reynolds 平均法 (RANS) 简介

2.4.2 涡粘模型

- 湍动粘度 μ_t 是空间坐标的函数，取决于流动状态，而不是物性参数。
(因分子粘性而引入的流体动力粘度 μ 是物性参数)
- 湍动能 (turbulent kinetic energy) :

$$k = \frac{\overline{u'_i u'_i}}{2} = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right)$$

2. 湍流的数值模拟方法简介

2.4 Reynolds 平均法 (RANS) 简介

2.4.2 涡粘模型

- 引入Boussinesq假定后，计算湍流流动的关键就在于如何确定 μ_t ；
- 所谓的涡粘模型，就是把 μ_t 与湍流时均参数联系起来的关系式；
- 根据确定 μ_t 的微分方程数目的多少，涡粘模型包括：
 - 零方程模型
 - 一方程模型
 - 两方程模型（标准 $k-\varepsilon$ 模型及各种改进的 $k-\varepsilon$ 模型）

3. 零方程模型及一方程模型

3.1 零方程模型

不使用微分方程，而是用代数关系式，把湍动粘度与时均值联系起来的模型。

Prandtl 提出的**混合长度模型 (mixing length model)**：

假定湍动粘度正比于时均速度的梯度和混合长度 l_m 的乘积，在二维问题中，有：

$$\mu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

湍流切应力表示为：
$$-\overline{\rho u'v'} = \rho \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}$$

其中，混合长度 l_m 由经验公式或实验确定。

3. 零方程模型及一方程模型

3.1 零方程模型

关于零方程模型的几点讨论：

- 直观简单，对于如射流、混和层、扰动和边界层等带有薄的剪切层的流动比较有效；
- 只有在简单流动中才比较容易给定混合长度 l_m ，对于复杂流动则很难确定 l_m ，而且不能用于模拟带有分离及回流的流动，在实际工程中很少使用；
- 把Reynolds应力和当地平均速度相联系，是一种局部平衡的概念，忽略了对流和扩散的影响。



一方程模型

3. 零方程模型及一方程模型

3.2 一方程模型

在湍流的时均方程组的基础上，再建立一个湍动能的输运方程，而 μ_t 表示成 k 的函数，从而使得方程组封闭。湍动能的输运方程可写为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho C_D \frac{k^{3/2}}{l}$$

瞬态项
对流项
扩散项
产生项
耗散项

Kolmogorov-Prandtl表达式：

$$\mu_t = \rho C_\mu \sqrt{k} l$$

l ：湍流脉动的长度比尺。
如何确定 l ，仍不易解决。

4. 标准 $k - \varepsilon$ 两方程模型

4.1 标准 $k - \varepsilon$ 模型的定义

在关于湍动能 k 的方程的基础上，再引入一个关于湍动耗散率 ε (turbulent dissipation rate) 的方程，便形成了 $k - \varepsilon$ 两方程模型，称为标准 $k - \varepsilon$ 模型 (standard $k - \varepsilon$ model)。该模型是由Launder和Spalding于1972年提出的。在模型中，湍动耗散率 ε 被定义为：

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\rho} \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right)}$$

湍动粘度 μ_t 可表示成 k 和 ε 的函数，即：

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

4. 标准 $k - \varepsilon$ 两方程模型

4.1 标准 $k - \varepsilon$ 模型的定义

在标准 $k - \varepsilon$ 模型中, k 和 ε 是两个基本未知量, 与之相对应的输运方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon$$

4. 标准 $k - \varepsilon$ 两方程模型

4.2 标准 $k - \varepsilon$ 模型的有关计算公式

- G_k 是由于平均速度梯度引起的湍动能 k 的产生项:

$$G_k = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

- G_b 是由于浮力引起的湍动能 k 的产生项, 对于不可压流体为零, 对于可压流体:

$$G_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

热膨胀系数: $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$

湍动Pr数: $\text{Pr}_t = 0.85$

g_i : 重力加速度在*i*方向上分量

4. 标准 $k - \varepsilon$ 两方程模型

4.2 标准 $k - \varepsilon$ 模型的有关计算公式

- Y_M 代表可压湍流中脉动扩张的贡献，对于不可压流体为零，对于可压流体，有：

$$Y_M = 2\rho\varepsilon M_t^2$$

湍动马赫数： $M_t = \sqrt{k/a^2}$ 声速 a ： $a = \sqrt{\gamma RT}$

- 在标准 $k - \varepsilon$ 模型中，根据Launder等的推荐值及后来的实验验证，模型常数的取值为：

$$C_{1\varepsilon} = 1.44 \quad C_{2\varepsilon} = 1.92 \quad C_\mu = 0.09 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

对于可压流体计算与浮力相关的系数 $C_{3\varepsilon}$ ：

当主流方向与重力方向平行时 $C_{3\varepsilon} = 1$ ，垂直时 $C_{3\varepsilon} = 0$

4. 标准 $k - \varepsilon$ 两方程模型

4.2 标准 $k - \varepsilon$ 模型的有关计算公式

根据以上分析，当流动为不可压，且不考虑用户自定义的源项时，

$G_b = 0, Y_M = 0, S_k = 0, S_\varepsilon = 0$ ，这时，标准 $k - \varepsilon$ 模型变为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

其中， G_k 展开式为： $G_k = \mu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}$

4. 标准 $k - \varepsilon$ 两方程模型

4.3 标准 $k - \varepsilon$ 模型的控制方程组有关计算公式

采用标准 $k - \varepsilon$ 模型求解流动换热问题时，控制方程包括连续方程、动量方程、能量方程、 k 方程、 ε 方程。这些方程都可表示成如下通用形式：

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\phi)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial z} \right] + S$$

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{u}\phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) + S$$

下表给出了三维直角坐标系下，与通用形式所对应的 $k - \varepsilon$ 模型的控制方程。

4. 标准 $k - \varepsilon$ 两方程模型

方程	ϕ	扩散系数 Γ	源项 S
连续	1	0	0
x-动量	u	$\mu_{eff} = \mu + \mu_t$	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial z} \right] + S_u$
y-动量	v	$\mu_{eff} = \mu + \mu_t$	$-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + S_v$
z-动量	w	$\mu_{eff} = \mu + \mu_t$	$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{eff} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_{eff} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_{eff} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + S_w$
湍动能	k	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$G_k + \rho\varepsilon$
耗散率	ε	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$
能量	T	$\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{\sigma_T}$	S 按实际问题而定

4. 标准 $k - \varepsilon$ 两方程模型

4.3 标准 $k - \varepsilon$ 模型的解法及适用性

- ◆ 模型中的有关系数，主要是根据一些特殊条件下的实验结果而确定的。在数值计算的过程中，需要针对特定问题，参考相关文献研究寻找更合理的取值；
- ◆ 本节所给出的 $k - \varepsilon$ 模型，是针对充分发展的湍流流动建立的。它是一种针对高Re数的湍流计算模型。当Re数比较低时，如：近壁区，湍流发展并不充分，湍流脉动影响可能不如分子粘性的影响大，在更贴近壁面的底层，流动可能处于层流状态。因此，对Re数较低的流动，上述模型就会出现問題。这时，必须采用特殊的处理方式，以解决近壁区内的流动计算及低Re数的流动计算问题。常用方法：**壁面函数法、低Re数的 $k - \varepsilon$ 模型**；
- ◆ 用于强旋转流动、弯曲壁面流动等，有一定失真。---**改进的 $k - \varepsilon$ 模型**。

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.1 近壁区流动特点

- ◆ 对于有固体壁面的充分发展的湍流流动，沿壁面法线不同的距离上，可将流动划分为**壁面区**（或称内区、近壁区）和**核心区**（或称外区）。对核心区的流动，我们认为完全是湍流区。
- ◆ 在壁面区，流体运动受壁面流动条件的影响比较明显，可以分为三个子层：
粘性底层、过渡层、对数律层

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.1 近壁区流动特点

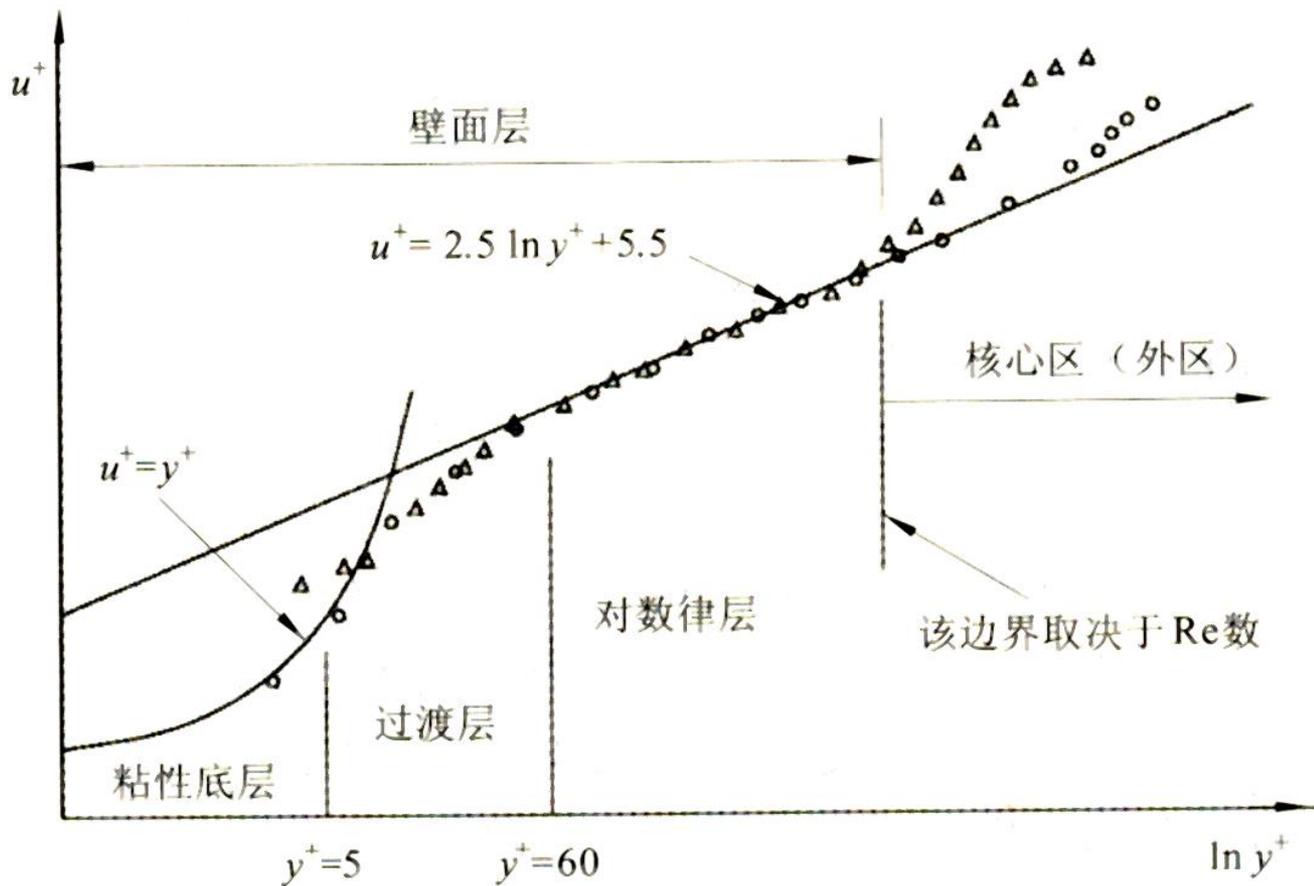
粘性底层：紧贴固体壁面的极薄层，其中粘性力在动量、热量及质量交换中起主导作用。湍流切应力可以忽略。流动几乎是层流流动，平行于壁面的速度分量沿壁面法线方向为线性分布。

过渡层：处于粘性底层外面，其中粘性力与湍流切应力的作用相当，流动状况比较复杂，很难用一个公式或定律来描述。厚度极小，在工程计算中通常不明显划出，归入对数律层。

对数律层：处于最外层，其中粘性力影响不明显，湍流切应力占主要地位，流动处于充分发展的湍流状态，流速分布接近对数律。

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.1 近壁区流动特点



无量纲速度

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

无量纲距离

$$y^+ = \frac{y \rho u_\tau}{\mu}$$

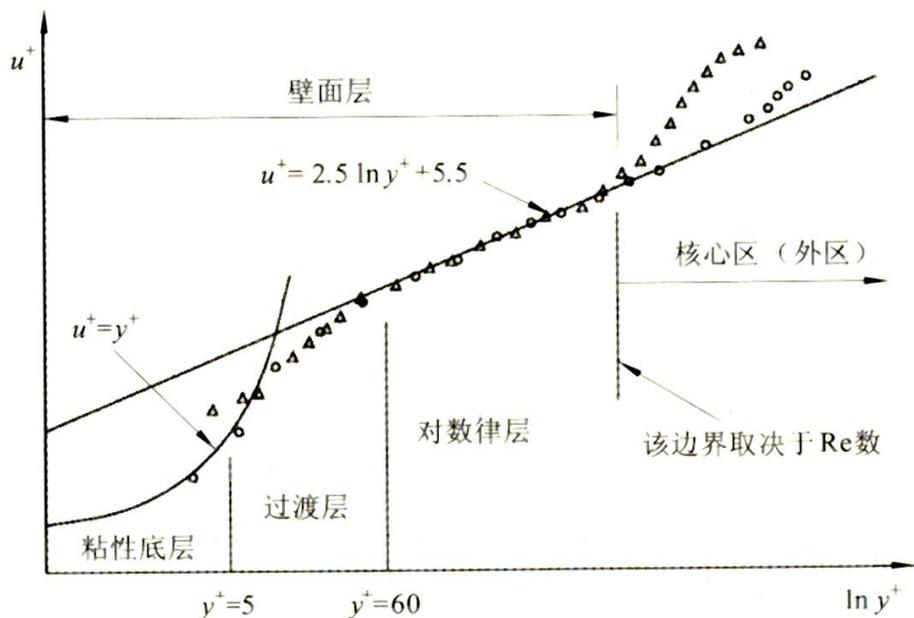
壁面摩擦速度

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

壁面区 3 个子层的划分与相应的速度

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.1 近壁区流动特点



壁面区 3 个子层的划分与相应的速度

- ① $y^+ < 5$, 流动处于粘性底层, 速度沿壁面法线方向呈线性分布, 即:

$$y^+ = u^+$$

- ② $60 < y^+ < 300$ 时, 流动处于对数律层, 速度沿壁面法线方向呈对数律分布, 即:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B = \frac{1}{k} \ln (E y^+)$$

其中, k 为 Karman 常数, B 和 E 是与表面粗糙度有关的常数。对于光滑壁面有 $k=0.4$, $B=5.5$, $E=9.8$ 。壁面粗糙度增加 B 减小。

- ③ 上面给出的各子层的分界值只是近似值, 有的文献介绍 $30 < y^+ < 500$ 对应对数律层, 有文献推荐 $y^+ = 11.63$ 作为粘性底层与对数律层的分界点 (忽略过渡层)

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.2 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题

- ◆ 标准的 $k - \varepsilon$ 模型或其改进模型，都是针对充分发展的湍流才有效，即均为高Re的湍流模型，他们只能用于求解处于湍流核心区的流动；
- ◆ 在壁面区，流动变化很大，特别是粘性底层，流动几乎为层流，湍流应力几乎不起作用。因此不能用前面介绍的 $k - \varepsilon$ 模型来求解这个区域的流动。

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

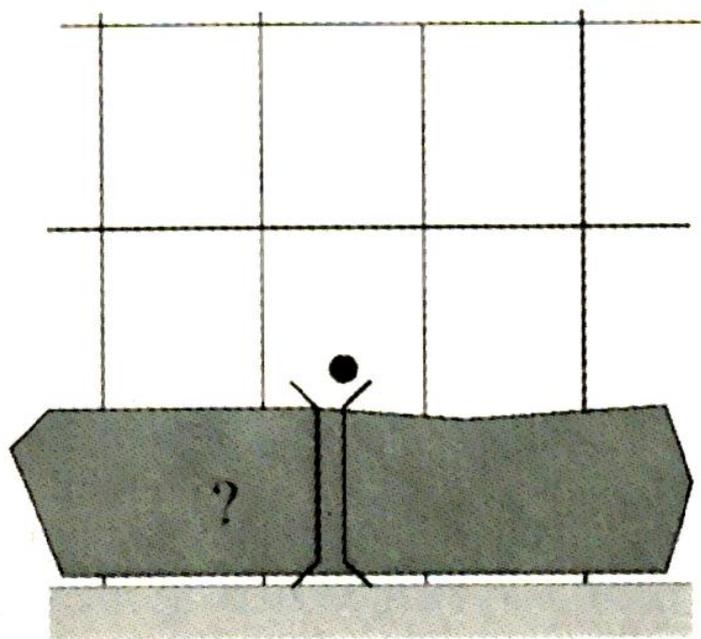
5.2 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题

解决途径：

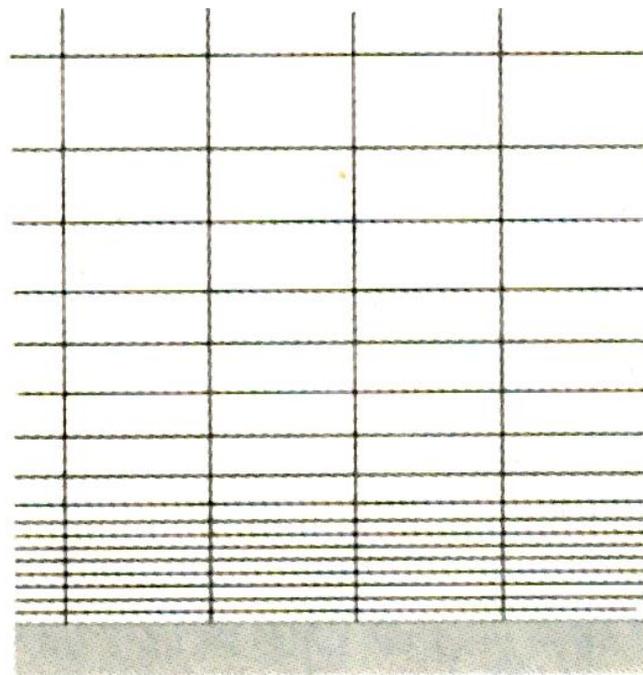
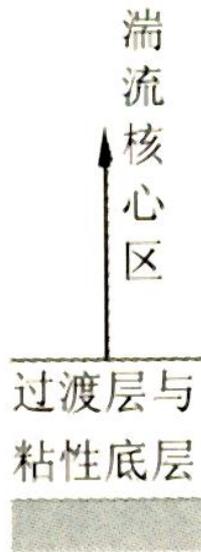
- ① 不对粘性影响比较明显的区域（粘性底层和过渡层）进行求解，而是用一组半经验公式（即壁面函数）将壁面上的物理量与湍流核心区内相应的物理量联系起来，壁面函数法；
- ② 采用低Re的 $k - \varepsilon$ 模型来求解粘性影响比较明显的区域（粘性底层和过渡层），这时要求在壁面区划分比较细密的网格。越靠近壁面，网格越细。

5. 在近壁区使用 $k-\varepsilon$ 模型的问题及对策

5.2 在近壁区使用 $k-\varepsilon$ 模型的问题



(a) 壁面函数法对应的计算网格



(b) 低 Re 数 $k-\varepsilon$ 模型对应的计算网格

求解壁面区流动的两条途径所对应的计算网格

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

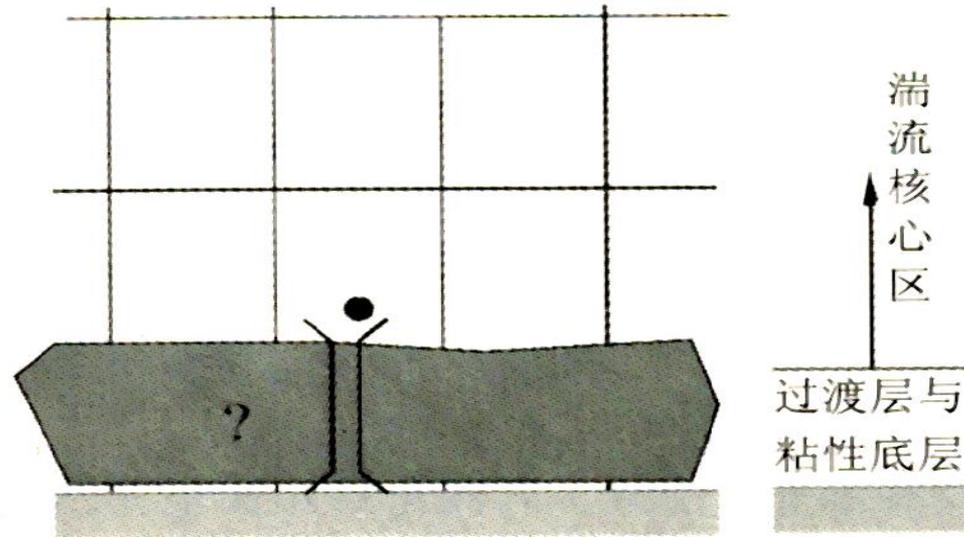
5.3 壁面函数法 (Wall Function)

基本思想：对于湍流核心区的流动使用 $k - \varepsilon$ 模型来求解，而在壁面区不进行求解，直接使用半经验公式将壁面上的物理量与湍流核心区内的求解变量联系起来。这样，不需要对壁面区内的流动进行求解，就可以直接得到与壁面相邻控制体积的节点变量值。

必须与高Re数 $k - \varepsilon$ 模型配合使用！

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.3 壁面函数法



划分网格时，不需要在壁面区加密，只需把第一个内节点布置在对数律成立的区域内，即配置在湍流充分发展的区域。图中阴影部分是壁面函数公式有效的区域，阴影以外的网格区域则是使用高Re数的 $k - \varepsilon$ 模型进行求解的区域。壁面公式好像一个桥梁，将壁面的值同相邻控制容积节点变量值联系起来。

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.3 壁面函数法

壁面区动量方程中变量计算式： (核心区仍用高Re数 $k - \varepsilon$ 模型)

当与壁面相邻的控制体积的节点P满足 $y^+ > 11.63$ ，流动处于对数律层，此时速度 u_p 按照下式计算：

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B = \frac{1}{k} \ln(Ey^+) \quad (B, E \text{ 及 } k \text{ 取值见前页})$$

$$y^+ = \frac{\Delta y_P (C_\mu^{1/4} k_P^{1/2})}{\mu} \quad (k_p \text{ 为湍动能})$$

当与壁面相邻的控制体积的节点满足 $y^+ < 11.63$ ，流动处于粘性底层，此时速度 u_p 由层流应力应变关系决定：

$$u^+ = y^+$$

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.3 壁面函数法

壁面区能量方程中温度 T 计算式：（核心区仍用高Re数 $k - \varepsilon$ 模型）

为了建立计算网格节点上的温度与壁面上的物理量之间的关系，定义参数：

$$T^+ = \frac{(T_w - T_P) \rho c_p (C_\mu^{1/4} k_P^{1/2})}{q_w} \quad (k_p \text{ 为湍动能})$$

对不可压流体：

$$T^+ = \text{Pr}_t \left[\frac{1}{k} \ln(Ey^+) + P \right]$$

$$\text{其中： } P = 9.24 \left[\left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \right)^{3/4} - 1 \right] \left(1 + 0.28 e^{-0.007 \text{pr}/\text{pr}_t} \right)$$

Pr 是分子的Prandtl数， Pr_t 是湍动Prandtl数（取值为0.8或0.9）

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.3 壁面函数法

壁面区湍动能方程与耗散率方程中 k 和 ε 计算式：（核心区仍用高Re数 $k - \varepsilon$ 模型）

- ① k 方程不单独计算，在包括与壁面相邻的控制体积内的所有计算区域进行求解，在壁面上湍动能 k 的边界条件为：

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0 \quad (\text{n为垂直与壁面的局部坐标})$$

- ② 在与壁面相邻的控制体积内，耗散率 ε 与构成 k 方程源项的 G_k 按照局部平衡假定来计算，即与壁面相邻的控制体积内 ε 与 G_k 均相等，不求解 ε 方程：

$$\varepsilon_P = \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{k \Delta y_P} \quad G_k = \tau_w \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w \frac{\tau_w}{k \rho C_\mu^{3/4} k_P^{3/2} \Delta y_P}$$

（上两式中 k_p 为湍动能， k 为对数律中的常数）

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.3 壁面函数法

(核心区仍用高Re数 $k - \varepsilon$ 模型)

- 针对各个求解变量 (u, T, k, ε) 所给出的壁面边界条件均已由壁面函数考虑到了, 所以, 不用担心壁面处的边界条件;
- 上述壁面函数法是FLUENT选用的默认方法, 对各种壁面流动都非常有效。

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.4 低Re数的 $k - \varepsilon$ 模型

- ◆ 壁面函数法表达式主要是根据简单的平行流动边界层的实测资料归纳出来的，同时，并未对壁面区内部壁面内部流动进行“细致”的研究，尤其是在粘性底层，分子粘性的作用并未有效地计算。
- ◆ 为了使基于 $k - \varepsilon$ 模型的数值计算能从高Re区域一直进行到固体壁面上（该处Re=0），许多学者提出了对高Re数 $k - \varepsilon$ 模型进行修正的方案，使得修正后的方案可以自动适应不用Re数区域。

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.4 低Re数的 $k - \varepsilon$ 模型

◆ Jones和Launder认为，低Re数的流动主要体现在粘性底层中，流体的分子粘性起着绝对的支配地位。为此，必须对高Re的 $k - \varepsilon$ 模型进行以下三方面的修改，才能使其用于计算各种Re数的流动：

- ① 为体现分子粘性的影响，控制方程的扩散系数项必须同时包括湍流扩散系数与分子扩散系数两部分；
- ② 控制方程的有关系数必须考虑不同流态的影响，即在系数计算公式中引入湍流雷诺数 $Re_t = \rho k^2 / (\mu \varepsilon)$
- ③ 在k方程中应考虑壁面附近湍动能的耗散不是各向同性这一因素。

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.4 低Re数的 $k - \varepsilon$ 模型

考虑粘性底层中湍动能耗散率不是各向同性而加入的

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - \rho \varepsilon - \left| 2\mu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial n} \right)^2 \right|$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k |f_1| - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} |f_2| + \left| 2 \frac{\mu \mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)^2 \right|$$

式中:

$$\mu_t = C_\mu |f_\mu| \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$$

为了使k的计算结果与某些实验测定值符合的更好而加入的

以上三式中，红色部分就是低Re数模型区别与高Re数模型的部分。

5. 在近壁区使用 $k - \varepsilon$ 模型的问题及对策

5.4 低Re数的 $k - \varepsilon$ 模型

系数 f_1, f_2 和 f_μ 的引入，实际上等于对标准 $k - \varepsilon$ 模型中的系数 $C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}$ 和 C_μ 进行了修正，计算方法如下。显然，当 Re_t 很大时， f_1, f_2 和 f_μ 均趋近于1。

$$f_1 \approx 1.0$$

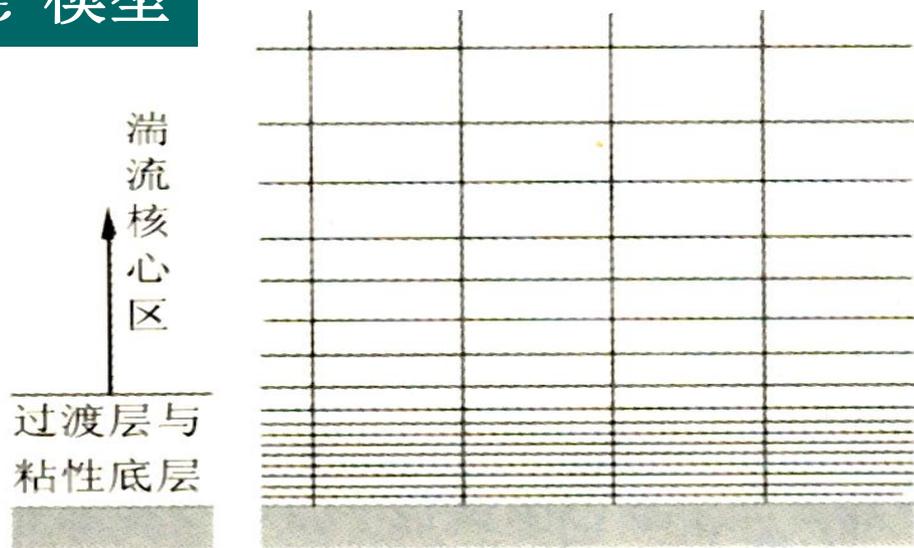
$$f_2 = 1.0 - 0.3 \exp(-Re_t^2)$$

$$f_\mu = \exp\left[-2.5 / \left(1 + \frac{Re_t}{50}\right)\right]$$

$$Re_t = \rho k^2 / (\mu \varepsilon)$$

5. 在近壁区使用 $k-\varepsilon$ 模型的问题及对策

5.4 低Re数的 $k-\varepsilon$ 模型



在使用低Re数 $k-\varepsilon$ 模型进行流动计算时，充分发展的湍流核心区及粘性底层均用同一套公式计算，但由于粘性底层速度梯度大，因此，在粘性底层的网格要密；

建议：当局部湍流雷诺数 Re_t 小于150时，就应该使用低Re数 $k-\varepsilon$ 模型。

5. 在近壁区使用 $k-\varepsilon$ 模型的问题及对策

讨论：

- ◆ 上述壁面函数法是FLUENT选用的默认方法，对各种壁面流动都非常有效。当流动分离过大或近壁面流动处于高压之下时，该方法不理想，为此，FLUENT还提供了非平衡的壁面函数法及增强型壁面函数法。详见FLUENT用户手册；
- ◆ 相对于低Re数 $k-\varepsilon$ 模型，壁面函数法效率高，工程实用性强；
- ◆ 低Re数 $k-\varepsilon$ 模型可以得到粘性底层和过渡层内的“真实”速度分布，壁面函数法无法做到；
- ◆ 采用低Re数 $k-\varepsilon$ 模型时，因壁面区（粘性底层和过渡层）内物理量变化非常大，必须使用细密的网格，从而造成计算成本的提高。

5. 小结

湍流是一种复杂的流动现象，即使是最简单的边界条件的流动，流体运动的长度和时间尺度范围也非常广。湍流是不易进行数学处理的问题，一百多年来一直困扰着理论学家，直到目前，仍有许多问题没有能够被人们完全掌握。

本章从数值模拟的角度出发，抛开复杂的湍流机理，首先分析了湍流流动的主要特征，特别给出了时均化的控制方程。接着，在时均化的基础上介绍了常用的湍流模型。还介绍了介于直接数值模拟与时均化方法之间的大涡模拟方法。

本章所介绍的湍流模拟方法和湍流模型，各有其适用场合。从应用的普遍性上看，基于Reynolds平均法的 $k-\varepsilon$ 模型应用最为广泛。而Reynolds应力模型在理论上比 $k-\varepsilon$ 模型更完善，也曾经被许多学者看作是最有前途的湍流数值计算方法，但由于近来对 $k-\varepsilon$ 模型的各种改进版本不断取得更好的应用效果，使得 $k-\varepsilon$ 模型仍然占据湍流模拟的绝对统治地位，特别是RNG $k-\varepsilon$ 模型和Realizable $k-\varepsilon$ 模型，被广泛地应用于模拟各种工程实际问题。

5. 小结

对直接数值模拟方法和大涡模拟方法的研究与应用，在近几年有明显增加的趋势，但目前直接数值模拟方法还很难用于实际工程应用，大涡模拟方法是一种值得引起注意的研究方法，有可能在未来几年内得到较大发展。

本章所介绍的各种湍流模型，只是对湍流控制方程组封闭性的一种补充或修正，本章并未提出新的针对控制方程的数值解法，第4章提出的控制方程的离散方案，第6章提出的流场数值解法，对本章的湍流控制方程仍然有效。

在选择湍流模型及其数值解法时，除了要考虑与所求解的问题及现有计算条件相适应外，还需要考虑模型对初始条件和边界条件的适用性。例如，在近壁面处，就不能直接使用各种 $k-\varepsilon$ 模型或Reynolds应力模型，而必须借助壁面函数法或低 Re 数模型进行模拟。

5. 小结

- ◆ 湍流特征
- ◆ DNS、LES、RANS
- ◆ 湍动粘度
- ◆ 壁面处流动特征及模拟方法

复习思考题

1. 湍流流动特征？
2. 在湍流流动中，参数 μ 与 μ_t 的物理意义如何？二者有何联系和区别？对流动各有什么影响？如何确定这两个参数的值？
3. 建立湍流的时均化方程有何物理意义？
4. 近壁区的流动有什么特点？

本章参考文献：

王福军 编著，计算流体力学分析—
CFD软件原理与应用，清华大学出版社，
北京，2004.