第5章 受弯构件正截面承载力的计算

受弯构件通常指截面上仅有弯矩或弯矩和剪力共同作用为主、轴力可以忽略不计的构件。梁和板是典型的受弯构件，它们是土木工程中使用数量最大、应用最广泛的一类构件。土木工程结构中受弯构件常用的截面形式有矩形、T形、工字形、槽形和箱形等。构件受弯后，在截面上形成受压区和受拉区。混凝土的抗拉强度低，处于受拉区的混凝土在弯矩不大时就开裂。所以，需在梁截面的受拉区布置钢筋，称为纵向钢筋，用以承受由弯矩产生的拉应力。实际工程中，钢筋混凝土受弯构件内除纵向钢筋外，一般还配置架立钢筋和箍筋等。受弯构件在荷载等因素作用下，破坏可能发生在弯矩最大处，也可能发生在剪力最大或弯矩和剪力都较大处。若破坏发生在弯矩最大处，其破坏面与构件轴线垂直，称为正截面破坏；若破坏发生在剪力最大或弯矩和剪力都较大处，其破坏面与构件轴线斜交，称为斜截面破坏。

为保证安全，结构中的受弯构件，既不能发生正截面破坏，也不能发生斜截面破坏，因此，在钢筋混凝土受弯构件的设计中，既要进行正截面承载能力，又要进行斜截面承载能力的计算。本章只讨论钢筋混凝土受弯构件的正截面承载力的计算和设计方法，斜截面承载能力的计算和设计方法将在第6章介绍。

5.1 受弯构件正截面的受力特性

5.1.1 单筋矩形适筋梁正截面受弯的受力过程和破坏形态

矩形截面梁承受纯弯矩的作用（剪力V=0），只在受拉侧配置钢筋（称单筋）是最基本的钢筋混凝土构件。这种构件的受力全过程和力学性能反应，已进行过大量试验研究。一般在试件两端简支，跨中作用着两个对称的集中荷载，梁跨中的纯弯段为试验段，试验过程中量测跨中的挠度、曲率、截面的（平均）应变分布、中和轴位置和钢筋的应变等主要力学性能反应，如图5.1。图中受压区钢筋为构造配筋。

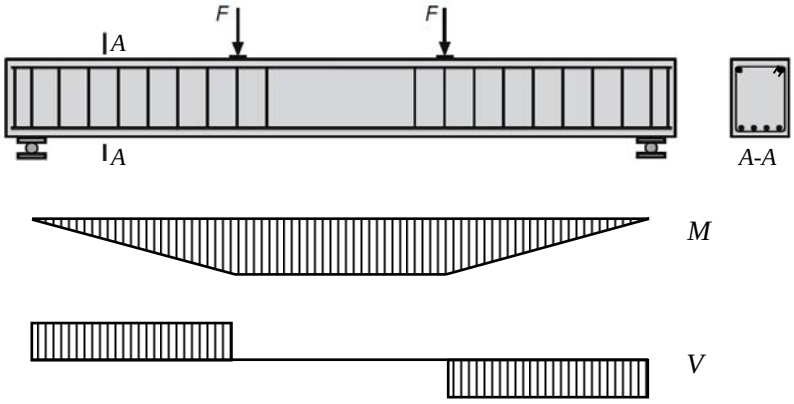


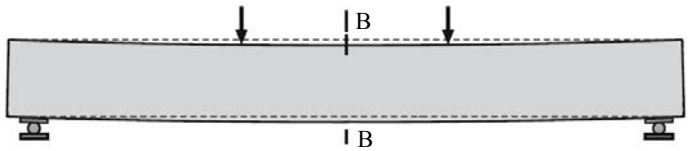
图5.1 混凝土简支梁的配筋及内力

根据试验过程中对试验梁裂缝开展和变形情况的观察（图5.2）以及试验数据的分析，钢筋混凝土单筋适筋梁从开始加载到正截面完全破坏的全过程可分为三个阶段：

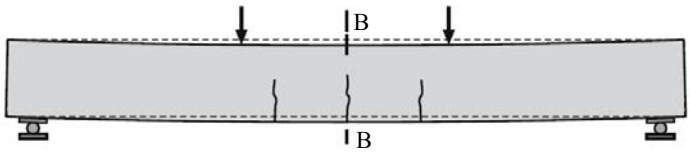
1. 第Ⅰ阶段（受拉区混凝土开裂前）

当荷载很小时，截面上的内力很小，混凝土的应力与应变成正比，截面上的应力为线性

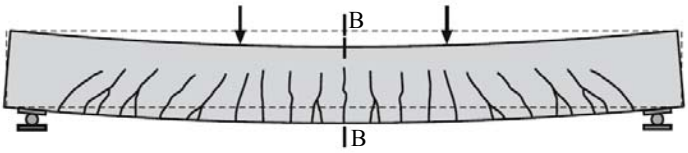
分布（图5.3b）。此时，试件处于弹性阶段，钢筋和混凝土的应力、曲率均随弯矩成正比增



混凝土开裂前（第Ⅰ阶段）



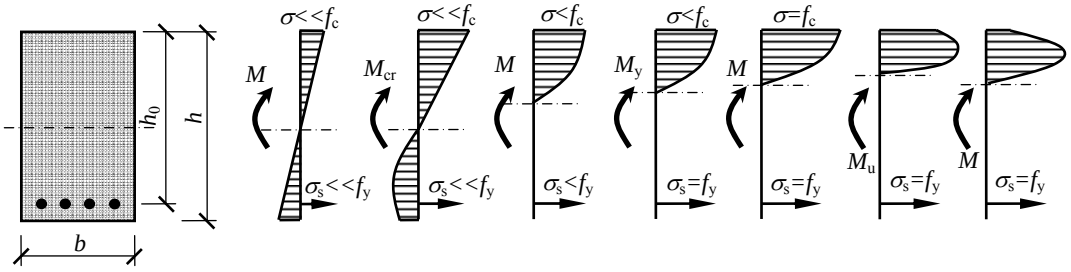
混凝土开裂后钢筋屈服前（第Ⅱ阶段）



钢筋屈服后混凝土压碎前（第Ⅲ阶段）

图 5.2 钢筋混凝土试验梁的变形与裂缝开展

加。随着弯矩增加，截面上的应变不断增大，受拉区混凝土出现少量塑性变形，拉应力分布渐成曲线。受压区混凝土的应力仍远小于其抗压强度，保持线性分布。当荷载增大到某一数值，受拉区混凝土的应变达到开裂应变值时，试件将开裂，截面处在开裂临界状态（图5.3c），这种受力状态称为第Ⅰ阶段末（$Ⅰ_a$）。此时的弯矩称为开裂弯矩（M_{cr}），其值约为极限弯矩（M_u）的20%～30%，第Ⅰ阶段末是计算受弯构件抗裂度的依据。受弯构件处于$Ⅰ_a$时，由于粘结力的存在，受拉钢筋的应变与周围同一水平处混凝土拉应变相等，此时钢筋应变值接近混凝土的极限拉应变值，相应的应力较低，约（20～30）N/mm^2。



（a） （b） （c） （d） （e） （f） （g） （h）

图5.3 混凝土梁跨中断面不同受力阶段的截面应力
（a）截面；（b）开裂前；（c）即将开裂；（d）开裂后；（e）钢筋屈服；（f）钢筋屈服后；（g）承载力极限状态；（h）下降段

第Ⅰ阶段的特点是：1）混凝土没有开裂；2）受压区混凝土的应力图形是直线，受拉区混凝土的应力图形在第Ⅰ阶段前期是直线，后期是曲线；3）弯矩与截面曲率基本上是线性关系；4）第Ⅰ阶段末（$Ⅰ_a$）的标志为受拉区混凝土边缘应变达到混凝土的极限拉应变。

2. 第Ⅱ阶段（受拉区混凝土开裂到纵向钢筋屈服前）

跨中弯矩超过开裂弯矩后，最薄弱截面首先出现肉眼可见裂缝。裂缝细而短，靠近截面下部，与钢筋轴线垂直相交。此时，裂缝处混凝土不再承受拉应力而退出工作，钢筋的拉应

力突增（钢筋仍处于弹性阶段），梁的挠度和截面曲率都突然增大,中和轴明显上升，混凝土的压应力因弯矩增大和压区面积减小而增长较快，压应力分布曲线微凸（图5.3d）。

随着弯矩增大，已有裂缝缓慢增宽，并往上延伸，隔一定间距相继出现新的裂缝，钢筋拉应力、受压区混凝土压应力和截面曲率等都继续稳定增大。裂缝截面处中和轴位置也继续上升，中和轴以下尚有受拉混凝土未开裂，虽然仍可承受一小部分拉力，但受拉区拉力主要由钢筋承担。弯矩继续增大，截面曲率加大，主裂缝开展越来越宽。受压区混凝土应变不断增加，塑性性质表现得越来越明显，受压区应力图形呈曲线变化。当弯矩增加到某一数值，受拉区纵向受力钢筋开始屈服，钢筋应力达到其屈服强度（图5.3e）时，称为第Ⅱ阶段末（$Ⅱ_a$），此时的弯矩用M_y表示。

第Ⅱ阶段受弯构件处于带裂缝的工作状态，相当于梁正常使用时的受力状态，是计算正常使用极限状态变形和裂缝宽度的依据。

第Ⅱ阶段受力特点是：1）裂缝截面处，受拉区大部分混凝土退出工作，拉力主要由纵向受拉钢筋承担，但钢筋没有屈服；2）受压区混凝土已有塑性变形，但不充分，压应力图形为只有上升段的曲线；3）弯矩与截面曲率是曲线关系；4）第Ⅱ阶段末（$Ⅱ_a$）的标志为受拉钢筋屈服。

3. 第Ⅲ阶段（纵向钢筋屈服后）

受拉区纵向受力钢筋屈服后，钢筋应力保持不变，裂缝截面压区混凝土应力仍小于其抗压强度，弯矩的增量只能靠加大力臂来平衡。钢筋屈服后的应变增长快，破坏了裂缝附近的粘结，使裂缝增宽，并向上延伸，混凝土受压区面积的减小使力臂有所增加。同时，受压区混凝土应力迅速增大，当顶面压应力达最大值f_c时，弯矩仍未达极限值（图5.3f）。弯矩再稍有增加，顶部混凝土进入应力-应变曲线的下降段，并出现水平方向裂缝。此时裂缝上升很高，下部裂缝宽度大，混凝土受压区面积已经很小，力臂达最大值，达到截面的极限弯矩值M_u（图5.3g）。此时，构件已不能再进一步承担载荷，达到其承载力极限状态，亦即第Ⅲ阶段末，用$Ⅲ_a$ 表示。

第Ⅲ阶段末（$Ⅲ_a$）是计算正截面抗弯承载力的依据，此时，受拉钢筋屈服，受压区边缘混凝土压应变达到其极限压应变。

继续进行试验，钢筋应力仍不变，而应变增大，受压区混凝土的应变亦增大，但顶面附近的应力减小，峰值压应力下移，截面上力臂减小，弯矩开始缓缓下降（图5.3h）。最后，受拉裂缝中的一条突然明显增宽上升，受压区混凝土水平裂缝增多且破坏加重，受压区混凝土形成一个三角形破坏区，混凝土被压酥剥落，梁的承载力很快下降而退出工作。

第Ⅲ阶段的特点是：1）纵向受拉钢筋屈服，拉力保持为常值；裂缝截面处，受拉区混凝土退出工作，受压区混凝土压应力曲线图形比较丰满，有上升段曲线，也有下降段曲线；2）弯矩略有增加，达极限弯矩后，弯矩-曲率关系曲线有下降段；3）第Ⅲ阶段末（$Ⅲ_a$）的标志为受压区边缘压应变达到混凝土的极限压应变。

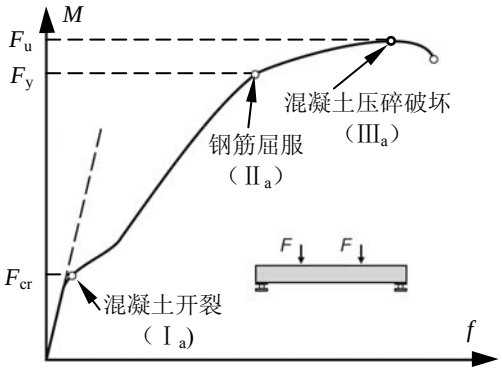


图 5.4 钢筋混凝土梁载荷-位移曲线

综上所述，试验梁从开始加载到破坏的全过程有以下几个特点：

（1）由载荷-曲率（或挠度）曲线（见图5.4）可知，第Ⅰ阶段梁的截面曲率或挠度增长速度较慢，曲率（或挠度）基本随载荷增加成线性增加；第Ⅱ阶段由于梁带裂缝工作，曲率（或挠度）的增加比荷载增加速度快，载荷-曲率（或挠度）曲线为上升曲线；第Ⅲ阶段

由于钢筋屈服，截面曲率和梁的挠度急剧增加，达到极限弯矩前载荷-曲率（或挠度）曲线为接近水平线的上升曲线。

（2）由图 5.2、5.3 可见，随着弯矩的增大，中和轴不断上移，受压区高度逐渐缩小，混凝土受压边缘压应变随之增大，受拉钢筋的拉应变也随弯矩的增长而增大，但平均应变仍符合平截面假定。受拉区混凝土的拉应力图形大致与混凝土单轴受拉时的应力-应变全曲线相对应；受压区混凝土的压应力图形也大致与其单轴受压时的应力-应变全曲线相对应，即第Ⅰ阶段近似为直线，第Ⅱ阶段为只有上升段的曲线，第Ⅲ阶段是有下降段的曲线。

（3）第Ⅰ阶段钢筋应力增长速度较慢；受拉区混凝土开裂（$M=M_{cr}$）前、后，钢筋应力发生突变，第Ⅱ阶段钢筋应力较第Ⅰ阶段增长速度快；当$M=M_y$时，钢筋应力达到屈服强度f_y，第Ⅲ阶段钢筋应力保持屈服应力不变，当$M=M_u$时，受压边缘混凝土压坏。

5.1.2 配筋率对受弯构件正截面破坏特征的影响

上面介绍的钢筋混凝土梁受弯全过程，是指配筋量适中的梁。它的三个特征弯矩分别是开裂弯矩M_{cr}、钢筋屈服弯矩M_y，和极限弯矩M_u。梁的配筋量不同时，其受力性能、破坏形态和特征弯矩都有较大变化。根据配筋率不同，钢筋混凝土受弯构件的破坏有少筋、适筋和超筋三种破坏形态，如图5.5。

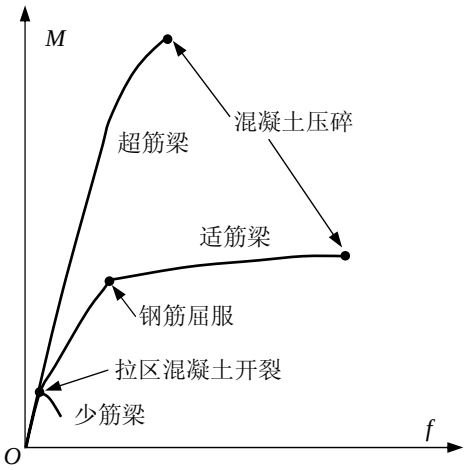


图 5.5 不同破坏形态梁的 M-f 曲线

1. 适筋破坏形态

如前所述，适筋破坏形态的特点是，纵向受拉钢筋先屈服，受压区混凝土随后压碎。在钢筋应力到达屈服强度之初，受压区边缘的应变尚小于混凝土极限压应变。梁完全破坏以前，钢筋经历较大的塑性变形，随之引起裂缝急剧开展和梁挠度激增。弯矩由钢筋屈服时的弯矩M_y增大到极限弯矩M_u，增量虽然较小，但截面曲率和梁的挠度增量却很大。这意味着，适筋梁当弯矩超过M_y后，在截面承载力没有明显变化的情况下，具有较大的变形能力。换言之，适筋梁具有较好的延性，破坏前有明显的破坏预兆，破坏属于延性破坏类型。

2. 超筋破坏形态

配筋量过大的梁称为“超筋梁”，其破坏特点是，纵向钢筋屈服前，受压区混凝土先被压碎，此时梁即破坏。试验表明，超筋梁破坏时，钢筋仍处于弹性阶段，梁的裂缝开展不宽、延伸不高，挠度亦不大。换言之，超筋梁没有足够的延性，破坏前没有明显的破坏预兆，由于受压区混凝土被压碎而突然破坏，故属于脆性破坏类型。

超筋梁配置了过多的受拉钢筋，但梁破坏时，钢筋应力低于屈服强度，不能充分发挥其作用，造成钢材浪费。这不仅不经济，且破坏突然，故设计中不允许采用超筋梁。

3. 少筋破坏形态

配筋量过小的梁称为“少筋梁”，其破坏特点是，受拉区混凝土一开裂，整个构件就破坏。少筋梁不但承载能力低，而且只要混凝土一开裂，裂缝就急剧扩展，裂缝处的拉力全部由钢筋承担，钢筋应力突然增大而屈服，构件立即发生破坏。构件破坏时，裂缝往往只有一条，不仅开展宽度很大，且沿梁高方向延伸较长。

少筋梁的破坏由混凝土受拉控制，破坏前的截面应力、中和轴和曲率等的变化都与素混凝土梁接近。构件的破坏一般在第一条裂缝出现后突然发生，破坏过程短促，没有先兆，所以也属于“脆性破坏”。

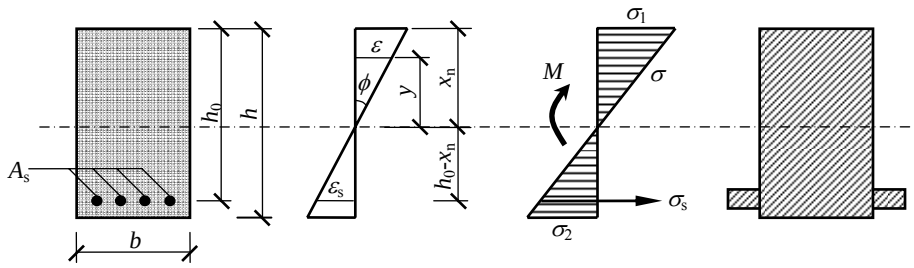
少筋梁虽然在受拉区配置了钢筋，但不能起到提高混凝土受弯构件承载能力的作用。少筋梁的截面尺寸过大，混凝土的抗压性能没能充分利用，不经济，故在建筑工程中不允许采用。不过，在水利工程中，截面尺寸往往很大，从经济方面考虑，有时允许采用少筋梁。

5.2 受弯构件正截面受力过程的理论分析

钢筋混凝土受弯截面与轴压截面、轴拉截面相仿，也可按弹性、弹塑性或塑性进行分析，也需要分几个阶段考虑，下面，以钢筋混凝土单筋适筋梁为例依次进行讨论。

5.2.1 受弯截面的弹性分析

1. 第Ⅰ阶段（开裂前）



（a）　　（b）　　（c）　　（d）

图 5.6 混凝土开裂前截面的应变、应力及换算面积
（a）截面；（b）应变；（c）应力；（d）换算面积

（1）基本方程

图5.6a表示所研究的受弯构件，截面为矩形，尺寸及配筋如图所示。截面承受弯矩M，引起弯曲变形，曲率为ϕ。

这个截面必须满足下面三个基本条件，即：

① 平衡条件

$$\sum X = 0, \qquad \int_0^{x_n} \sigma b dy - \int_0^{h-x_n} \sigma b dy - \sigma_s A_s = 0 \tag{5-1}$$

$$\sum M = 0, \quad M = \int_0^{x_n} y\sigma b dy + \int_0^{h-x_n} y\sigma b dy + \sigma_s A_s \left(h_0 - x_n\right) \tag{5-2}$$

② 变形条件

$$\varepsilon = \phi y \tag{5-3}$$

$$\varepsilon_s = \phi\left(h_0 - x_n\right) \tag{5-4}$$

③ 物理条件

$$\sigma = E_c \varepsilon \tag{5-5}$$

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \tag{5-6}$$

式中，σ和ε——分别代表距中和轴y处的混凝土的应力和应变，在受压区为压应力和压应变，在受拉区为拉应力和拉应变；

x_n——中和轴离混凝土受压区上边缘的距离，即受压区高度；

b和h——分别为截面的宽度和高度；

h_0——混凝土受压区上边缘至受拉纵筋合力中心的距离，称为截面的有效高度。

以上三个基本条件，在原则上与轴压构件或轴拉构件相同，只是平衡条件及变形条件具体表达公式不同，而物理条件则完全相同。

平衡条件用两个方程表达，即分别代表水平力和力矩的平衡方程。式（5-1）等号左边的三项分别表示混疑土受压区的压力、受拉区的拉力及纵向钢筋的拉力；式（5-2）等号右边的三项分别表示上述三者对截面中和轴的力矩值。变形条件也用两个方程表达，分别代表混凝土和纵筋的应变与曲率的关系，也就是平截面假定，即任一平截面变形后仍保持为平面。

在以上三个条件的6个基本方程中，涉及的参量有13个，即：弯矩M，几何尺寸b、h、h_0、A_s、x_n，应力σ、σ_s，应变ε、ε_s，曲率ϕ，弹性模量E_c、E_s。如已知其中任意7个量，就能解得其余6个未知量。

（2）中和轴位置

将式（5-3）、（5-4）分别带入式（5-5）、（5-6）得

$$\sigma = E_c \phi y \tag{5-7}$$

$$E_s = E_s \phi \left(h_0 - x_n \right) \tag{5-8}$$

再代入式（5-1），得：

$$\int_0^{x_n} E_c \phi y b dy - \int_0^{h-x_n} E_c \phi y b dy - E_s \phi \left(h_0 - x_n \right) A_s = 0$$

即

$$\int_0^{x_n} y b dy - \int_0^{h-x_n} y b dy - \alpha_E \left(h_0 - x_n \right) A_s = 0 \tag{5-9}$$

上式积分后可解得x_n值，即确定了中和轴位置。

$$x_n = \frac{\frac{1}{2} b h^2 + \alpha_E A_s h_0}{b h + \alpha_E A_s} \tag{5-10}$$

$$\frac{x_n}{h_0} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + \alpha_E \rho}{\frac{h}{h_0} + \alpha_E \rho} \tag{5-10a}$$

式中：ρ为纵向钢筋的配筋率，$\rho = A_s/(bh_0)$；α_E为钢筋和混凝土弹性模量之比，$\alpha_E = E_s/E_c$。

式（5-10a）表明：如按弹性分析，在第Ⅰ阶段中，中和轴位置不变，它与h/h_0及$\alpha_E\rho$值有关，而与弯矩M值的大小无关。同时，x_n/h值略大于但接近于0.5，表明中和轴在略偏于受拉区的截面半高处附近。如截面为无纵向钢筋的纯混凝土截面（$\rho=0$），则$x_n/h=0.5$，即中和轴在截面的半高处。

（3）换算截面

式（5-10）中的$\alpha_E A_s$即为钢筋的换算面积，所以，轴心受压和轴心受拉构件弹性分析中“换算截面”的概念，同样可引入受弯截面的弹性分析中。图5.6d即表示矩形受弯截面的换算截面。它的换算截面积为A_0，换算惯性矩为I_0。

$$A_0 = b h + \alpha_E A_s \tag{5-11}$$

$$I_0 = \frac{b x_n^3}{3} + \frac{b\left(h - x_n\right)^3}{3} + \alpha_E A_s \left(h_0 - x_n \right)^2 \tag{5-12}$$

上式中的x_n值按式（5-10）确定。式（5-10）还说明，中和轴通过换算截面的形心。

（4）弯矩与曲率的关系（即内力与变形的关系）

将式（5-7）、（5-8）代入式（5-2），得

$$M = E_c \phi \left[\int_0^{x_n} y^2 b dy + \int_0^{h-x_n} y^2 b dy + \alpha_E A_s \left(h_0 - x_n \right)^2 \right]$$

上式方括号中各项之和实际上就是换算截面对其形心轴的惯性矩I_0，所以上式可写成：

$$M = E_c I_0 \phi \tag{5-13}$$

这就是钢筋混凝土受弯截面按弹性分析时的弯矩与曲率关系，由于E_c和I_0都是常数，所以，弯矩与曲率成正比。

（5）抗弯刚度

第4章已讲过，刚度是使构件产生单位变形所需要内力的大小，即构件所受到的内力与其变形的比值。对于受弯构件，使受弯构件产生单位曲率所需要弯矩值的大小，即弯矩M与曲率ϕ的比值，称为它的抗弯刚度，用B表示，即

$$B=\frac{M}{\phi}=E_{\mathrm{c}}I_0 \tag{5-14}$$

这是一个常数，说明，如按弹性分析，在第Ⅰ阶段中，受弯截面的抗弯刚度不变，与弯矩M的大小无关。抗弯刚度的单位是N·mm^2。

（6）弯矩与应力的关系

将式（5-13）中的ϕ代入式（5-7），得

$$\sigma=E_{\mathrm{c}}\phi y=E_{\mathrm{c}}\frac{M}{E_{\mathrm{c}}I_0}y=\frac{My}{I_0} \tag{5-15}$$

式（5-15）与熟知的弹性材料力学中的均质梁应力计算公式相似，区别在于不用I而用换算截面的惯性矩I_0。由上式可求得截面上离中和轴任意距离y处混凝土的应力。

钢筋的拉应力可由下式求得：

$$\sigma_{\mathrm{s}}=E_{\mathrm{s}}\phi\left(h_0-x_{\mathrm{n}}\right)=\alpha_{\mathrm{E}}\frac{M\left(h_0-x_{\mathrm{n}}\right)}{I_0} \tag{5-16}$$

式（5-15）和（5-16）表明，在第Ⅰ阶段中，混凝土和钢筋的应力随弯矩M增加而成正比增大。

2. 第Ⅰ阶段末（混凝土即将开裂）

在第Ⅰ阶段末，截面受拉区边缘混凝土即将开裂，即受拉区边缘混凝土拉应力σ_2达到其抗拉强度σ_{tp}。裂缝即将出现，此时的弯矩M_{cr}可由式（5-15）确定

$$\sigma_2=\frac{My}{I_0}=\frac{M_{\mathrm{cr}}\left(h-x_{\mathrm{n}}\right)}{I_0}=\sigma_{\mathrm{tp}}$$

所以

$$\begin{aligned}M_{\mathrm{cr}}&=\sigma_{\mathrm{tp}}\frac{I_0}{\left(h-x_{\mathrm{cr}}\right)}\\&=\frac{\sigma_{\mathrm{tp}}}{\left(h-x_{\mathrm{n}}\right)}\left[\frac{bx_{\mathrm{n}}^3}{3}+\frac{b\left(h-x_{\mathrm{n}}\right)^3}{3}+\alpha_{\mathrm{E}}A_{\mathrm{s}}\left(h_0-x_{\mathrm{n}}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{5-17}$$

式中，x_{n}为截面开裂前的受压区高度，按式（5-10）确定。

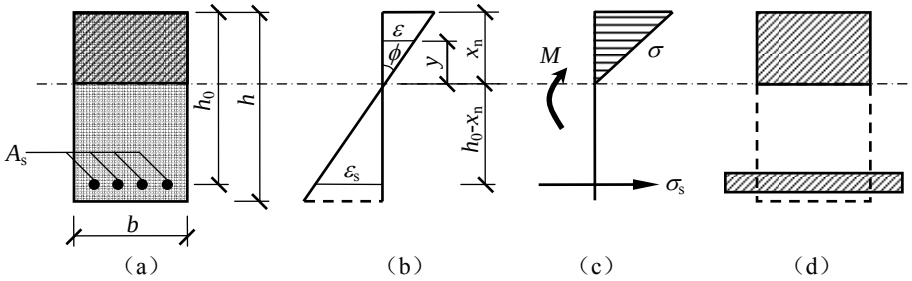


图5.7 混凝土开裂后截面的应变、应力及换算面积

（a）截面；（b）应变；（c）应力；（d）换算面积

3. 第Ⅱ阶段（受拉区混凝土开裂后）

（1）基本方程

受拉区混凝土拉应力超过其抗拉强度时截面开裂，受拉区混凝土不再受力。应变、应力和换算截面如图5.7。截面同样需满足三个基本条件，其中平衡条件为：

$$\sum X=0,\qquad \int_0^{x_n}\sigma b dy-\sigma_s A_s=0 \tag{5-18}$$

$$\sum M=0,\qquad M=\int_0^{x_n}y\sigma b dy+\sigma_s A_s\left(h_0-x_n\right) \tag{5-19}$$

变形条件和物理条件与第Ⅰ阶段一样，即式（5-3）～（5-6）均适用。

（2）中和轴位置

求中和轴位置的方法与开裂前的方法相仿，即，将变形条件代入物理条件后，再代入平衡条件，即可得

$$\frac{1}{2}bx_n^2-\alpha_E A_s\left(h_0-x_n\right)=0$$

即

$$\frac{x_n}{h_0}=\sqrt{\left(\alpha_E\rho\right)^2+2\alpha_E\rho}-\alpha_E\rho \tag{5-20}$$

上式表明：按弹性分析，在开裂后的第Ⅱ阶段中，中和轴的位置也不变。它仅与$\alpha_E\rho$值有关，而与弯矩M的大小无关。但应注意，比较式（5-20）与式（5-10a）的数值后可知，第Ⅱ阶段的受压区高度比第Ⅰ阶段的小得多。换言之，混凝土受拉区开裂后，中和轴突然上升，即移向受压区，使受压区高度x_n缩小。这是一个重要的物理现象，不仅从理论上可以证明，在试验中也能观察到。

（3）换算截面

第Ⅱ阶段换算截面如图5.7d，换算截面的换算面积A_0和换算惯性矩I_0分别为

$$A_0=bx_n+\alpha_E A_s \tag{5-21}$$

$$I_0=\frac{bx_n^3}{3}+\alpha_E A_s\left(h_0-x_n\right)^2 \tag{5-22}$$

式中，x_n为截面开裂后的受压区高度，按式（5-20）确定。

（4）抗弯刚度、弯矩与曲率以及弯矩与应力的关系

不难证明，第Ⅰ阶段的抗弯刚度、弯矩与曲率以及弯矩与应力的关系，在第Ⅱ阶段均适用，仅需将公式中的I_0值改为开裂后的I_0即可。

4. 第Ⅱ阶段末（纵筋屈服）

在第Ⅱ阶段中，纵筋受到的拉应力σ_s随弯矩M增加而增大，第Ⅱ阶段末，纵筋应力达到其屈服强度f_y。此时的弯矩M_y可由式（5-16）确定，但式中的I_0值为开裂后的I_0，M_y的表达式如下：

$$\sigma_s=\alpha_E\frac{M\left(h_0-x_n\right)}{I_0}=\alpha_E\frac{M_y\left(h_0-x_n\right)}{I_0}=f_y$$

$$M_y=\frac{I_0}{\alpha_E\left(h_0-x_n\right)}f_y=\frac{f_y}{\alpha_E\left(h_0-x_n\right)}\left[\frac{bx_n^3}{3}+\alpha_E A_s\left(h_0-x_n\right)^2\right] \tag{5-23}$$

式中，x_n为截面开裂后的受压区高度，按式（5-20）确定。

5.2.2 受弯截面的弹塑性分析

受弯截面按弹塑性分析时，平衡条件和变形条件与按弹性分析时相同，物理条件不同。如第2章所述，反映材料弹塑性性能的应力-应变关系的计算模式有许多种。为计算简便，下

面混凝土采用一种简化的应力-应变关系、钢筋采用双直线模型来分别反映混凝土和钢筋的非线性或弹塑性性能，如图5.8，对受弯截面进行弹塑性分析。

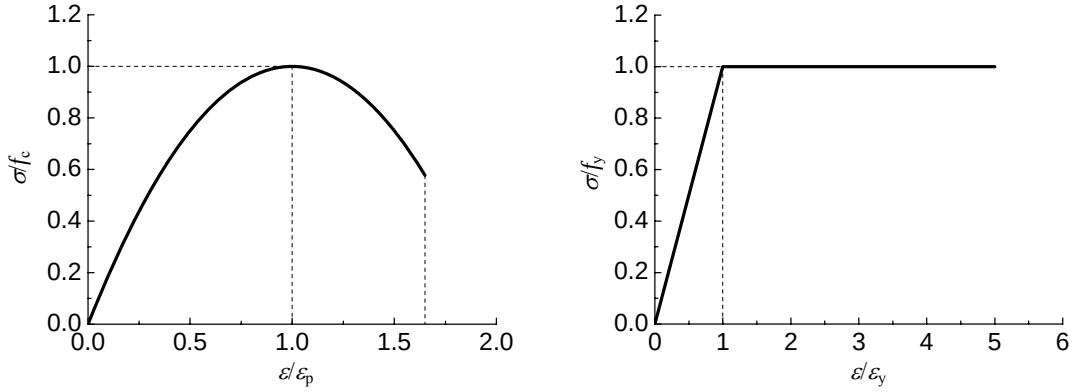
1. 第Ⅰ阶段（混凝土开裂前，如图5.9）

（1）基本方程

① 平衡条件

$$\sum X = 0, \qquad \int_0^{x_n} \sigma b dy - \int_0^{h-x_n} \sigma b dy - \sigma_s A_s = 0 \qquad \text{同（5-1）}$$

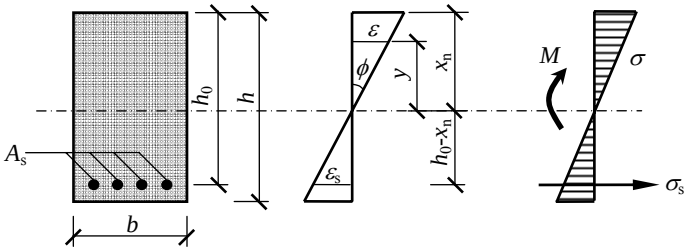
$$\sum M = 0, \quad M = \int_0^{x_n} y\sigma b dy + \int_0^{h-x_n} y\sigma b dy + \sigma_s A_s \left(h_0 - x_n\right) \qquad \text{同（5-2）}$$



（a） （b）

图5.8 弹塑性分析时混凝土和钢筋的应力-应变关系

（a）混凝土受压；（b）钢筋受拉



（a） （b） （c）

图5.9 混凝土开裂前截面的应变、应力

（a）截面；（b）应变；（c）应力

② 变形条件

$$\varepsilon = \phi y \qquad \text{同（5-3）}$$

$$\varepsilon_s = \phi\left(h_0 - x_n\right) \qquad \text{同（5-4）}$$

③ 物理条件

混凝土受压和受拉的应力-应变关系曲线均采用抛物线方程，曲线的上升段和下降段均采用同一个方程。混凝土受压

$$\sigma = f_c\left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_p} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)^2\right] \qquad \text{（5-24）}$$

混凝土受拉

$$\sigma = f_{\mathrm{t}}\left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_{\mathrm{tp}}}-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\right)^2\right] \tag{5-25}$$

钢筋受拉 $$\sigma_{\mathrm{s}} = E_{\mathrm{s}}\varepsilon_{\mathrm{s}} \qquad (\varepsilon_{\mathrm{s}} \le \varepsilon_{\mathrm{y}}) \tag{5-26}$$

图5.9表示第Ⅰ阶段的应力和应变图。由于第Ⅰ阶段的弯矩较小，截面的应力和应变都很小（$\varepsilon \leqslant \varepsilon_{\mathrm{p}}$，$\varepsilon_{\mathrm{t}} \leqslant \varepsilon_{\mathrm{tp}}$，$\varepsilon_{\mathrm{s}} \leqslant \varepsilon_{\mathrm{y}}$），混凝土的受压区、受拉区和钢筋的应力均处于图5.8中应力-应变曲线的上升段。

（2）中和轴位置

求中和轴位置的方法与按弹性分析时相仿，即先将变形条件代入物理条件，得混凝土的压应力为：

$$\sigma = f_{\mathrm{c}}\left[\frac{2\phi y}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}-\left(\frac{\phi y}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}\right)^2\right] \tag{5-27}$$

混凝土的拉应力为：

$$\sigma = f_{\mathrm{t}}\left[\frac{2\phi y}{\varepsilon_{\mathrm{tp}}}-\left(\frac{\phi y}{\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\right)^2\right] \tag{5-28}$$

钢筋的拉应力为：

$$\sigma_{\mathrm{s}} = E_{\mathrm{s}}\phi\left(h_0 - x_{\mathrm{n}}\right) \tag{5-29}$$

再代入第一个平衡方程式（5-1），可得

$$\int_0^{x_{\mathrm{n}}} f_{\mathrm{c}}\left[\frac{2\phi y}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}-\left(\frac{\phi y}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}\right)^2\right]bdy - \int_0^{h-x_{\mathrm{n}}} f_{\mathrm{t}}\left[\frac{2\phi y}{\varepsilon_{\mathrm{tp}}}-\left(\frac{\phi y}{\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\right)^2\right]bdy - E_{\mathrm{s}}\phi\left(h_0 - x_{\mathrm{n}}\right)A_{\mathrm{s}} = 0$$

积分后得：

$$\frac{f_{\mathrm{c}}b\phi}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}\left(x_{\mathrm{n}}^2 - \frac{\phi x_{\mathrm{n}}^3}{3\varepsilon_{\mathrm{p}}}\right) - \frac{f_{\mathrm{t}}b\phi}{\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\left[\left(h - x_{\mathrm{n}}\right)^2 - \frac{\phi\left(h - x_{\mathrm{n}}\right)^3}{3\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\right] - E_{\mathrm{s}}\phi\left(h_0 - x_{\mathrm{n}}\right)A_{\mathrm{s}} = 0 \tag{5-30}$$

上式是受压区高度x_{n}的三次代数方程，给出x_{n}的显式表达还有困难。但如已知材料性能E_{s}、f_{c}、f_{t}、ε_{p}、$\varepsilon_{\mathrm{tp}}$，截面的几何尺寸$b$、$h$、$h_0$，钢筋的截面面积$A_{\mathrm{s}}$，曲率$\phi$，可求得$x_{\mathrm{n}}$的具体数值。显然，此时的$x_{\mathrm{n}}$不是一个常数，它与曲率$\phi$（或$M$）的大小有关。

（3）弯矩与曲率的关系

将变形条件代入物理条件，再代入第二个平衡方程式（5-2），可得

$$M = \int_0^{x_{\mathrm{n}}} yf_{\mathrm{c}}\left[\frac{2\phi y}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}-\left(\frac{\phi y}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}\right)^2\right]bdy + \int_0^{h-x_{\mathrm{n}}} yf_{\mathrm{t}}\left[\frac{2\phi y}{\varepsilon_{\mathrm{tp}}}-\left(\frac{\phi y}{\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\right)^2\right]bdy + E_{\mathrm{s}}\phi\left(h_0 - x_{\mathrm{n}}\right)^2 A_{\mathrm{s}}$$

积分后得：

$$M=\frac{f_{\mathrm{c}}b\phi}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}\left(\frac{2}{3}x_{\mathrm{n}}^{3}-\frac{\phi x_{\mathrm{n}}^{4}}{4\varepsilon_{\mathrm{p}}}\right)+\frac{f_{\mathrm{t}}b\phi}{\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\left(\frac{2}{3}\left(h-x_{\mathrm{n}}\right)^{3}-\frac{\phi\left(h-x_{\mathrm{n}}\right)^{4}}{4\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\right)+E_{\mathrm{s}}\phi\left(h_{0}-x_{\mathrm{n}}\right)^{2}A_{\mathrm{s}} \quad (5\text{-}31)$$

上式中的x_{n}由式（5-30）确定。显然，弯矩与曲率并不成线性关系。

（4）抗弯刚度

前述已知，弯矩与曲率之比就是抗弯刚度，所以有：

$$B=\frac{M}{\phi}=\frac{f_{\mathrm{c}}b}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}\left(\frac{2}{3}x_{\mathrm{n}}^{3}-\frac{\phi x_{\mathrm{n}}^{2}}{4\varepsilon_{\mathrm{p}}}\right)+\frac{f_{\mathrm{t}}b}{\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\left[\frac{2}{3}\left(h-x_{\mathrm{n}}\right)^{3}-\frac{\phi(h-x_{\mathrm{n}})^{2}}{4\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\right]+E_{\mathrm{s}}(h_{0}-x_{\mathrm{n}})^{2}A_{\mathrm{s}} \quad (5\text{-}32)$$

上式表明：按弹塑性分析时，混凝土开裂之前，抗弯刚度不是常数。

（5）钢筋和混凝土的应力

钢筋和混凝土的应力可按式（5-27）至（5-29）计算。

2. 第Ⅰ阶段末（混凝土即将开裂）

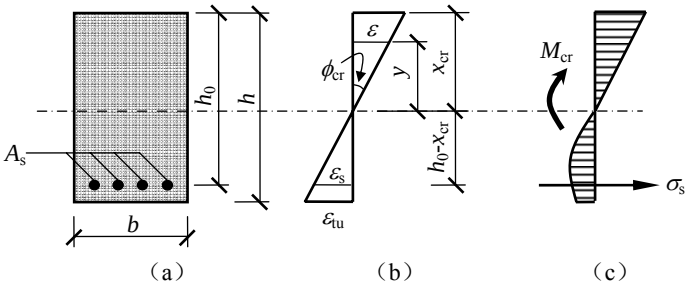


图5.10 混凝土即将开裂时截面的应变、应力
（a）截面；（b）应变；（c）应力

第Ⅰ阶段末，受拉区边缘的混凝土拉应变达到其极限拉应变$\varepsilon_{\mathrm{tu}}$。截面上的应力和应变如图5.10所示。根据此图，将第Ⅰ阶段的各公式进行如下修改。

第Ⅰ阶段末曲率为：

$$\phi=\phi_{\mathrm{cr}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{tu}}}{h-x_{\mathrm{cr}}} \quad (5\text{-}33)$$

求中和轴位置的式（5-30）应改为

$$\frac{f_{\mathrm{c}}b}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}\frac{\varepsilon_{\mathrm{tu}}}{h-x_{\mathrm{cr}}}\left(x_{\mathrm{cr}}^{2}-\frac{\varepsilon_{\mathrm{tu}}}{h-x_{\mathrm{cr}}}\frac{x_{\mathrm{cr}}^{3}}{3\varepsilon_{\mathrm{p}}}\right)-\frac{f_{\mathrm{t}}b}{\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\frac{\varepsilon_{\mathrm{tu}}}{h-x_{\mathrm{cr}}}\left[\left(h-x_{\mathrm{cr}}\right)^{2}-\frac{\varepsilon_{\mathrm{tu}}}{h-x_{\mathrm{cr}}}\frac{\left(h-x_{\mathrm{cr}}\right)^{3}}{3\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\right]-E_{\mathrm{s}}\frac{\varepsilon_{\mathrm{tu}}}{h-x_{\mathrm{cr}}}\left(h_{0}-x_{\mathrm{cr}}\right)A_{\mathrm{s}}=0 \quad (5\text{-}34)$$

第Ⅰ阶段末的弯矩可将式（5-31）改写而得

$$M_{\mathrm{cr}}=\frac{f_{\mathrm{c}}b}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}\frac{\varepsilon_{\mathrm{tu}}}{h-x_{\mathrm{cr}}}\left(\frac{2}{3}x_{\mathrm{cr}}^{3}-\frac{\varepsilon_{\mathrm{tu}}}{h-x_{\mathrm{cr}}}\frac{x_{\mathrm{cr}}^{4}}{4\varepsilon_{\mathrm{p}}}\right)$$
$$+\frac{f_{\mathrm{t}}b}{\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\frac{\varepsilon_{\mathrm{tu}}}{h-x_{\mathrm{cr}}}\left(\frac{2}{3}\left(h-x_{\mathrm{cr}}\right)^{3}-\frac{\varepsilon_{\mathrm{tu}}}{h-x_{\mathrm{cr}}}\frac{\left(h-x_{\mathrm{cr}}\right)^{4}}{4\varepsilon_{\mathrm{tp}}}\right)+E_{\mathrm{s}}\frac{\varepsilon_{\mathrm{tu}}}{h-x_{\mathrm{cr}}}\left(h_{0}-x_{\mathrm{cr}}\right)^{2}A_{\mathrm{s}} \tag{5-35}$$

第Ⅰ阶段末的抗弯刚度为

$$B_{\mathrm{cr}}=\frac{M_{\mathrm{cr}}}{\phi_{\mathrm{cr}}} \tag{5-36}$$

3. 第Ⅱ阶段（混凝土开裂后，如图5.11）

（1）基本方程

① 平衡条件

$$\sum X=0,\qquad \int_{0}^{x_{\mathrm{n}}}\sigma b dy-\sigma_{\mathrm{s}}A_{\mathrm{s}}=0 \tag{5-37}$$

$$\sum M=0,\qquad M=\int_{0}^{x_{\mathrm{n}}}y\sigma b dy+\sigma_{\mathrm{s}}A_{\mathrm{s}}\left(h_{0}-x_{\mathrm{n}}\right) \tag{5-38}$$

② 变形条件

$$\varepsilon=\phi\cdot y \qquad \text{同（5-3）}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{s}}=\phi\left(h_{0}-x_{\mathrm{n}}\right) \qquad \text{同（5-4）}$$

③ 物理条件

混凝土受压 $$\sigma=f_{\mathrm{c}}\left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}\right)^{2}\right] \qquad \text{同（5-24）}$$

钢筋受拉 $$\sigma_{\mathrm{s}}=E_{\mathrm{s}}\varepsilon_{\mathrm{s}}\qquad（\varepsilon_{\mathrm{s}}\le\varepsilon_{\mathrm{y}}） \qquad \text{同（5-26）}$$

以上各式是将第Ⅰ阶段（混凝土开裂前）的相应公式删去受拉混凝土部分而得，求中和轴位置、弯矩与曲率的关系也可以采用同样方法处理。

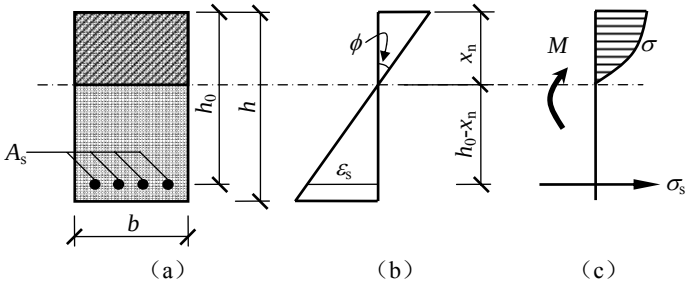


图5.11 混凝土开裂后截面的应变、应力
（a）截面；（b）应变；（c）应力

（2）中和轴位置

$$\frac{f_{\mathrm{c}}b\phi}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}\left(x_{\mathrm{n}}^{2}-\frac{\phi x_{\mathrm{n}}^{3}}{3\varepsilon_{\mathrm{p}}}\right)-E_{\mathrm{s}}\phi\left(h_{0}-x_{\mathrm{n}}\right)A_{\mathrm{s}}=0 \tag{5-39}$$

（3）弯矩曲率关系

$$M=\frac{f_c b\phi}{\varepsilon_p}\left(\frac{2}{3}x_n^3-\frac{\phi x_n^4}{4\varepsilon_p}\right)+E_s\phi\left(h_0-x_n\right)^2 A_s \tag{5-40}$$

4. 第Ⅱ阶段末（纵筋屈服，图5.12）

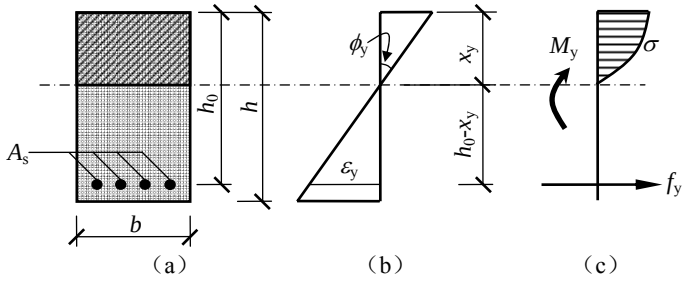


图5.12 钢筋屈服时截面的应变、应力
（a）截面；（b）应变；（c）应力

第Ⅱ阶段末，纵筋拉应力到达其屈服强度f_y，拉应变为ε_y，这时的曲率为：

$$\phi=\phi_y=\frac{\varepsilon_y}{h_0-x_y} \tag{5-41}$$

求中和轴位置的式（5-39）应改为：

$$\frac{f_c b}{\varepsilon_p}\frac{\varepsilon_y}{h_0-x_y}\left(x_y^2-\frac{\varepsilon_y}{h_0-x_y}\frac{x_y^3}{3\varepsilon_p}\right)-f_y A_s=0 \tag{5-42}$$

纵筋屈服时，截面的弯矩为：

$$M_y=\frac{f_c b}{\varepsilon_p}\frac{\varepsilon_y}{h_0-x_y}\left(\frac{2}{3}x_y^3-\frac{\varepsilon_y}{h_0-x_y}\frac{x_y^4}{4\varepsilon_p}\right)+f_y A_s\left(h_0-x_y\right) \tag{5-43}$$

纵筋屈服时的抗弯刚度为：

$$B_y=\frac{M_y}{\phi_y} \tag{5-44}$$

5. 第Ⅲ阶段（纵筋屈服后，图5.13）

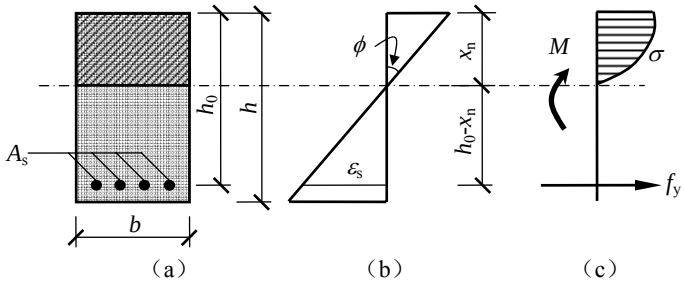


图5.13 钢筋屈服后截面的应变、应力
（a）截面；（b）应变；（c）应力

（1）基本方程

① 平衡条件

$$\sum X = 0, \qquad \int_0^{x_n} \sigma b dy - \sigma_s A_s = 0 \qquad \text{同（5-37）}$$

$$\sum M = 0, \qquad M = \int_0^{x_n} y\sigma b dy + \sigma_s A_s \left(h_0 - x_n\right) \qquad \text{同（5-38）}$$

② 变形条件

$$\varepsilon = \phi y \qquad \text{同（5-3）}$$

③ 物理条件

混凝土受压

$$\sigma = f_c \left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_p} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \right)^2 \right] \qquad (5\text{-}45)$$

钢筋受拉

$$\sigma_s = f_y \qquad (5\text{-}46)$$

以上各式，与第Ⅱ阶段（混凝土开裂后）的相应公式比较，主要区别是：（a）钢筋的应力为定值，等于它的屈服强度f_y。而它的应变ε可以继续增加，不是定值。但这并不是说，不再符合平截面假定，而是说，钢筋的应变可以等于任意值，即处于图5.8b中流幅段中的某一点，而仍符合平截面假定；（b）混凝土的压应力有可能进入图5.8a所示曲线的下降段。

（2）中和轴位置

由下式可确定中和轴位置：

$$\frac{f_c b\phi}{\varepsilon_p} \left(x_n^2 - \frac{\phi x_n^3}{3\varepsilon_p} \right) - f_y A_s = 0 \qquad (5\text{-}47)$$

（3）弯矩与曲率的关系

$$M = \frac{f_c b\phi}{\varepsilon_p} \left(\frac{2}{3} x_n^3 - \frac{\phi x_n^4}{4\varepsilon_p} \right) + f_y A_s \left(h_0 - x_n\right) \qquad (5\text{-}48)$$

6. 第III阶段末（受压区混凝土压坏）

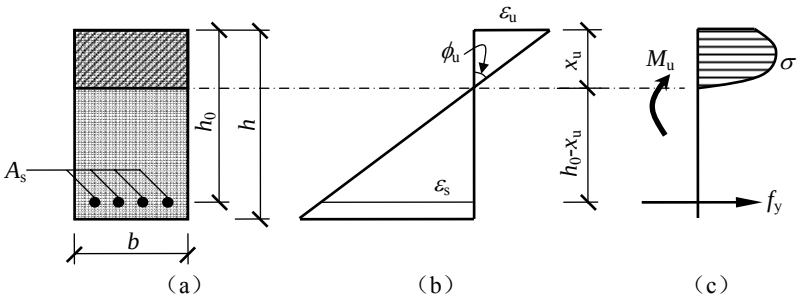


图 5.14 混凝土压碎时截面的应变、应力
（a）截面；（b）应变；（c）应力

第III阶段末，受压区边缘混凝土达到其极限压应变ε_u而被压坏，整个截面不再能承担更大的弯矩（图5.14）。这时截面的曲率为：

$$\phi = \phi_u = \frac{\varepsilon_u}{x_u} \qquad (5\text{-}49)$$

中和轴位置按下式确定：

$$\frac{f_c b}{\varepsilon_p}\varepsilon_u x_u\left(1-\frac{\varepsilon_u}{3\varepsilon_p}\right)-f_y A_s=0 \tag{5-50}$$

解出x_u后，可得

$$\frac{x_u}{h_0}=\frac{1}{\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_p}\left(1-\frac{\varepsilon_u}{3\varepsilon_p}\right)}\frac{f_y}{f_c}\frac{A_s}{bh_0} \tag{5-50a}$$

破坏时截面承受的弯矩为：

$$M_u=\frac{f_c b}{\varepsilon_p}\varepsilon_u x_u^2\left(\frac{2}{3}-\frac{\varepsilon_u}{4\varepsilon_p}\right)+f_y A_s\left(h_0-x_u\right) \tag{5-51}$$

式中，x_u为破坏时截面受压区高度。将式（5-50a）代入式（5-51），整理后可得

$$M_u=f_y A_s\left[1-\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{\varepsilon_u}{4\varepsilon_p}\right)}{\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_p}\left(1-\frac{\varepsilon_u}{3\varepsilon_p}\right)^2}\frac{f_y}{f_c}\frac{A_s}{bh_0}\right]h_0 \tag{5-51a}$$

如取ε_p=0.002及ε_u=0.0033，则可得

$$\frac{x_u}{h_0}=1.347\frac{f_y}{f_c}\rho \tag{5-50b}$$

$$M_u=f_y A_s\left[1-0.586\frac{f_y}{f_c}\rho\right]h_0 \tag{5-51b}$$

破坏时的抗弯刚度为：

$$B_u=\frac{M_u}{\phi_u} \tag{5-52}$$

【例 5-1】已知：一钢筋混凝土受弯构件截面尺寸为 200×500 mm（h_0=465 mm）。配置 3 根直径为 20mm 的受力纵向钢筋（A_s=942 mm），其布置如图 5.15 所示。混凝土和钢筋的弹性模量分别为 E_c=22000 N/mm^2 和 E_s=200000 N/mm^2。混凝土的抗拉强度 f_t=2.2 N/mm^2；钢筋的屈服强度 f_y=364 N/mm^2。

（1）假设混凝土和钢筋两种材料均为弹性材料，求第Ⅰ和第Ⅱ阶段的 M–ϕ、M–σ_s 和 M–B 关系。

（2）若混凝土受压时的应力–应变关系采用式（5-24），其中 f_c=22 N/mm^2，ε_p=0.002， ε_u=0.0033；混凝土受拉的应力–应变关系采用式（5-25），其中 f_t=2.2 N/mm^2，ε_{tp}=0.00015，ε_{tu}=0.0002；钢筋受拉时的应力–应变关系按图 5.8b。分别求截面即将开裂、纵筋屈服和混凝土压坏（即整个截面破坏时）的弯矩、曲率、刚度和截面上的应力分布，以及截面的 M–ϕ、M–σ_s 和 M–B 关系。

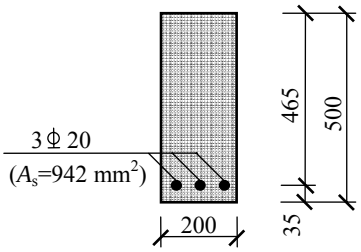


图5.15 例5-1梁断面

（3）试求曲率ϕ=4×10^{-6} 1/mm 时的中和轴位置、弯矩和刚度。

〖解〗（1）假设混凝土和钢筋两种材料均为弹性材料，即按弹性分析。

第Ⅰ阶段

配筋率：

$$\rho=\frac{A_s}{bh_0}=\frac{942}{200\times465}=0.01013=1.013\%$$

弹性模量比：

$$\alpha_E=\frac{E_s}{E_c}=\frac{200000}{22000}=9.09$$

所以 $$\alpha_E\rho=0.0921$$

由式（5-10a）得

$$\frac{x_n}{h_0}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{h}{h_0})^2+\alpha_E\rho}{\frac{h}{h_0}+\alpha_E\rho}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{500}{465})^2+0.0921}{\frac{500}{465}+0.0921}=0.574$$

受压区高度 $x_n=0.574h_0=267\text{mm}$。

由式（5-12）计算换算截面的惯性矩

$$\begin{aligned}I_0&=\frac{bx_n^3}{3}+\frac{b(h-x_n)^3}{3}+\alpha_E A_s(h_0-x_n)^2\\&=\frac{200\times267^3}{3}+\frac{200\times(500-267)^3}{3}+9.09\times942\times(465-267)^2\\&=2447930000\text{mm}^4\end{aligned}$$

刚度为 $$B=E_cI_0=22000\times2447930000=53.9\times10^{12}\quad\text{N·mm}^2$$

$$M=E_cI_0\phi=53.9\times10^{12}\phi$$

钢筋应力按式（5-16）

$$\sigma_s=\alpha_E\frac{M(h_0-x)}{I_0}=9.09\times\frac{M(465-267)}{2447930000}=7.35\times10^{-7}M$$

第Ⅰ阶段末裂缝即将出现时的弯矩 M_{cr} 按式（5-17）计算，得

$$M_{cr}=\sigma_{tp}\frac{I_0}{h-x}=2.2\times\frac{2447930000}{500-267}=23.1\times10^6\quad\text{N·mm}$$

第Ⅱ阶段

由式（5-20）

$$\frac{x_n}{h_0}=\sqrt{(\alpha_E\rho)^2+2\alpha_E\rho}-\alpha_E\rho$$
$$=\sqrt{0.0921^2+2\times0.0921}-0.0921$$
$$=0.347$$

受压区高度 $x_n=0.347h_0=0.347\times465=161.3\,\text{mm}$

惯性矩由式（5-24）

$$I_0=\frac{bx_n^3}{3}+\alpha_E A_s(h_0-x_n)^2$$
$$=\frac{200\times161.3^3}{3}+9.09\times942\times(465-161.3)^2=1069550000\ \text{mm}^4$$

刚度

$$B=E_cI_0=22000\times1069550000=23.5\times10^{12}\ \text{N·mm}^2$$

$$M=E_cI_0\phi=23.5\times10^{12}\phi$$

钢筋应力按式（5-16）

$$\sigma_s=\alpha_E\frac{M(h_0-x_n)}{I_0}=9.09\times\frac{M(465-161.3)}{106950000}=2.58\times10^{-6}M$$

第Ⅱ阶段末钢筋屈服时的弯矩 M_y 按式（5-23）

$$M_y=\sigma_y\frac{I_0}{\alpha_E(h_0-x_n)}=364\times\frac{1069550000}{9.09\times(465-161.3)}=141.0\times10^6\quad\text{N·mm}$$

（2）若混凝土和钢筋两种材料均为弹塑性材料，按弹塑性分析。

第Ⅰ阶段末（混凝土即将开裂）

将已知数据代入式（5-34）得到一个 x_{cr} 的三次方程式，求解后得即将开裂时的受压区高度：

$$x_{cr}=254.7\ \text{mm}$$

代入式（5-33）得即将开裂时的曲率为：

$$\phi_{cr}=8.15\times10^{-7}\ \ 1/\text{mm}$$

代入式（5-35）得即将开裂时截面承受的弯矩为：

$$M_{cr}=3.755\times10^7\ \text{N·mm}$$

代入式（5-36）得即将开裂时截面的抗弯刚度为

$$B_{cr}=4.607\times10^{13}\ \text{N·mm}^2$$

截面上的应力分布见图 5.16 的 I_a， 具体计算略。

第Ⅱ阶段末（纵筋屈服）

将已知数据带入式（5-42）得到一个关于 x_y 的三次方程式，求解后得纵筋屈服时的受压区高度为：

$$x_y=174.4\,\text{mm}$$

代入式（5-41），得纵筋屈服时的曲率为：

$$\phi_y = 6.26\times10^{-6}\ \ 1/\text{mm}$$

代入式（5-43），得纵筋屈服时截面承受的弯矩为：

$$M_y=1.384\times10^{8}\ \text{N·mm}$$

代入式（5-44），得纵筋屈服时截面的抗弯刚度为：

$$B_y=2.21\times10^{13}\ \text{N·mm}^2$$

第III阶段末（混凝土压坏，即截面破坏）

由式（5-50a）可得截面破坏时的受压区高度为：

$$x_u = 105.0\,\text{mm}$$

代入式（5-49），得截面破坏时的曲率为

$$\phi_u = 3.619\times10^{-7}\ \ 1/\text{mm}$$

代入式（5-51），得破坏时截面承受弯矩为：

$$M_u=1.438\times10^{8}\ \text{N·mm}$$

代入式（5-52），得破坏时截面的抗弯刚度为

$$B_u=3.97\times10^{12}\ \text{N·mm}^2$$

（3）求曲率ϕ= 4×10^{-6} 1/mm 时，中和轴位置、弯矩和刚度。

已知截面曲率ϕ= 4×10^{-6} 1/mm，大于第Ⅰ阶段末，而小于第Ⅱ阶段末的曲率值，可以断定此时截面应处于第Ⅱ阶段。

将已知数据分别代入式（5-39）和（5-40），可分别求得中和轴位置和对应的弯矩。

$$x_n = 169.0\,\text{mm}$$

$$M=9.08\times10^{7}\ \text{N·mm}$$

则刚度可由下式求得：

$$B=\frac{M}{\phi}=\frac{90.8\times10^{6}}{4\times10^{-6}}=2.27\times10^{13}\ \ \text{N·mm}^2$$

以上计算结果示于图 5.16、图 5.17 和图 5.18。

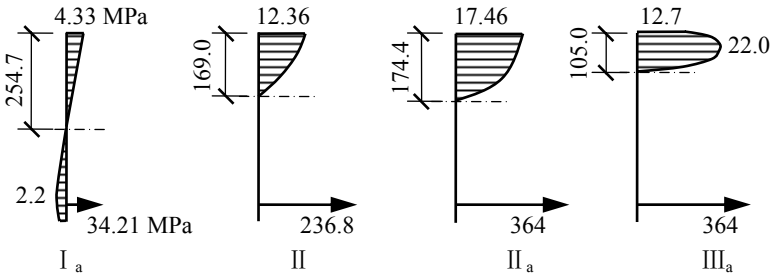


图5.16 不同阶段截面应力分布

从【例 5-1】可以看出，受弯截面的几个特定状态，即第Ⅰ阶段末、第Ⅱ阶段末和第III阶段末，它们各有自己的特征或条件。第Ⅰ阶段末的标志是，混凝土受拉边缘的应变达到混凝土的抗拉极限应变，表示裂缝即将出现；第Ⅱ阶段末的标志是，纵筋的拉应变达到钢筋的屈服应变，表示纵筋刚好屈服；第III阶段末的标志是，混凝土受压边缘的应变达到混凝土的抗压极限应变，表示混凝土压坏。在这些条件下，可先求得中和轴位置、曲率、再求弯矩、

刚度，钢筋和混凝土的应力。要对其他情况，例如第Ⅱ阶段中某一点作分析，则计算方法原则上一样，即根据相应阶段的平衡条件、变形条件和物理条件，将已知数据代入这些基本公式，就可得到所求的未知量。按以上所述的方法，可对受弯截面从开始加荷直到破坏的各阶段作弹塑性全过程分析，计算出的弯矩-曲率关系曲线如图 5.17 所示。

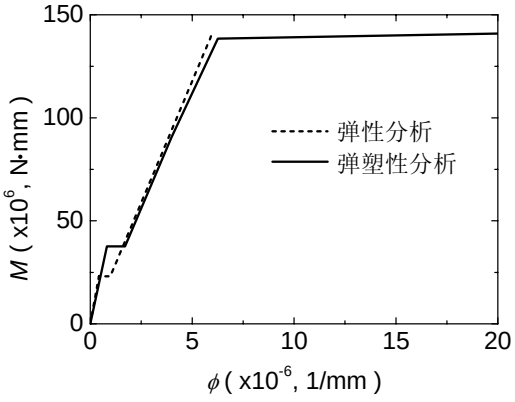


图 5.17 弯矩和曲率关系曲线

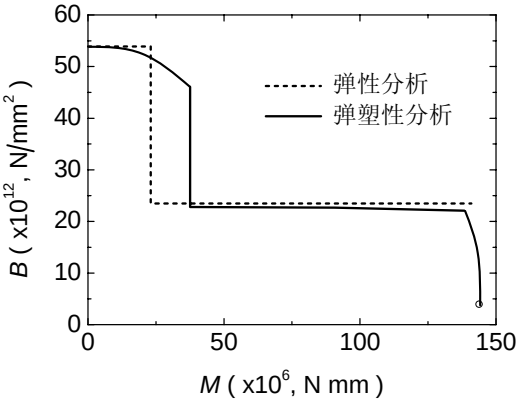


图 5.18 刚度和弯矩关系曲线

由以上计算结果可得出以下结论。

① 即将开裂时，钢筋的拉应力只有 34.3 N/mm^2，远小于它的屈服强度，而开裂弯矩也仅为破坏弯矩的 26.1％ 。这说明，若不容许开裂，钢筋混凝土受弯构件只能承担很小的弯矩，钢筋的强度也不能得到充分利用。

② 在开裂前后，钢筋应力和应变以及截面的刚度都发生突变，即钢筋拉应力和拉应变突增，刚度突减。

③ 第Ⅱ阶段末钢筋屈服时的弯矩和第Ⅲ阶段末构件破坏时的弯矩相比，两者相差很小。后者仅略大于前者（ 3.8％）。

④ 混凝土受压应力图的形状对计算结果影响不大，对第Ⅲ阶段末的破坏弯矩而言，如不用图 5.8a，改用图 2.19 的二次抛物线加斜直线和二次抛物线加平直线，则破坏弯矩分别为 M_u=1.448×10^8 N·mm 和 M_u=1.457×10^8 N·mm。对第Ⅰ、Ⅱ阶段而言，不受其影响，计算结果完全相同，因为这三种本构关系曲线的上升段都是二次抛物线，完全相同。

⑤ 在第Ⅲ阶段，截面弯矩基本不变，而变形（曲率）显著增加。破坏截面如同形成了一个铰，发生很大转动，这种铰称为塑性铰。塑性铰与普通铰的区别在于，塑性铰在转动过程中承担一定的弯矩，而普通铰不能承受弯矩。梁在第Ⅲ阶段挠度迅速增大，裂缝急剧开展，破坏前有明显的预兆。

⑥ 从第Ⅰ、第Ⅱ到第Ⅲ阶段，混凝土受压区高度减小，即中和轴上升。

5.2.3 受弯截面的塑性分析

1. 基本公式

受弯截面的平衡条件和物理条件与轴压或轴拉截面的平衡条件和物理条件相仿，受弯截面也可作塑性分析，或称全塑性分析，其目的是计算第Ⅲ阶段末截面的承载能力，即极限弯矩 M_u 值。计算过程比弹塑性分析大为简单，但不能准确求得破坏时的应变值、曲率值和刚度值。

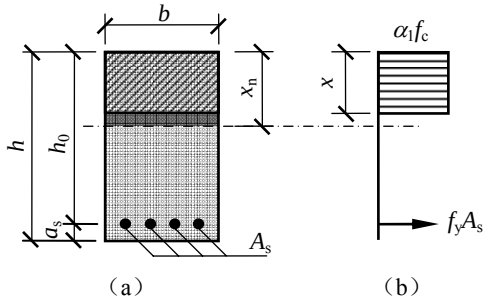


图5.19 全塑性分析的截面和应力分布
（a）截面；（b）应力分布

全塑性指截面破坏时，材料都达到各自

的极限强度。对于混凝土来讲，假设受压区混凝土各处的压应力均相等，应力分布图形可用矩形应力分布图形代替，其应力大小假设为$\alpha_1 f_c$。钢筋的应力则达到钢筋的屈服强度，其应力的大小为 f_y，变形可以自由、无限地增加，因此能满足变形条件（平截面假设）。截面的承载能力可仅根据平衡条件确定。

对受弯截面的全塑性分析（图 5.19），根据平衡条件，写出如下方程：

$$\sum X = 0, \quad \alpha_1 f_c b x = f_y A_s \tag{5-53}$$

$$\sum M = 0, \quad M_u = \alpha_1 f_c b x \frac{x}{2} + f_y A_s (h_0 - x) \tag{5-54}$$

式中，f_c——混凝土的抗压强度；

x——受压区的计算高度，其值与混凝土的实际受压区高度 x_n 不同，见图 5.19；

α_1——矩形应力图的压应力值与理论应力图的峰值应力的比值，取值将在后面说明。

如已知截面尺寸 b、h_0，纵筋面积 A_s，材料强度$\alpha_1 f_c$、f_y，即可由上述两个平衡方程求得截面破坏时所能承担的弯矩 M_u 以及受压区的计算高度 x。

受压区计算高度由式（5-53）求得：

$$x = \frac{f_y A_s}{\alpha_1 f_c b} \tag{5-55}$$

或

$$\frac{x}{h_0} = \frac{f_y}{\alpha_1 f_c} \rho \tag{5-55a}$$

$$M_u = f_y A_s \left(1 - 0.5 \frac{f_y}{\alpha_1 f_c} \rho\right) h_0 \tag{5-56}$$

式中：$\rho = \dfrac{A_s}{b h_0}$ 。

2. 全塑性分析与弹塑性分析的比较

全塑性分析与弹塑性分析第III阶段末的计算模式，实质上是相同的。将式（5-55a）、式（5-56）分别与式（5-50b）、式（5-51b）比较，可看出两者形式很相像。因此，选取不同系数α_1，可以使得按全塑性计算所得的极限弯矩与按弹塑性计算所得的极限弯矩相等。因按弹塑性分析计算受弯构件的极限承载力过程复杂，因此，进行设计计算时，混凝土受压区的应力分布可以采用矩形分布图形来代替其实际分布，计算受弯构件的极限承载力。从建立 M_u 计算公式的角度看，只要能确定混凝土压应力合力的大小及其作用位置即可。

5.3 受弯构件正截面承载力计算原理

5.3.1 正截面承载力计算的基本假定

《混凝土结构设计规范》（GB 50010−2002）规定，包括受弯构件在内的各种混凝土构件的正截面承载力，按下列四个基本假定进行计算：

① 平截面假定：梁截面的平均变形符合平截面假定，即梁弯曲后，截面上各点的应变与该点到中和轴的距离成正比，并假定钢筋与其周围混凝土的应变相同；

② 受拉区混凝土不参加工作，拉力全由钢筋承担；

③ 混凝土受压的应力-压应变关系曲线按式（2-12）～式（2-16）规定取用。

④ 纵向钢筋的应力等于钢筋应变与其弹性模量的乘积，但其绝对值不大于相应的强度设计值，受拉钢筋的极限拉应变取 0.01，即

$$\begin{aligned} \sigma_s &= E_s\varepsilon_s \le f_y \\ \sigma_s' &= E_s'\varepsilon_s' \le f_y' \\ \varepsilon_s &\le 0.01 \end{aligned} \qquad (5\text{-}57)$$

5.3.2 等效应力分布图

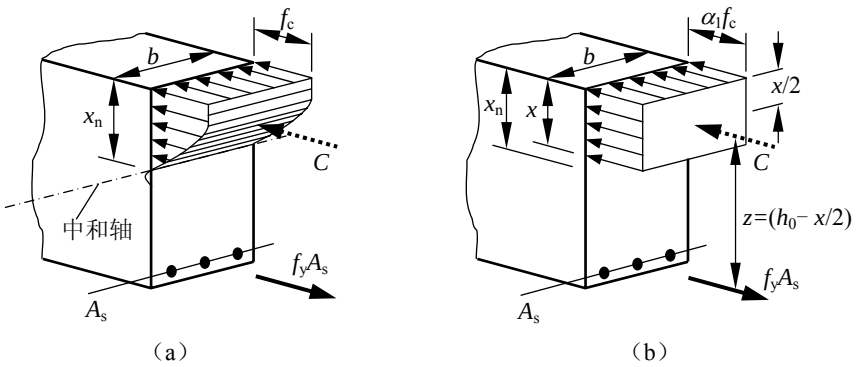


图 5.20 混凝土梁正截面承载力计算的基本假定及简化

（a）基本假定的应力分布；（b）等效的矩形应力图

有了上述基本假定，就可以确定截面的应变分布和受压区混凝土的应力分布，并可根据轴力的平衡关系（$\Sigma N=0$），确定截面中和轴位置，根据力矩平衡关系（$\Sigma M=0$），求得截面的极限弯矩 M_u。直接采用上述假设的混凝土应力-应变关系曲线，计算复杂。而从建立 M_u 计算公式的角度看，只要能确定混凝土压应力合力 C 的大小及其作用位置即可。为了简化计算，我国《混凝土结构设计规范》（GB 50010-2002）采用等效矩形应力图代替上述曲线的混凝土应力分布图形，如图 5.20 所示。当截面达到抗弯承载力时，混凝土压应力合力 C 的大小及其作用位置 y_c 仅与混凝土应力-应变曲线形状及受压区高度 x_n 有关，见图 5.21c。等效应力图形，只要能满足：① 面积与理论应力图形面积相等，即混凝土总压力 C 的大小不变；② 等效应力图形面积的形心与理论应力图形面积的形心重合，即 C 的作用位置不变这两个条件，就不会影响 M_u 的计算结果。

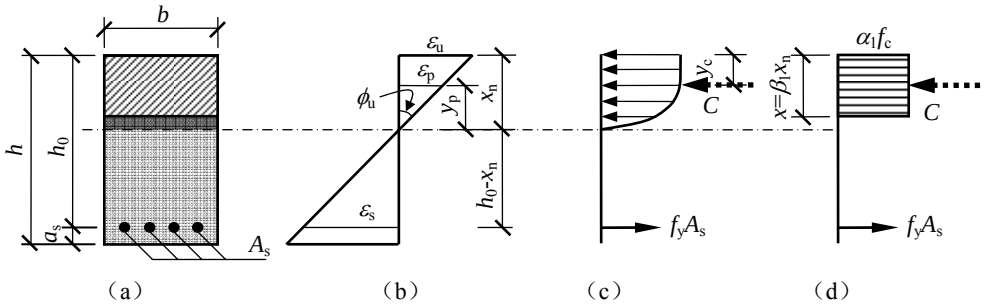


图5.21 截面应变、应力分布及等效应力分布

（a）截面；（b）应变；（c）应力分布；（d）等效应力分布

这个等效矩形应力图可由两个无量纲特征值α_1和β_1确定（图 5.21d）。α_1为矩形应力图的压应力值与理论应力图的峰值应力的比值；β_1为矩形应力图的计算高度 x 与中和轴高度 x_n 的比值。对于理论应力分布图形，受压区边缘（混凝土的应变等于ε_u）到中和轴的距离为 x_n。现以强度等级低于或等于 C50 的混凝土为例，分析如何确定这两个无量纲特征值α_1 和β_1。当混凝土强度等级低于或等于 C50，式（2-12）的 n=2，混凝土压应力的合力 C 为

$$\begin{aligned} C &= f_c \cdot b \cdot \left(x_n - y_p\right) + \frac{2}{3} \cdot f_c \cdot b \cdot y_p = f_c \cdot b \cdot x_n \left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_p}{x_n}\right) \\ &= f_c \cdot b \cdot x_n \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{3\varepsilon_u}\right) \end{aligned} \tag{5-58}$$

这里用到 $y_p/x_n=\varepsilon_p/\varepsilon_u$。合力 C 到受压区边缘的距离为

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{\frac{1}{2} f_c \cdot b \cdot \left(x_n - y_p\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot f_c \cdot b \cdot y_p \left[\left(x_n - y_p\right) + \frac{3}{8} y_p\right]}{f_c \cdot b \cdot \left(x_n - y_p\right) + \frac{2}{3} \cdot f_c \cdot b \cdot y_p} \\ &= \frac{x_n \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_u}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_u}\right)^2\right]}{1 - \frac{\varepsilon_p}{3\varepsilon_u}} \end{aligned} \tag{5-59}$$

对等效矩形应力图

$$C = \alpha_1 f_c \cdot b \cdot x, \quad y_c = \frac{x}{2}$$

由于两个图形的 y_c 相等，得

$$\beta_1 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_u}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_u}\right)^2}{1 - \frac{\varepsilon_p}{3\varepsilon_u}} \tag{5-60}$$

由于两个图形的 C 相等，得

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta_1}\left(1 - \frac{\varepsilon_p}{3\varepsilon_u}\right) \tag{5-61}$$

以ε_p=0.002 及ε_u=0.0033 代入上面两式，得α_1=0.969，β_1=0.824。可以证明，α_1和β_1 仅与混凝土应力-应变曲线有关。为简化计算，《混凝土结构设计规范》（GB 50010-2002）规定，强度等级低于或等于 C50 的混凝土，取α_1=1.0，β_1=0.8；强度等级等于 C80 的混凝土，取α_1=0.94，β_1=0.74；强度等级高于 C50 而低于 C80 混凝土的系数α_1和β_1分别在 1～0.94 之间和 0.8～0.74 之间，按线性内插法确定，见表 5-1。

表 5-1 混凝土受压区等效矩形应力图系数

	≤C50	C55	C60	C65	C70	C75	C80
α_1	1.0	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94

β_1	0.8	0.79	0.78	0.77	0.76	0.75	0.74

5.3.3 适筋截面与超筋截面的界限及界限配筋率

如前所述，截面达到抗弯极限状态时，受拉纵筋屈服与受压区边缘混凝土破坏的先后顺序是判断截面是否超筋的标准。因此，当受拉纵筋达到屈服和受压区边缘混凝土破坏同时发生时，即为适筋截面与超筋截面的界限破坏。此时，纵向钢筋的应变为其屈服应变（f_y/E_s），混凝土受压区边缘的应变为混凝土的极限压应变ε_u，如图 5.22。

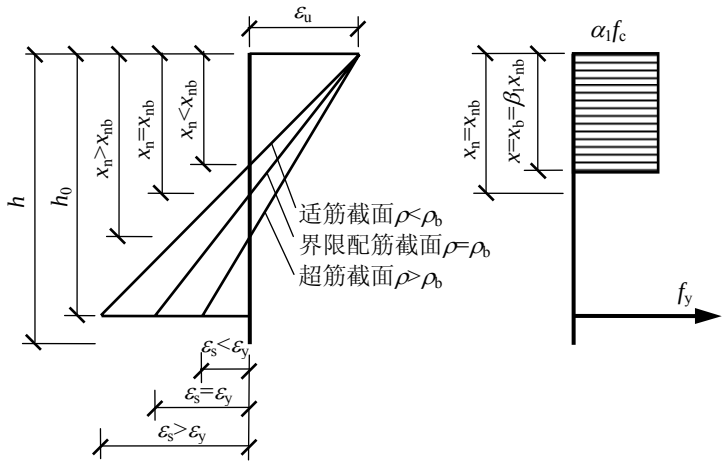


图5.22 适筋截面与超筋截面的界限

设界限破坏时受压区高度为 x_{nb}，则有

$$\frac{x_{nb}}{h_0}=\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u+\varepsilon_y} \tag{5-62}$$

将 $x_b=\beta_1 x_{nb}$ 代入式（5-62），得

$$\frac{x_b}{\beta_1 h_0}=\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u+\varepsilon_y} \tag{5-63}$$

x_b 为界限受压区计算高度。设 $\xi_b=\dfrac{x_b}{h_0}$，称为界限受压区相对计算高度，则

$$\xi_b=\frac{x_b}{h_0}=\frac{\beta_1}{1+\dfrac{f_y}{E_s\varepsilon_u}} \tag{5-64}$$

对于无屈服点的钢筋，根据条件屈服点的定义，钢筋达到屈服点时的应变为$\varepsilon_y=f_y/E_s+0.002$。相应的界限受压区相对计算高度应改为

$$\xi_b=\frac{\beta_1}{1+\dfrac{0.002}{\varepsilon_u}+\dfrac{f_y}{E_s\varepsilon_u}} \tag{5-65}$$

从式（5-64）可以看出，界限受压区相对计算高度与纵向钢筋的屈服强度、

弹性模量和混凝土的极限压应变有关。不同强度等级的混凝土和不同强度的钢筋，这些参量不同。表 5-2 给出了不同强度等级的混凝土和不同强度的钢筋所对应的界限受压区相对计算高度ξ_b的取值。

表 5-2 界限受压区相对计算高度ξ_b取值

	≤C50	C55	C60	C65	C70	C75	C80
HPB235	0.614	0.606	0.594	0.584	0.575	0.565	0.555
HRB335	0.550	0.541	0.531	0.522	0.512	0.503	0.493
HRB400	0.518	0.508	0.499	0.490	0.481	0.472	0.463

截面受压区高度与截面配筋率之间存在对应关系，因此，截面的界限受压区相对计算高度ξ_b也与截面的最大配筋率ρ_{max}之间存在对应关系。由截面力的平衡条件式（5-53），可得

$$\alpha_1 f_c b \xi_b h_0 = f_y A_{smax}$$

因此

$$\rho_{max} = \frac{A_{smax}}{bh_0} = \xi_b \frac{\alpha_1 f_c}{f_y} \qquad (5\text{-}66)$$

当截面受压区相对计算高度小于界限受压区相对计算高度（$\xi<\xi_b$），或配筋率小于截面的最大配筋率（$\rho<\rho_{max}$）时，受拉纵向钢筋先达到屈服，然后混凝土受压破坏，为适筋梁；当截面受压区相对计算高度大于界限受压区相对计算高度（$\xi>\xi_b$）或配筋率大于截面的最大配筋率（$\rho>\rho_{max}$）时，混凝土受压破坏时，受拉纵向钢筋未达到屈服，为超筋梁。

5.3.4 受弯截面的最小配筋率

与超筋截面相反，如果受弯截面的配筋率过小，则当弯矩达到某一数值，截面受拉区开裂后，纵筋拉应力突增，以至于达到屈服强度使截面从第Ⅰ阶段直接进入第Ⅲ阶段。少筋截面开裂时，即第Ⅰ阶段末，所能承受的弯矩比不配筋的素混凝土受弯截面高不了多少。少筋截面破坏时，即第Ⅲ阶段末，所能承受的弯矩，往往比开裂时的弯矩要小。

少筋破坏的特点是一裂就坏，从理论上讲，纵向受拉钢筋的最小配筋率ρ_{min}可以由钢筋混凝土受弯构件正截面承载力与其开裂载荷相等为条件来确定。但是，考虑到混凝土抗拉强度的离散性，以及混凝土收缩等因素的影响，所以在实际应用时，最小配筋率ρ_{min}，往往是根据传统经验得出的。《混凝土结构设计规范》（GB 50010-2002）规定的最小配筋率值见附录 3 附表 3-3。为防止梁“一裂就坏”，梁的配筋率应大于$\rho_{min}\dfrac{h}{h_0}$。

5.3.5 单筋矩形截面受弯构件正截面承载力计算

只在截面受拉区配置纵向受力钢筋的矩形截面，称为单筋矩形截面。单筋矩形截面除了在受拉区配置纵向受力钢筋外，还配有架立钢筋和箍筋。纵向受力钢筋、架立钢筋和箍筋绑扎在一起形成钢筋骨架。受压区的架立钢筋虽然受压，但数量很少，对正截面抗弯承载力的贡献很小，只起构造上的架立作用，所以计算

时不考虑它的抗弯作用。

钢筋混凝土受弯构件正截面承载力计算是以其受弯第Ⅲ阶段末为基础。此时，受压区混凝土破坏，其应力分布简化为矩形分布，应力为$\alpha_1 f_c$；受拉钢筋也已屈服，其应力为f_y。

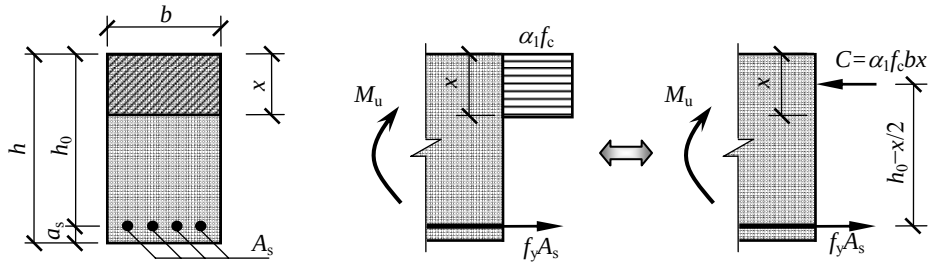


图5.23 单筋矩形正截面抗弯承载力计算简图

1. 计算公式

单筋矩形截面受弯构件的正截面抗弯承载力计算简图如图 5.23 所示，截面受压区的压力由混凝土承担，受拉区的拉力由纵向钢筋承担。

由力的平衡条件，得

$$\alpha_1 f_c bx = f_y A_s \tag{5-67}$$

由力矩平衡条件，得

$$M_u = \alpha_1 f_c bx\left(h_0 - \frac{x}{2}\right) \tag{5-68}$$

或

$$M_u = f_y A_s\left(h_0 - \frac{x}{2}\right) \tag{5-69}$$

式中，b——矩形截面宽度；

A_s——受拉区纵向受力钢筋的截面面积；

x——混凝土受压区计算高度；

h_0——截面的有效高度，按式$h_0 = h - a_s$计算，h为截面高度，a_s为受拉钢筋合力作用点到受拉区边缘的距离，如图 5.24。图 5.24 中的 c 为混凝土保护层厚度，应满足《混凝土耐久性设计规范》（GB/T 50476-2008）的规定。例如，在一般环境中，若取c=25mm，计算时，单排钢筋梁 a_s一般取 35 mm；双排钢筋梁 a_s一般取 60 mm。

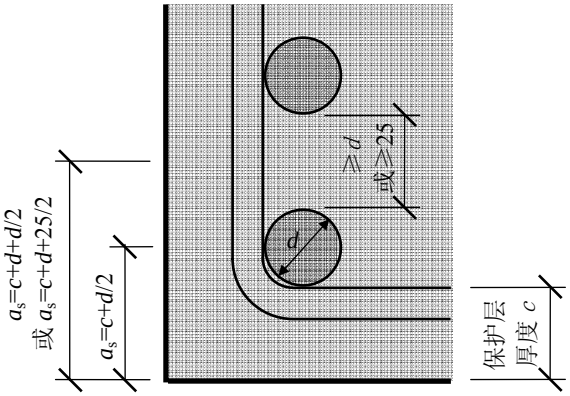


图 5.24 钢筋合力点到受拉区边缘距离

2. 计算公式的适用条件

（1） $\rho \le \rho_{\max} = \xi_b \dfrac{\alpha_1 f_c}{f_y}$ 或 $x \le \xi_b h_0$。这个限制是为了防止构件超筋破坏。单筋矩形截面的最大抗弯承载力为

$$M_{u,\max} = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi_b \left(1 - 0.5\xi_b\right)$$

当设计弯矩大于 $M_{u,\max}$ 时，需加大构件截面或采用双筋截面。

（2） $A_s \ge \rho_{\min} bh$。这个限制是为了防止构件少筋破坏。

式中，$\rho_{\min}$ 为最小配筋率；b，h 分别为截面的宽度和高度。注意，此处用的是 h 而不是 h_0。

式（5-67）和式（5-68）或式（5-69）是根据适筋构件的破坏模型推导出的静力平衡方程式，只适用于纵向受拉钢筋首先屈服后混凝土受压破坏的适筋构件计算，而不适用于少筋构件和超筋构件计算。同时，少筋构件和超筋构件的破坏都属于脆性破坏，应避免将钢筋混凝土受弯构件设计成产生这两类破坏形式的构件。

3. 单筋矩形截面极限弯矩与配筋率的关系

对于单筋矩形适筋截面，由平衡条件，并令 $m = \dfrac{f_y}{\alpha_1 f_c}$、$\rho = \dfrac{A_s}{bh_0}$，可得

$$\xi = \frac{x}{h_0} = \frac{f_y A_s}{\alpha_1 f_c b h_0} = m \cdot \rho \tag{5-70}$$

$$\frac{M_u}{\alpha_1 f_c b h_0^2} = \xi\left(1 - 0.5\xi\right) = m \cdot \rho \cdot \left(1 - 0.5 m \cdot \rho\right) \tag{5-71}$$

破坏时截面的曲率：

$$\phi_u = \frac{\varepsilon_u}{x_n} = \frac{\beta_1 \varepsilon_u}{x} = \frac{\beta_1 \varepsilon_u}{\xi h_0} = \frac{\beta_1 \varepsilon_u}{m \cdot \rho \cdot h_0} \tag{5-72}$$

对于单筋矩形超筋截面，截面破坏时，受拉钢筋未屈服，其应力 $\sigma_s < f_y$，由平衡条件，可得

$$\alpha_1 f_c b \xi h_0 = \sigma_s A_s \tag{5-73}$$

$$M_u = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi \left(1 - 0.5\xi\right) \tag{5-74}$$

根据平截面假定，截面在抗弯极限状态时

$$\frac{\xi}{\beta_1} = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_s} \tag{5-75}$$

则
$$\varepsilon_{\mathrm{s}}=\left(\frac{\beta_1}{\xi}-1\right)\varepsilon_{\mathrm{u}} \tag{5-76}$$

将式（5-76）代入式（5-73）整理后，得

$$\xi^2+D\rho\xi-D\rho\beta_1=0 \tag{5-77}$$

式中
$$D=\frac{E_{\mathrm{s}}\varepsilon_{\mathrm{u}}}{\alpha_1 f_{\mathrm{c}}} \tag{5-78}$$

解方程式（5-77），并取有效解，得

$$\xi=\frac{\sqrt{D^2\rho^2+4D\rho\beta_1}-D\rho}{2} \tag{5-79}$$

将式（5-79）代入式（5-74），即可得弯矩与配筋率的关系

$$\begin{aligned}\frac{M_{\mathrm{u}}}{\alpha_1 f_{\mathrm{c}} b h_0^2}&=\xi\left(1-0.5\xi\right)\\&=\frac{\sqrt{D^2\rho^2+4D\rho\beta_1}-D\rho}{2}\left(1-\frac{\sqrt{D^2\rho^2+4D\rho\beta_1}-D\rho}{4}\right)\end{aligned} \tag{5-80}$$

将式（5-79）代入式（5-76），整理后得钢筋应力与配筋率的关系

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\mathrm{s}}}{f_{\mathrm{y}}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{s}}}{\varepsilon_{\mathrm{y}}}&=\left(\frac{\beta_1}{\xi}-1\right)\frac{\varepsilon_{\mathrm{u}}}{\varepsilon_{\mathrm{y}}}\\&=\left(\frac{2\beta_1}{\sqrt{D^2\rho^2+4D\rho\beta_1}-D\rho}-1\right)\frac{\varepsilon_{\mathrm{u}}}{\varepsilon_{\mathrm{y}}}\end{aligned} \tag{5-81}$$

式中ε_{y}为钢筋的屈服应变。

破坏时截面的曲率：

$$\phi_{\mathrm{u}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{u}}}{x_{\mathrm{n}}}=\frac{\beta_1\varepsilon_{\mathrm{u}}}{\xi h_0}=\frac{2\beta_1\varepsilon_{\mathrm{u}}}{\left(\sqrt{D^2\rho^2+4D\rho\beta_1}-D\rho\right)h_0} \tag{5-82}$$

为了便于分析，采用相对延性来比较不同配筋率对构件延性的影响，相对于界限配筋率构件的相对延性为

$$\frac{\phi_{\mathrm{u}}}{\phi_{\mathrm{ub}}}=\frac{\dfrac{\beta_1\varepsilon_{\mathrm{u}}}{\xi h_0}}{\dfrac{\beta_1\varepsilon_{\mathrm{u}}}{\xi_{\mathrm{b}} h_0}}=\frac{\xi_{\mathrm{b}}}{\xi} \tag{5-83}$$

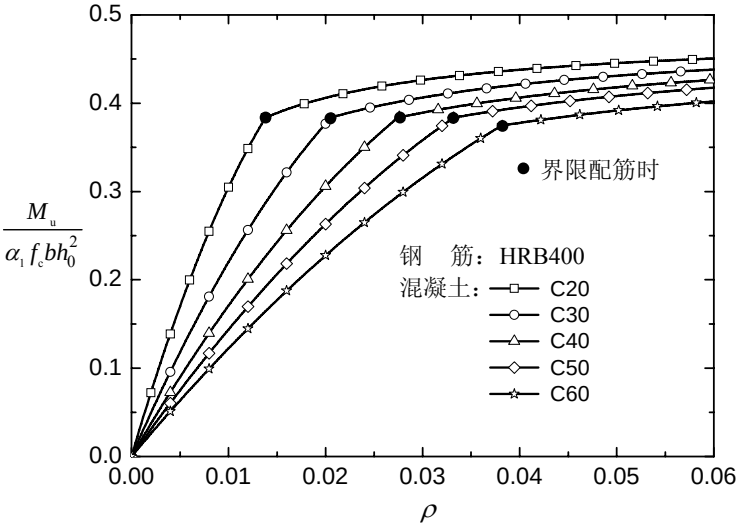


图 5.25 单筋矩形截面极限弯矩与配筋率的关系

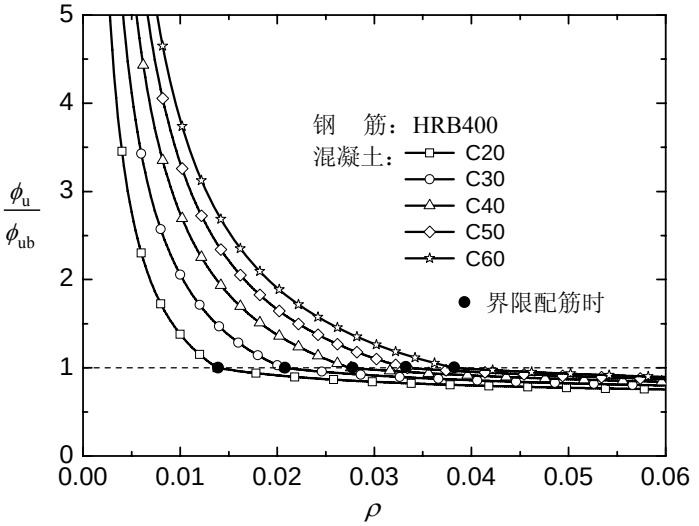


图 5.26 单筋矩形截面相对延性与配筋率的关系

在适筋情况下，相对延性为

$$\frac{\phi_u}{\phi_{ub}} = \frac{\xi_b}{m \cdot \rho} \tag{5-84}$$

在超筋情况下，相对延性为

$$\frac{\phi_u}{\phi_{ub}} = \frac{2\xi_b}{\sqrt{D^2\rho^2 + 4D\rho\beta_1} - D\rho} \tag{5-85}$$

对于确定的构件截面和钢筋级别，D 和 β_1 为常数。将截面的极限弯矩、相对延性和受拉纵筋的应力与配筋率的关系分别绘于图 5.25、图 5.26 和图 5.27。从图中可以看出，随着配筋率增加，截面的极限弯矩迅速增加，而截面的相对延性随着配筋率增大而迅速降低。但当配筋率超过界限配筋率后，极限弯矩随配筋率增长的速度明显减小。比较极限弯矩与配筋率关系曲线，界限配筋率两边，曲线的斜率明显不同。配筋率大于界限配筋率后，极限弯矩与配筋率的关系曲线几乎

接近水平。例如，对于采用 C30 混凝土、配置 HRB400 钢筋的梁，在超筋情况下，配筋率从 3%增加到 6%，即钢筋用量增加一倍，而梁的极限弯矩增量仅约为 7.2%（图 5.25）。因此，配筋率超过界限配筋率时，采用再增加配筋的方法提高梁的抗弯承载力是不经济的；同时，再增加配筋也使梁的延性进一步降低（图 5.26）。配筋率小于界限配筋率时，梁破坏前，受拉钢筋已屈服，其应力达到钢筋的屈服强度。当配筋率超过界限配筋率后，梁破坏时，钢筋的应力将达不到屈服强度，且钢筋应力随配筋率增大而减小。例如，上述的钢筋混凝土梁的界限配筋率约为 2%。因此，配筋率小于 2%时，梁承载力极限状态的钢筋应力为其屈服强度 f_y。配筋率为 3%和 6%时，梁承载力极限状态的钢筋应力分别为 $0.75f_y$ 和 $0.43f_y$，如图 5.27。所以，超筋梁中的钢筋不能充分发挥作用，这是因为，在承载力极限状态时，钢筋应力低于屈服强度，而梁中配筋越多，钢筋应力越低。

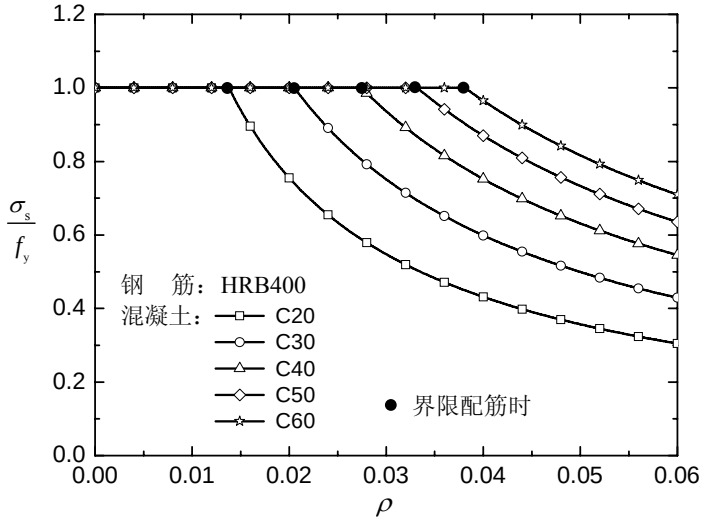


图 5.27 单筋矩形截面承载力极限状态时钢筋应力与配筋率的关系

5.3.6 双筋矩形截面受弯构件正截面承载力计算

如果在受压区配置数量较多的纵向受压钢筋，不仅起架立钢筋的作用，而且对正截面抗弯承载力也有较大作用。在正截面受弯承载力计算时，受拉区钢筋和受压区钢筋对截面抗弯承载力的作用同时都要考虑，这种配筋的截面称为双筋截面。尽管受压区配置纵向钢筋对截面延性、抗裂性、变形等有利，但通常双筋截面构件的用钢量比单筋截面构件多，采用纵向受压钢筋协助混凝土承受压力不经济。因此，为了节约钢材，尽可能不要将截面设计成双筋截面。

双筋截面只在下面几种情况使用：

（1）弯矩很大，超过了单筋截面所能承担的最大弯矩，而截面尺寸又受到限制，混凝土强度等级也不能提高，按单筋截面设计必然成为超筋截面。

（2）结构或构件承受某种交变作用（如地震），截面上的弯矩正负交替变化。

（3）结构或构件截面的受压区已预先布置了一定数量的受力钢筋。

钢筋混凝土受弯构件双筋正截面承载力计算与单筋截面相同，也是以其受弯的第Ⅲ阶段末为基础。此时，受压区混凝土破坏，其应力简化为矩形分布，应力为 $\alpha_1 f_c$；而受拉钢筋和受压钢筋均已屈服，应力分别为 f_y 和 f'_y。

1. 计算公式

双筋矩形截面受弯构件的正截面抗弯承载力计算简图如图 5.28 所示，截面受压区的压力由混凝土和受压纵向钢筋共同承担，受拉区的拉力由受拉纵向钢筋承担。

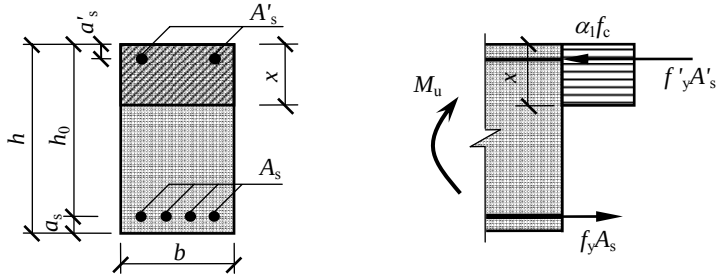


图5.28 双筋矩形正截面抗弯承载力计算简图

由力的平衡条件，得

$$\alpha_1 f_c bx + f_y^{'} A_s^{'} = f_y A_s \tag{5-86}$$

由力矩平衡条件，得

$$M_u = \alpha_1 f_c bx\left(h_0 - \frac{x}{2}\right) + f_y^{'} A_s^{'}\left(h_0 - a_s^{'}\right) \tag{5-87}$$

式中，A'_s——受压钢筋的截面面积；

f'_y——钢筋的抗压强度；

a'_s ——受压区纵向受力钢筋合力作用点到受压区混凝土外边缘之间的距离。对于梁，当受压钢筋按一排布置时，可取a'_s=35mm；当受压钢筋按两排布置时，可取a'_s=60mm；对于板，可取a'_s=20mm。

其他符号同单筋矩形截面。

在式（5-86）和（5-87）中，是假设受压区纵向钢筋屈服，因此，应保证在抗弯极限状态时受压区纵向钢筋的应变大于其屈服应变。由截面的几何条件得：

$$\varepsilon_s^{'} = \frac{x_n - a_s^{'}}{x_n}\varepsilon_u = \left(1 - \frac{\beta_1 a_s^{'}}{x}\right)\varepsilon_u \geq \varepsilon_y^{'}$$

则需要

$$x \geq \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u - \varepsilon_y^{'}}\beta_1 a_s^{'} \tag{5-88}$$

将不同混凝土强度等级和钢筋级别的具体数值代入上式，可得表5-3。

表5-3 受压区钢筋屈服的最小受压区计算高度

	≤C50	C60	C70	C80
HPB235	1.15 a'_s	1.13 a'_s	1.12 a'_s	1.11 a'_s
HRB335	1.47 a'_s	1.47 a'_s	1.47 a'_s	1.48 a'_s
HRB400	1.76 a'_s	1.78 a'_s	1.81 a'_s	1.85 a'_s

双筋截面混凝土受压区计算高度只要大于上表所列值，即可保证受压区纵向钢筋屈服，为方便起见统一取 $x \geq 2a'_s$。

2．计算公式的适用条件

（1）$x \le \xi_b h_0$。这个限制条件是为了保证受压区混凝土破坏前，受拉区纵向钢筋屈服。双筋矩形截面的最大抗弯承载力为

$$\begin{aligned} M_{u,max} &= \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi_b \left(1-0.5\xi_b\right) + f_y^{'} A_s^{'} \left(h_0 - a_s^{'}\right) \\ &= \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi_b \left(1-0.5\xi_b\right) + f_y^{'} \rho^{'} b h_0^2 \left(1-\frac{a_s^{'}}{h_0}\right) \end{aligned} \tag{5-89}$$

其最大抗弯承载力与截面尺寸和受压纵筋配筋率有关。截面尺寸越大或受压纵筋配筋率越高，双筋梁的最大抗弯承载力越大。

（2）$x \ge 2a_s^{'}$。这个限制条件是为了保证受压区纵向钢筋在构件破坏前达到屈服。

（3）$A_s \ge \rho_{min} bh$。这个限制是为了防止构件少筋破坏，在双筋截面中一般均能满足。

当 $2\frac{a_s^{'}}{h_0} < \xi < \xi_b$ 时，受拉区纵向钢筋和受压区纵向钢筋均屈服，双筋截面的抗弯承载力与配筋率的关系为

$$\frac{M_u}{\alpha_1 f_c b h_0^2} = m^{'} \cdot \rho^{'} \left(1-\frac{a_s^{'}}{h_0}\right) + \left(m \cdot \rho - m^{'} \cdot \rho^{'}\right)\left(1-\frac{m \cdot \rho - m^{'} \cdot \rho^{'}}{2}\right) \tag{5-90}$$

式中，$m = \frac{f_y}{\alpha_1 f_c}$；$\rho = \frac{A_s}{bh_0}$；$m^{'} = \frac{f_y^{'}}{\alpha_1 f_c}$；$\rho^{'} = \frac{A_s^{'}}{bh_0}$。

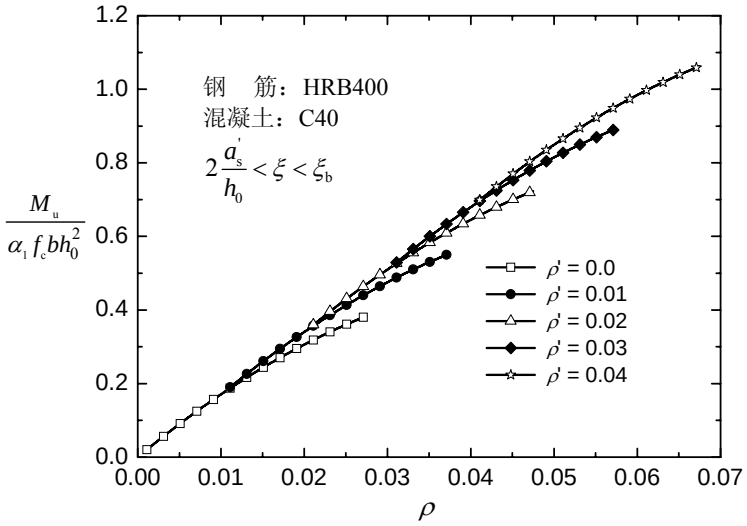


图 5.29 双筋矩形截面适筋范围内弯矩与配筋率的关系

图 5.29 的曲线表示受压区不同配筋率情况下，双筋矩形截面适筋范围内弯矩与配筋率的关系。由图可知，在适筋范围内，抗弯承载力随配筋率增大而提高。所谓适筋范围，指承载力极限状态时，受拉区钢筋和受压区钢筋均屈服（即要求 $2a'_s/h_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_b$）。另外，随着受压区配筋率增加，若受拉区钢筋配置过少，受压区钢筋

将不能屈服，因此，要求受拉区钢筋的最小配筋率也增加，同时，受拉区钢筋的界限配筋率也增加。亦即随着受压区配筋率增加，受拉区钢筋的适筋范围向配筋率增大方向平移。当然，随着受压区配筋率增加，适筋范围内可承担的最大弯矩也增加。从图上还可看出，采用增加受压区钢筋提高构件抗弯承载力的效率，比增加受拉区钢筋提高构件抗弯承载力的效率低得多。

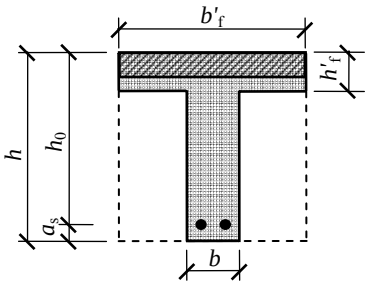


图5.30 T形截面梁及其几何尺寸

5.3.7 T 形截面受弯构件正截面承载力计算

矩形截面受弯构件破坏时，受拉区混凝土早已开裂而退出工作，实际上，受拉区混凝土的作用并没有充分发挥。若把受拉纵向钢筋集中布置在中部，将受拉区混凝土挖去一部分，就形成了 T 形截面，如图 5.30。这样形成的 T 形截面承

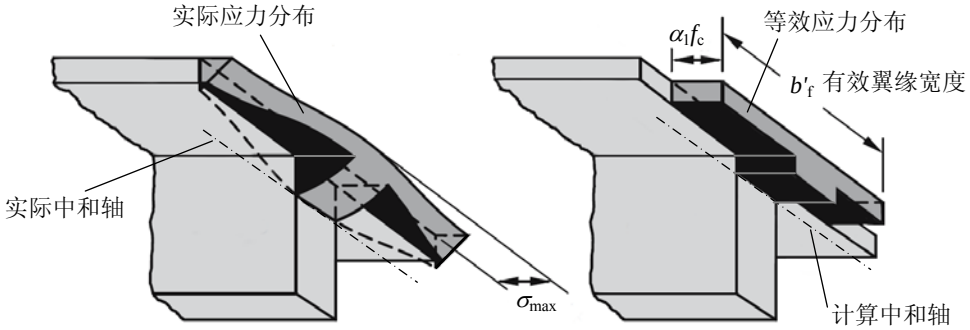


图5.31 T形截面的应力分布及其等效

载力的计算值与原矩形截面的承载力计算值完全相同，却可以节约混凝土用量，减轻结构的自重，降低造价。

T 形截面梁在工程中的应用非常广泛，凡是受压区带有翼缘的构件均可按 T 形截面计算。从发挥受压区混凝土的效能看，似乎应尽量计及翼缘的宽度。但实验和理论研究表明，T 形截面梁受力时，受压翼缘压应力分布是不均匀的，如图 5.31 所示。压应力由梁肋中部向两边逐渐减小，即翼缘距肋部越远，其参与共同受力的程度越低。也就是说，翼缘的有效宽度是有限的。为了简化计算，《混凝土结构设计规范》（GB 50010-2002）采用在翼缘计算宽度（即有效宽度）b'_f 内，将受压翼缘的混凝土应力简化为矩形分布，而在计算宽度范围以外，不考虑翼缘混凝土的作用。翼缘的计算宽度与构件的截面形状、构件的跨度和布置间距有关，见表 5-4。

表 5-4 T 形、工字形及倒 L 形截面受弯构件翼缘计算宽度 b'_f

项次	考虑情况		T 形、工字形截面		倒 L 形截面
			肋形梁、肋形板	独立梁	肋形梁、肋形板
1	按计算跨度 l_0 考虑		$l_0/3$	$l_0/3$	$l_0/6$
2	按梁（纵肋）净距 s_n 考虑		$b+s_n$	--	$b+s_n/2$
3	按翼缘高度 h'_f 考虑	当 $h'_f/h_0 \geqslant 0.1$	--	$b+12h'_f$	--
		当 $0.1 > h'_f/h_0 \geqslant 0.05$	$b+12h'_f$	$b+6h'_f$	$b+5h'_f$
		当 $h'_f/h_0 < 0.05$	$b+12h'_f$	b	$b+5h'_f$

注：1. 表中 b 为梁的腹板（梁肋）宽度；

2. 如肋形梁在梁跨内设有间距小于纵肋间距的横肋时，则可不遵守表中项次 3 的规定；

3. 对于加腋的 T 形、工字形和倒 L 形截面，当受压区加腋的高度 $h_h \geqslant h'_f$ 且加腋的宽度 $b_h \leqslant 3h_h$ 时，则翼缘计算宽度可按表中项次 3 的规定分别增加 $2b_h$（T 形、工字形截面）和 b_h（倒 L 形截面）；

4. 独立梁受压区的翼缘板面在荷载作用下经验算沿纵肋方向可能产生裂缝时，其计算宽度应取用腹板宽度 b。

1. 计算公式

T 形截面的计算按中和轴位置不同分为两种情况，即中和轴位于翼缘内及中和轴位于肋部。中和轴位于翼缘内时，混凝土的受压区全部在翼缘内，称为第一类 T 形截面；中和轴位于肋部时，混凝土的受压区由翼缘受压区和肋部受压区两部分组成，称为第二类 T 形截面。两种情况受压区的形状不同，计算公式也不同。T 形截面计算时，应首先确定 T 形截面的类型。

当受压区计算高度正好与翼缘的高度相等时，如图 5.32，受压区混凝土的合力为 $C=\alpha_1 f_c b'_f h'_f$，该合力中心离梁上边缘的距离为 $h'_f/2$。由平衡条件可得：

$$\alpha_1 f_c b_f^{'} h_f^{'} = f_y A_s \tag{5-91}$$

$$M_u = \alpha_1 f_c b_f^{'} h_f^{'} \left(h_0 - 0.5 h_f^{'}\right) = f_y A_s \left(h_0 - 0.5 h_f^{'}\right) \tag{5-92}$$

式中，b'_f——T 形截面受弯构件受压区的翼缘宽度；

h'_f——T形截面受弯构件受压区的翼缘高度。

其他符号同单筋矩形截面。

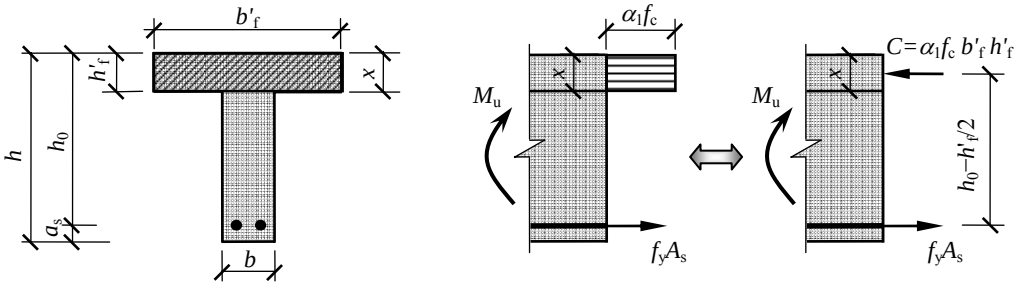


图5.32 受压区计算高度与翼缘的高度相等时的T形截面梁

根据已知的受拉纵向钢筋面积或弯矩就可以判断 T 形截面的类型。显然，若

$$f_y A_s \leq \alpha_1 f_c b_f^{'} h_f^{'} \tag{5-93}$$

或

$$M_u \leq \alpha_1 f_c b_f^{'} h_f^{'} \left(h_0 - 0.5 h_f^{'}\right) \tag{5-94}$$

则 $x \leq h'_f$，即中和轴位于翼缘内，属于第一类 T 形截面。反之，若

$$f_y A_s > \alpha_1 f_c b_f^{'} h_f^{'} \tag{5-95}$$

或

$$M_u > \alpha_1 f_c b_f^{'} h_f^{'} \left(h_0 - 0.5 h_f^{'}\right) \tag{5-96}$$

则 $x>h'_f$，即中和轴位于肋部内，属于第二类 T 形截面。

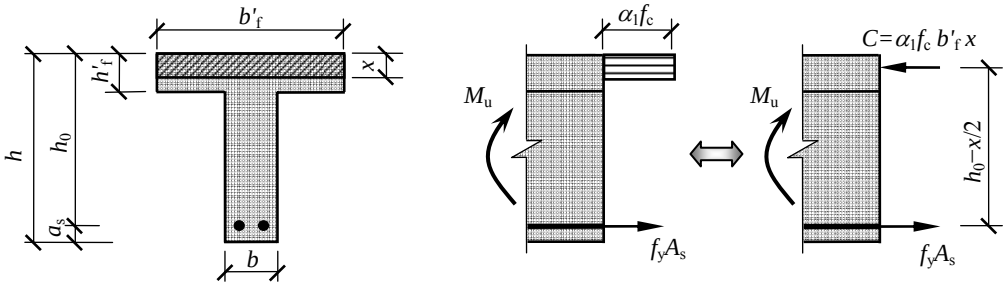


图5.33 第一类型T形截面梁

（1）第一类 T 形截面

第一类 T 形截面中和轴位于翼缘内，由图 5.33 可以看出，这种类型截面与宽度为 b'_f 的单筋矩形截面梁完全相同。因此，计算公式为：

$$\alpha_1 f_c b_f' x = f_y A_s \tag{5-97}$$

$$M_u = \alpha_1 f_c b_f' x\left(h_0 - 0.5x\right) = f_y A_s\left(h_0 - 0.5x\right) \tag{5-98}$$

适用条件：

① $x \le \xi_b h_0$。一般情况下，T 形截面的 h'_f 较小，而中和轴又在翼缘内，即 $x \leqslant h'_f$，故这个条件一般均能满足，可不必进行验算。

② $A_s \geqslant \rho_{min} bh$。因为最小配筋率 ρ_{min} 是根据钢筋混凝土梁开裂后的抗弯承载力与相同截面素混凝土梁抗弯承载力相同的条件得出的，但素混凝土截面受弯构件的破坏弯矩由混凝土抗拉强度控制，因而与受拉区截面尺寸关系很大。而对 T 型截面来讲，其受拉区的宽度即为肋宽 b，T 形截面素混凝土受弯构件的破坏弯矩比宽度为 T 形截面肋板宽度的矩形素混凝土构件（$b\times h$）的破坏弯矩提高不多。因此，为简化计算并考虑以往设计经验，T 形截面的最小配筋率 ρ_{min} 仍采用矩形截面的最小配筋率的数值。但计算最小配筋量时，所用的混凝土截面面积是梁高与肋板宽度的乘积，而不是梁高与翼缘板宽度的乘积。

（2）第二类 T 形截面

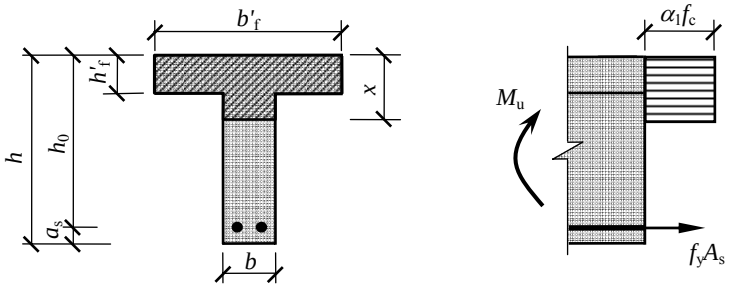


图5.34 第二类型T形截面梁

第二类T形截面的中和轴位于T形截面肋部，即 $x > h'_f$ ，这时，受压区为T形，如图5.34，根据平衡条件，得：

$$\sum X = 0 \qquad \alpha_1 f_c bx + \alpha_1 f_c\left(b_f' - b\right)h_f' = f_y A_s \tag{5-99}$$

$$\sum M = 0 \qquad M_u = \alpha_1 f_c bx\left(h_0 - 0.5x\right) + \alpha_1 f_c\left(b_f' - b\right)h_f'\left(h_0 - 0.5h_f'\right) \tag{5-100}$$

适用条件：

① 为了保证混凝土受压破坏前，钢筋屈服，要求$x \leqslant \xi_b h_0$；

② 同时，为了防止截面少筋破坏，还应满足$A_s \geq \rho_{min} bh$，但该条件一般能满足，计算中可不必验算。

5.4 受弯构件正截面设计

在进行受弯构件正截面设计时，通常会遇到截面选择和截面复核两类问题。截面选择是构件的截面尺寸、混凝土的强度等级、钢筋的级别及构件上作用的荷载或截面的内力等都已知（或某种因素虽然暂时未知，但可根据实际情况和设计经验假定），要求计算受拉区所需的纵向受力钢筋面积，并且根据构造要求，选择钢筋的根数和直径；截面复核是构件的尺寸、混凝土的强度等级、钢筋的级别、数量和配筋方式等都已确定，要求验算截面是否能够承受某一已知的荷载或内力设计值。

从截面抗弯承载力计算公式可知，弯矩设计值 M 确定以后，在满足刚度要求的前提下，可以设计出不同截面尺寸的梁。当然，应避免设计成少筋截面和超筋截面。在适筋范围内，将梁截面设计得大些，配置的纵向受拉钢筋就可以少些；将梁的配筋率设计得大些，梁截面就可以小些。不过，从经济角度考虑，为了保证总造价最低，需根据钢材、水泥、砂石等材料价格及各种施工费用确定出造价与配筋率的关系，从中确定理论配筋率的最经济值。根据我国生产实践经验，当配筋率在最经济配筋率附近波动时，对总造价的影响并不敏感。按照我国工程实践经验，板的经济配筋率大概在 0.3%～0.8%之间；单筋矩形梁的经济配筋率大概在 0.6%～1.5%之间。

5.4.1 构造要求

受弯构件正截面承载力计算通常只考虑荷载对截面抗弯能力的影响。有些因素，如温度、混凝土的收缩、徐变等对截面承载力的影响，在计算时并没有考虑。同时，温度、混凝土的收缩、徐变等对截面承载力影响的计算也非常复杂。在长期工程实践中，人们总结出了一套完整的构造措施，来防止因计算中没有考虑的因素影响而造成结构构件开裂和破坏。因此，进行钢筋混凝土结构构件设计和施工过程中，除了要满足承载力的计算结果外，还必须满足有关构造要求。

1. 梁和板的截面形式和尺寸

（1）截面形式

工程结构中的梁和板都是主要承受弯矩和剪力的构件，它们的主要不同是：梁的截面宽度与高度相当；板的截面高度远小于自身宽度。梁、板常采用矩形、T形、工字形、箱形、槽形等截面形式。

（2）梁、板的截面尺寸

根据构件满足承载能力的要求、正常使用的要求和便于施工的原则，确定截面的尺寸。梁的高度 h 或板的厚度 h 一般由对挠度的要求来控制，因为受弯构件的高度对挠度起控制作用。独立的简支梁截面高度与其跨度的比值可为 1/12 左右，独立的悬臂梁截面高度与其跨度的比值可为 1/6 左右。

现浇梁的梁高度采用 h＝250、300、350、750、800、900、1000mm 等尺寸。梁高 800mm 以下的级差为 50mm，梁高 800mm 以上为 100mm。

矩形截面梁的高宽比一般取 2.0～3.5；T 形截面梁的 h/b 一般取 2.5～4.0（此处 b 为梁肋宽）。矩形截面的宽度或 T 形截面的肋宽 b 一般取 100、120、150、（180）、200、（220）、

250、300 和 350mm 等，括号中的数值仅当使用木模时采用。

板的宽度一般较大，设计时可取单位宽度（b＝1000mm）进行计算。现浇钢筋混凝土板的厚度除应满足各项功能要求外，其厚度尚应大于表 5-5 所规定的最小厚度。

表 5-5 建筑工程现浇钢筋混凝土板的最小厚度

板的类别		厚度（mm）
单 向 板	屋面板	60
	民用建筑楼板	60
	工业建筑楼板	70
	行车道下的楼板	80
双 向 板		80
密 肋 板	肋间距小于或等于 700mm	40
	肋间距大于 700mm	50
悬臂板	板的悬臂长度小于或等于 500mm	60
	板的悬臂长度大于 500mm	80
无梁楼板		150

注：悬臂板的厚度是指悬臂根部的厚度；预制板最小厚度应满足钢筋保护层厚度的要求。

2、材料的选择与一般构造要求

（1）混凝土强度等级

梁、板常用的混凝土强度等级是 C30、C40。

（2）钢筋强度等级及常用直径

梁内纵向受力钢筋 宜采用 HRB400 级、RRB400 级和 HRB335 级，常用直径为 12mm、14mm、16mm、18mm、20mm、22mm 和 25mm 等。梁内受力钢筋不少于 2 根，直径宜尽可能相同。设计中，若采用两种不同直径的钢筋，钢筋直径至少应相差 2mm，以便于施工中能用肉眼识别，但相差也不宜超过 6mm。

对于绑扎的钢筋骨架，其纵向受力钢筋的直径：梁高为 300mm 及以上时，不应小于 10mm；梁高小于 300mm 时，不应小于 8mm。

为了便于浇注混凝土以保证钢筋周围混凝土的密实性以及钢筋和混凝土之间的粘结力，纵筋的净间距及钢筋的最小保护层厚度应满足一定的要求，如图 5.35 所示。图中，h_0 为受拉钢筋合力中心到混凝土受压边缘的距离，称为截面的有效高度；c 为钢筋的外表面到混凝土截面边缘的距离，称为混凝土保护层厚度； d_1 为下部钢筋水平方向的净距；d_2 为上部钢

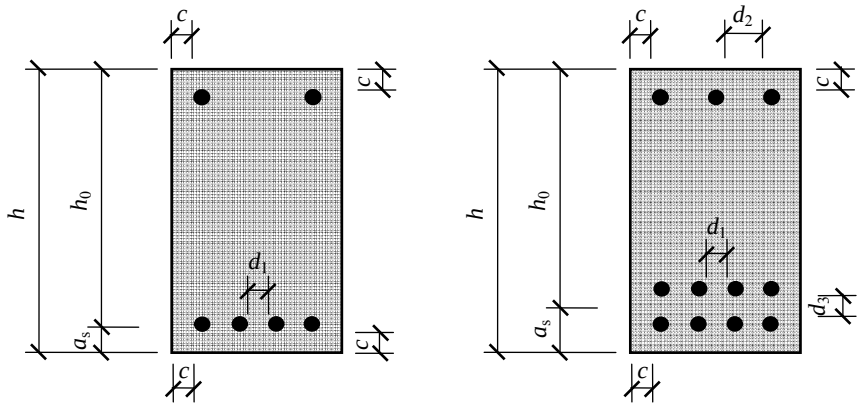


图5.35 配筋截面的钢筋净距、保护层厚度及有效高度

筋水平方向的净距；d_3 为钢筋竖向净距。

混凝土构件中足够的保护层厚度可以保护钢筋避免锈蚀、使钢筋与混凝土有较好的粘结，并使钢筋混凝土结构具有一定的抗火能力。钢筋混凝土构件的最小混凝土保护层厚度要求与结构所处的环境类别、作用等级、设计使用年限、混凝土的强度等级和水胶比有关，应满足《混凝土结构耐久性设计规范》（GB/T 50476-2008）的规定。例如在一般环境中，设计使用年限为 50 年，梁的最小混凝土保护层厚度是 25mm，板的最小混凝土保护层厚度是 20mm。钢筋混凝土构件所处的环境越恶劣、混凝土的强度等级越低，要求的最小保护层厚度越大。此外，纵向受力钢筋的混凝土保护层最小厚度尚不应小于钢筋的公称直径。

下部钢筋水平方向的净距 d_1 不应小于钢筋直径且不小于 25mm；上部钢筋水平方向的净距 d_2 不应小于 1.5 倍钢筋直径且不应小于 30mm。钢筋竖向净距 d_3 与 d_1 相同，不应小于钢筋直径且不小于 25mm。为保证混凝土的浇捣质量，当梁的配筋量较大、纵向受力钢筋须要放置成两层或多于两层时，上、下层钢筋应对齐，不能错列。且从第三层起，钢筋的中距应比下面两层的中距增大一倍。

架立钢筋 梁内架立钢筋主要用来固定箍筋，从而与纵筋、箍筋形成钢筋骨架，并且架立钢筋还能抵抗温度和混凝土收缩变形引起的应力。

梁内架立钢筋的直径主要与梁的跨度有关，当梁的跨度小于 4000mm 时，不宜小于 8mm。当梁的跨度为 4000mm～6000mm 时，不宜小于 10mm。当梁的跨度大于 6000mm 时，不宜小于 12mm。

梁内箍筋 梁内箍筋宜采用 HPB235 级、HRB335 和 HRB400 级钢筋，常用直径是 6mm、8mm 和 10mm。

板的受拉钢筋 板的受拉钢筋常用 HPB235 级、HRB335 级和 HRB400 级钢筋，常用直径是 6mm、8mm、10mm 和 12mm，其中现浇板的板面钢筋直径不宜小于 8mm。为了保证板内钢筋能正常地分担内力，板内钢筋间距不宜过大；但为了便于混凝土浇注，保证钢筋周围混凝土的密实性，板内钢筋间距亦不宜过小。钢筋的间距一般为（70～200）mm；板厚 h ≤150mm，不宜大于 200mm；板厚 h＞150mm，不宜大于 1.5h，且不应大于 250mm。

板的分布钢筋 即使板按单向板设计，除沿受力方向布置受拉钢筋外，也应在受拉钢筋的内侧布置与其垂直的分布钢筋。分布钢筋宜采用 HPB235 级和 HRB335 级钢筋，常用直径是 6mm 和 8mm。单位长度上分布钢筋的截面面积不应小于单位宽度上受力钢筋截面面积的 15%，且不宜小于该方向板截面面积的 0.15%；分布钢筋的间距不宜大于 250mm，直径不宜小于 6mm。温度变化较大或集中荷载较大时，分布钢筋的截面面积应适当增加，其间距不宜大于 200mm。

5.4.2 单筋矩形截面设计

1. 截面复核

截面复核时，往往是已知构件的截面尺寸 b 及 h、纵向受拉钢筋的面积 A_s、混凝土强度等级和钢筋级别，求截面的抗弯承载力 M_u。

由式（5-67），可得

$$\xi = \frac{x}{h_0} = \frac{f_y A_s}{\alpha_1 f_c b h_0} \tag{5-101}$$

如果满足 $\xi \leqslant \xi_b$ 和 $A_s \geqslant \rho_{min} b \times h$ 两个条件，按式（5-68）可求出截面的抗弯承载力

$$M_u = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi \left(1 - 0.5\xi\right) = f_y A_s h_0 \left(1 - 0.5\xi\right) \tag{5-102}$$

如果 $x > \xi_b$，只能取 $\xi = \xi_b$ 计算，则

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{u}} &= \alpha_1 f_{\mathrm{c}} b h_0^2 \xi_{\mathrm{b}} \left(1-0.5\xi_{\mathrm{b}}\right) \\
&= \alpha_{\mathrm{sb}} b h_0^2 \alpha_1 f_{\mathrm{c}}
\end{aligned}
\tag{5-103}
$$

M_{u} 大于截面的弯矩设计值 M 时，认为该截面抗弯承载力满足要求；当 M_{u} 小于截面的弯矩设计值 M 时，则为不安全，需重新选择截面。

M_{u} 大于截面的弯矩设计值 M 过多时，说明该截面设计不经济，可减小截面、降低钢筋的级别或混凝土的强度等级。

2. 截面选择

截面选择时，常遇的情形是：已知构件截面的弯矩设计值 M、混凝土强度等级、钢筋级别、构件截面尺寸 b 及 h，求所需的受拉钢筋面积 A_{s}。

根据结构所处的环境类别、作用等级和设计使用年限等确定混凝土保护层厚度 c，假定受拉纵向钢筋合力点与截面受拉边缘的距离 a_{s} 后（对于一般环境中，设计使用年限为 50 年，若梁的 c=25mm，则梁内一层钢筋时，a_{s}=35 mm；梁内二层钢筋时，a_{s} =50～60 mm；若板的 c=20mm 内，则梁的 a_{s} =25 mm），可得截面的有效高度 $h_0=h-a_{\mathrm{s}}$，并按混凝土强度等级和钢筋级别确定 α_1、f_{c}、f_{y}，将已确定的值代入式（5-68）。在计算公式中，使截面的抗弯承载力 M_{u} 等于该截面的弯矩设计值 M，解二次方程式，可得截面的混凝土受压区计算高度 x。然后验算适用条件（1），即要求满足 $x \leqslant \xi_{\mathrm{b}} h_0$。若 $x > \xi_{\mathrm{b}} h_0$，需加大截面，或提高混凝土强度等级，或改用双筋矩形截面。若 $x \leqslant \xi_{\mathrm{b}} h_0$，按式（5-67）求出受拉钢筋面积 A_{s} 后，根据钢筋直径和间距等的构造要求进行钢筋选择。实际采用的钢筋截面面积与计算所得 A_{s} 值，两者相差应不超过±5%，并检查实际的 a_{s} 值与假定的 a_{s} 是否大致相符，如果相差太大，则需重新计算。最后，应该以实际采用的钢筋截面面积验算适用条件（2），要求满足 $A_{\mathrm{s}} \geqslant \rho_{\min} b \times h$。如果不满足，则纵向受拉钢筋按 $A_{\mathrm{s}}=\rho_{\min} b \times h$ 配置。

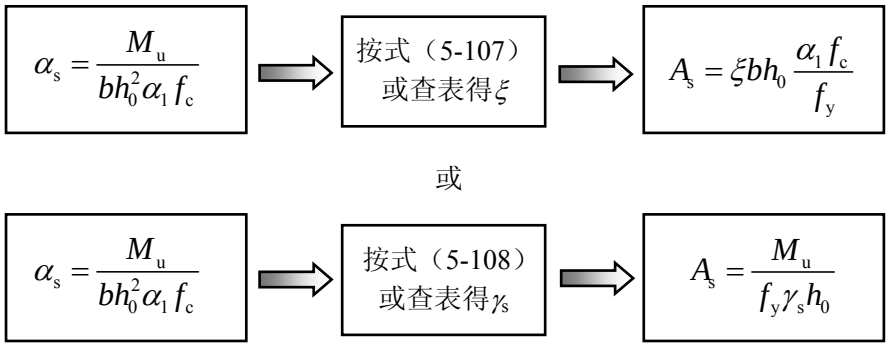


图5.36 单筋矩形截面受弯正截面配筋计算步骤

利用计算公式进行截面选择，在求混凝土受压区计算高度时，为避免求解二次方程的麻烦，常常引入一些参数，利用表格求解。

令

$$
\alpha_{\mathrm{s}} = \xi\left(1-0.5\xi\right) \tag{5-104}
$$

$$
\gamma_{\mathrm{s}} = \left(1-0.5\xi\right) \tag{5-105}
$$

则由式（5-68）可得

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{u}} &= \alpha_1 f_{\mathrm{c}} b h_0^2 \xi \left(1-0.5\xi\right) = f_{\mathrm{y}} A_{\mathrm{s}} h_0 \left(1-0.5\xi\right) \\
&= \alpha_{\mathrm{s}} b h_0^2 \alpha_1 f_{\mathrm{c}} = f_{\mathrm{y}} A_{\mathrm{s}} \gamma_{\mathrm{s}} h_0
\end{aligned}
\tag{5-106}
$$

式中，$\alpha_s bh_0^2$ 可以认为是截面在极限状态时的抵抗矩，因此可以将α_s称为截面抵抗矩系数；$\gamma_s h_0$ 为内力臂，因此将γ_s称为内力臂系数。

由式（5-104）得

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - 2\alpha_s} \tag{5-107}$$

代入式（5-105）得

$$\gamma_s = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\alpha_s}}{2} \tag{5-108}$$

由式（5-107）和（5-108）可知，α_s 与ξ和α_s 与γ_s 之间均存在一一对应关系，事先可以将α_s与ξ的关系和α_s与γ_s的关系制成表格，见附录 4 附表 4-1 和附表 4-2。

若截面的设计弯矩为M，使式（5-106）中的 M_u=M，由该式可得

$$\alpha_s = \frac{M}{\alpha_1 f_c b h_0^2} \tag{5-109}$$

在进行截面选择时，若已知截面的设计弯矩 M，首先按式（5-109）计算出α_s，然后按图 5.36 所示步骤进行配筋计算。这样既可以避免求解二次方程式，而且当α_s 值不接近表中的最小值或最大值时，还不必验算构件是少筋还是超筋，因而使计算工作得到简化。

【例5-2】 已知矩形梁截面尺寸b×h=250mm×500mm，保护层厚度c=25mm；弯矩设计值M=200×10^{6}N·mm；混凝土强度等级为C40，钢筋采用HRB400级钢筋。

求：所需的纵向受拉钢筋截面面积。

〖解〗 由于保护层厚度c=25mm，故a_s=35mm，则

$$h_0 = h - a_s = 500 - 35 = 465\,\text{mm}$$

由附录2附表2-1和附表2-3得，C40混凝土的f_c=19.1N/mm^2，f_t=1.71N/mm^2，HRB400钢筋的f_y=360N/mm^2。

由表5-1知：对于C40的混凝土α_1=1.0，β_1=0.8，由表5-2知：对于C40的混凝土和HRB400钢筋ξ_b=0.518。

在求解过程中，令截面的抗弯承载力M_u等于该截面的弯矩设计值M。

由式（5-109）

$$\alpha_s = \frac{M}{\alpha_1 f_c b h_0^2} = \frac{200 \times 10^6}{1.0 \times 19.1 \times 250 \times 465^2} = 0.1937$$

由式（5-107）

$$\begin{aligned}\xi &= 1 - \sqrt{1 - 2\alpha_s} \\ &= 1 - \sqrt{1 - 2 \times 0.1937} = 0.2173 < \xi_b = 0.518\end{aligned}$$

$\xi < \xi_b$ 表示满足适筋梁计算公式的适用条件，则由式（5-108）

$$\gamma_s = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\alpha_s}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 - 2 \times 0.1937}}{2} = 0.8913$$

故由式（5-106）可得

$$A_s=\frac{M}{f_y\gamma_s h_0}=\frac{200\times10^6}{360\times0.8913\times465}=1340\,\text{mm}^2$$

根据计算所得的构件所需钢筋截面面积，并考虑钢筋间距、直径及根数等的构造要求，选用4根直径为22mm的HRB400钢筋，A_s=1520mm^2。

根据实际配筋验算适用条件：

（1）由式（5-101）

$$\xi=\frac{x}{h_0}=\frac{f_yA_s}{\alpha_1 f_c b h_0}=\frac{360\times1520}{1.0\times19.1\times250\times465}=0.2464<\xi_b=0.518$$

满足适筋要求。

（2）$\rho=\dfrac{A_s}{bh_0}=\dfrac{1520}{250\times465}=0.01308=1.308\%$

因为 $0.45\dfrac{f_t}{f_y}=0.45\times\dfrac{1.71}{360}=0.214\%$，所以 $\rho_{\min}=0.214\%$

$$\rho=1.308\%>\rho_{\min}\cdot\frac{h}{h_0}=0.214\%\cdot\frac{500}{465}=0.230\%$$

满足大于最小配筋率要求。

【例5-3】 已知矩形梁的截面尺寸为$b\times h$＝250mm×450mm，保护层厚度c=25mm；纵向受拉钢筋为4根直径为20mm的HRB400级钢筋（A_s=1257mm^2）；混凝土强度等级为C30；承受的弯矩M=150×10^{6}N·mm。

验算此梁截面是否安全。

〖解〗 由于保护层厚度c=25mm，故a_s=35mm，则

$$h_0=h-a_s=450-35=415\,\text{mm}$$

由附录2附表2-1和附表2-3得，C30混凝土的f_c=14.3N/mm^2，f_t=1.43N/mm^2，HRB400钢筋的f_y=360N/mm^2。

由表5-1知：对于C30的混凝土α_1=1.0，β_1=0.8，由表5-2知：对于C30的混凝土和HRB400钢筋ξ_b=0.518。

因为 $0.45\dfrac{f_t}{f_y}=0.45\dfrac{1.43}{360}=0.179\%$，所以 $\rho_{\min}=0.2\%$

$$\rho=\frac{A_s}{bh_0}=\frac{1256}{250\times415}=1.211\%>\rho_{\min}\cdot\frac{h}{h_0}=0.2\%\cdot\frac{450}{415}=0.217\%$$

由式（5-101）

$$\xi=\frac{x}{h_0}=\frac{f_yA_s}{\alpha_1 f_c b h_0}=\frac{360\times1257}{1.0\times14.3\times250\times415}=0.3050<\xi_b=0.518$$

满足公式适用条件。

由式（5-106）

$$M_u = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi (1-0.5\xi)$$
$$= 1.0\times 14.3\times 250\times 415^2\times 0.3050(1-0.5\times 0.3050) = 159.152\times 10^6\,\mathrm{N\cdot mm}$$

$M_u > M = 150\times 10^6\,\mathrm{N\cdot mm}$，安全。

5.4.3 双筋矩形截面设计

1. 截面复核

双筋矩形截面复核时，往往是已知构件的截面尺寸 b 及 h、纵向受力钢筋的面积 A_s 和 A'_s、混凝土强度等级和钢筋级别，求 M_u。

由式（5-86）可得

$$\xi = \frac{x}{h_0} = \frac{f_y A_s - f_y' A_s'}{\alpha_1 f_c b h_0} \qquad (5\text{-}110)$$

如果满足$\xi \leqslant \xi_b$和 $x \geqslant 2a'_s$两个条件，则按式（5-87）求出截面的抗弯承载力 M_u 为：

$$M_u = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi (1-0.5\xi) + f_y' A_s' (h_0 - a_s') \qquad (5\text{-}111)$$

如果 $x<2a'_s$，说明受压区计算高度很小，因而，受压钢筋的压应变ε'_s很小，受压钢筋不屈服。此时，近似取 $x=2a'_s$，并将各力对受压钢筋的合力点取矩，由平衡条件可得

$$M_u = f_y A_s (h_0 - a_s') \qquad (5\text{-}112)$$

但是，当 a'_s/h_0 较大，若不考虑受压钢筋 A'_s 的作用按单筋截面求出的 M_u 值比按式（5-112）求出的 M_u 值还大时，则 M_u 值应取不考虑受压钢筋 A'_s 的作用按单筋截面求出的 M_u 值。

如果$\xi>\xi_b$，只能取$\xi=\xi_b$计算，则

$$\begin{aligned} M_u &= \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi_b (1-0.5\xi_b) + f_y' A_s' (h_0 - a_s') \\ &= \alpha_{sb} b h_0^2 \alpha_1 f_c + f_y' A_s' (h_0 - a_s') \end{aligned} \qquad (5\text{-}113)$$

截面所能抵抗的弯矩 M_u 求出后，将 M_u 与截面弯矩的设计值 M 进行比较。当 M_u 大于截面的弯矩设计值 M 时，认为截面抗弯承载力满足要求，截面工作可靠；当 M_u 小于截面的弯矩设计值 M 时，则为不安全，需重新设计选择。

2. 截面选择

双筋矩形截面选择时，常遇的情形是已知构件的弯矩设计值 M、混凝土强度等级及钢筋级别、构件截面尺寸 b 及 h，求所需的受拉钢筋面积 A_s 和受压钢筋面积 A'_s。不过有时还会遇到因为构造要求等原因，受压钢筋面积 A'_s 也已知，仅求所需受拉钢筋面积 A_s 的情况。

（1）情况一：已知构件截面的弯矩设计值 M、混凝土强度等级及钢筋级别、构件截面尺寸 b 及 h，求所需的受拉钢筋面积 A_s 和受压钢筋面积 A'_s。

这时，计算公式为式（5-86）和式（5-87），在计算公式中，使截面的抗弯承载力 M_u 等于该截面的弯矩设计值 M。但在这两个方程中有 A_s、A'_s 和 x 三个未知量，需补充一个方程或条件。为了节约钢材，可补充截面钢筋用量最小的条件，由式（5-86）和式（5-87）可得截面总配筋率

$$\rho+\rho^{'}=\frac{A_s+A_s^{'}}{bh_0}=\frac{\alpha_1 f_c}{f_y}\left[\frac{\dfrac{M_u}{\alpha_1 f_c b h_0^2}-\xi\left(1-\dfrac{\xi}{2}\right)}{1-\dfrac{a_s^{'}}{h_0}}\left(1+\frac{f_y}{f_y^{'}}\right)+\xi\right] \qquad (5\text{-}114)$$

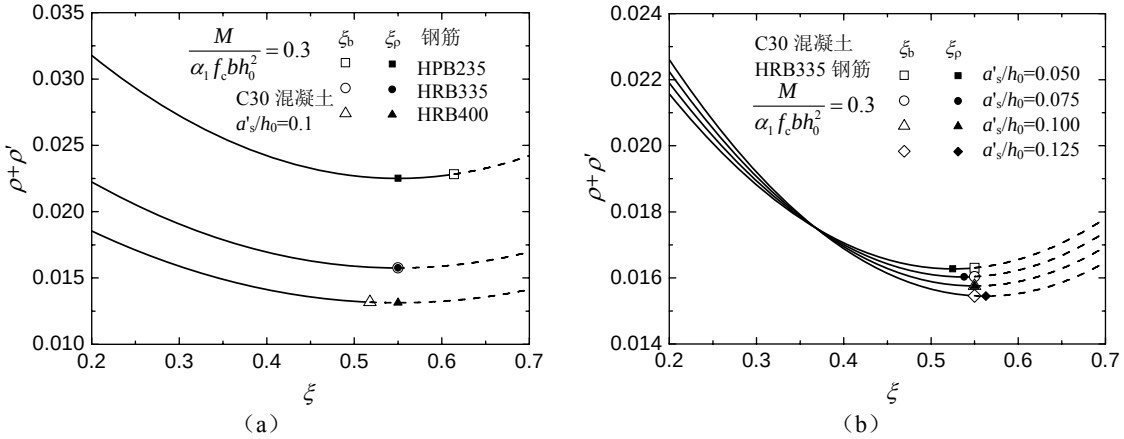
由上式可见，当弯矩为定值时，截面总的配筋率是与混凝土和钢筋强度比值、钢筋相对位置（a'_s/h_0）有关的受压区相对计算高度（ξ）的二次函数，如图5.37所示。对总配筋率关于ξ求导后，令其等于零，可得截面钢筋面积最小时的受压区相对计算高度ξ_ρ为

$$\xi_\rho=1-\frac{1-\dfrac{a_s^{'}}{h_0}}{1+\dfrac{f_y}{f_y^{'}}} \qquad (5\text{-}115)$$

通常有$f_y=f'_y$，则

$$\xi_\rho=\frac{1}{2}+\frac{a_s^{'}}{2h_0} \qquad (5\text{-}116)$$

可见，对于受拉区和受压区采用相同级别钢筋的构件，截面钢筋面积最小时的受压区相对计算高度仅与钢筋相对位置（a'_s/h_0）有关。由图 5.37 截面总配筋率与受压区相对计算高度的关系可以看出，截面钢筋面积最小并不是总发生在$\xi=\xi_b$时。当钢筋级别较低或受压钢筋离受压顶面较近时，截面钢筋面积最小的受压区相对计算高度小于ξ_b。另外，截面钢筋面积最小的ξ_s也不可能发生在$\xi>\xi_b$的区域，这是因为此时，受拉区钢筋不屈服，钢筋并未得到充分利用。因此，对于不同级别的钢筋，其截面钢筋面积最小的ξ_s是ξ_b和ξ_ρ两者的较小值。



（a） （b）

图 5.37 截面总配筋率与受压区相对计算高度的关系

（a）不同钢筋级别；（b）受压钢筋位置不同

在进行截面设计时，补充条件

$$\xi=\xi_s \text{ 或 } x=x_s=\xi_s h_0 \qquad (5\text{-}117)$$

即可满足截面破坏时钢筋屈服，又使截面总的配筋率最小。将式（5-117）代入式（5-87），并使$M_u=M$，可得

$$A_s^{'}=\frac{M-\alpha_1 f_c b x_s\left(h_0-0.5x_s\right)}{f_y^{'}\left(h_0-a_s^{'}\right)}$$
$$=\frac{M-\alpha_1 f_c b h_0^2\xi_s\left(1-0.5\xi_s\right)}{f_y^{'}\left(h_0-a_s^{'}\right)}=\frac{M-\alpha_{ss}bh_0^2\alpha_1 f_c}{f_y^{'}\left(h_0-a_s^{'}\right)} \tag{5-118}$$

式中，$\alpha_{ss}=\xi_s\left(1-0.5\xi_s\right)$。将式（5-118）代入式（5-86）可得

$$A_s=\frac{f_y^{'}A_s^{'}+\alpha_1 f_c b x_s}{f_y}=\frac{f_y^{'}A_s^{'}+\alpha_1 f_c b\xi_s h_0}{f_y} \tag{5-119}$$

（2）情况二：已知构件截面的弯矩设计值 M、混凝土强度等级及钢筋级别、构件截面尺寸 b 及 h、受压钢筋面积 A'_s，求所需的受拉钢筋面积 A_s。

计算公式仍为式（5-86）和式（5-87），在计算公式中，仍使截面的抗弯承载力 M_u 等于该截面的弯矩设计值 M。由于 A'_s 已知，这两个方程只有 A_s 和 x 两个未知量，因此，可以解得

$$\xi=\frac{x}{h_0}=1-\sqrt{1-2\frac{M-f_y^{'}A_s^{'}\left(h_0-a_s^{'}\right)}{\alpha_1 f_c b h_0^2}} \tag{5-120}$$

$$A_s=\frac{f_y^{'}A_s^{'}+\alpha_1 f_c b\xi h_0}{f_y} \tag{5-121}$$

应当注意的是，当按式（5-120）求出的混凝土受压区相对计算高度 $\xi>\xi_b$ 时，说明给定的受压钢筋面积 A'_s 太小，这时应按情况一分别求出 A'_s 和 A_s。如果 $x=\xi h_0<2a'_s$，说明受压钢筋的压应变 ε'_s 很小，受压钢筋的应力达不到 f'_y 而成为未知数。这样可以近似地取 $x=2a'_s$，并将各力对受压钢筋的合力点取矩，由平衡条件可得

$$M=f_y A_s\left(h_0-a_s^{'}\right) \tag{5-122}$$

则

$$A_s=\frac{M}{f_y\left(h_0-a_s^{'}\right)} \tag{5-123}$$

但这样求得的 A_s 有可能比不考虑受压钢筋的存在，而按单筋矩形截面计算的 A_s 还大。如果这样，应按单筋截面的计算结果配筋。

【例 5-4】已知矩形截面梁的截面尺寸为 $b\times h$=250mm×500mm，混凝土保护层厚度 c=25mm，混凝土强度等级为 C40，受压和受拉纵向钢筋均采用 HRB400 级，截面弯矩设计值 M＝400×10^{6}N·mm。

求：所需受压和受拉纵向钢筋截面面积 A_s 和 A'_s。

〖解〗由于混凝土保护层厚度 c=25mm，同时截面所需承担的弯矩较大，初步估计所需钢筋较多，假定受拉钢筋按两排布置，故取 a_s=60mm，则

$$h_0=h-a_s=500-60=440\,\text{mm}$$

由附录2附表2-1和附表2-3得，C40混凝土的 f_c=19.1N/mm^2，f_t=1.71N/mm^2，HRB400钢筋的 f_y=360N/mm^2。

由表5-1知：对于C40的混凝土α_1=1.0，β_1=0.8，由表5-2知：对于C40的混凝土和HRB400钢筋ξ_b=0.518。

在求解过程中，令截面的抗弯承载力M_u等于该截面的弯矩设计值M。

首先按单筋截面设计：

由式（5-109）

$$\alpha_s=\frac{M}{\alpha_1 f_c b h_0^2}=\frac{400\times10^6}{1.0\times19.1\times250\times440^2}=0.4327$$

由式（5-107）

$$\begin{aligned}\xi&=1-\sqrt{1-2\alpha_s}\\&=1-\sqrt{1-2\times0.4327}=0.6331>\xi_b=0.518\end{aligned}$$

这说明，如果设计成单筋矩形截面，将会出现$\xi>\xi_b$的超筋情况。若加大截面尺寸和提高混凝土强度等级受到限制而不能实现，则应设计成双筋矩形截面。

下面介绍按双筋截面设计：

受压钢筋单排布置，则取a'_s=35mm，同样采用HRB400级的钢筋，由附录2附表2-3得，HRB400钢筋的f'_y=360N/mm^2。

$$\xi_\rho=\frac{1}{2}+\frac{a_s'}{2h_0}=\frac{1}{2}+\frac{35}{2\times440}=0.5398>\xi_b=0.518\text{，取}\xi_s=\xi_b=0.518$$

为了节约钢材，使截面的钢筋面积最小，同时，又能满足截面破坏时钢筋屈服，取$\xi=\xi_s$，由式（5-118）

$$\begin{aligned}A_s'&=\frac{M-\alpha_1 f_c b h_0^2\xi_s\left(1-0.5\xi_s\right)}{f_y'\left(h_0-a_s'\right)}\\&=\frac{400\times10^6-1.0\times19.1\times250\times440^2\times0.518\times\left(1-0.5\times0.518\right)}{360\times\left(440-35\right)}=310\text{mm}^2\end{aligned}$$

由式（5-119）

$$\begin{aligned}A_s&=\frac{f_y'A_s'+\alpha_1 f_c b\xi_s h_0}{f_y}\\&=\frac{360\times310+1.0\times19.1\times250\times0.518\times440}{360}=3333\text{mm}^2\end{aligned}$$

受拉钢筋选用 7 根直径 25mm 的 HRB400 钢筋，A_s=3436mm^2，两排布置（与初始假设相符）。受压钢筋选用 2 根直径 14mm 的 HRB400 钢筋，A'_s=308mm^2。这里需注意的是，受压区实际配筋量稍小于计算量（误差 0.65%）满足工程要求。

$$\text{因为}0.45\frac{f_t}{f_y}=0.45\times\frac{1.71}{360}=0.214\%\text{，所以}\rho_{\min}=0.214\%$$

$$A_s=3333\text{ mm}^2>\rho_{\min}bh=0.214\%\times250\times500=268\text{mm}^2$$

受拉纵筋量满足大于最小配筋量的要求。

【例 5-5】 已知条件同【例 5-4】，但在受压区已配置 3 根直径 20mm 的 HRB400 钢筋，

A'_s=942mm^2。

求：受拉钢筋面积 A_s。

〖解〗 求解所需的材料参数和几何参数，参见【例 5-4】。

在求解过程中，令截面的抗弯承载力M_u等于该截面的弯矩设计值M。

由式（5-120）

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - 2\frac{M - f_y' A_s' \left(h_0 - a_s'\right)}{\alpha_1 f_c b h_0^2}}$$

$$= 1 - \sqrt{1 - 2\frac{400\times10^6 - 360\times942\times\left(440-35\right)}{1.0\times19.1\times250\times440^2}} = 0.3429 < \xi_b = 0.518$$

同时，$x = \xi h_0 = 0.3429\times440 = 150.9 > 2a_s' = 2\times35 = 70\text{mm}$。则受压区计算高度满足公式的适用条件。

由式（5-121）

$$A_s = \frac{f_y' A_s' + \alpha_1 f_c b h_0 \xi}{f_y}$$

$$= \frac{360\times942 + 1.0\times19.1\times250\times440\times0.3429}{360} = 2943\text{mm}^2$$

受拉钢筋选用 6 根直径 25mm 的 HRB400 钢筋，A_s=2945mm^2，双排布置（与初始假设相符）。

因为 $0.45\dfrac{f_t}{f_y} = 0.45\dfrac{1.71}{360} = 0.214\%$，所以 $\rho_{\min} = 0.214\%$

$$A_s = 2943\ \text{mm}^2 > \rho_{\min} bh = 0.214\%\times250\times500 = 268\text{mm}^2$$

受拉纵筋量满足大于最小配筋量的要求。

【例 5-6】已知混凝土强度等级 C40；钢筋采用 HRB400 级；梁截面尺寸为 250mm×500mm，混凝土保护层厚度 c=35mm；受拉钢筋为 4 根直径 25mm 的钢筋，A_s=1473mm^2；受压钢筋为 2 根直径 16mm 的钢筋，A'_s＝402mm^2；截面承受弯矩的设计值 M=200×10^{6}N·mm。

验算此截面是否安全。

〖解〗 由于混凝土保护层厚度 c=35mm，故 a_s=35+25/2=47.5mm，a'_s=35+16/2=43mm，则

$$h_0 = h - a_s = 500 - 47.5 = 452.5\,\text{mm}$$

由附录2附表2-1和附表2-3得，C40混凝土的f_c=19.1N/mm^2，f_t=1.71N/mm^2，HRB400钢筋的f_y=360N/mm^2、f'_y=360N/mm^2。

由表5-1知：对于C40的混凝土α_1=1.0，β_1=0.8，由表5-2知：对于C40的混凝土和HRB400钢筋ξ_b=0.518。

因为 $0.45\dfrac{f_t}{f_y} = 0.45\dfrac{1.71}{360} = 0.214\%$，所以 $\rho_{\min} = 0.214\%$

$$A_s = 1473\text{mm}^2 > \rho_{\min} bh = 0.214\% \times 250 \times 500 = 268\text{mm}^2$$

由式（5-110）可以解得

$$\xi = \frac{x}{h_0} = \frac{f_y A_s - f_y' A_s'}{\alpha_1 f_c b h_0}$$
$$= \frac{360 \times 1473 - 360 \times 402}{1.0 \times 19.1 \times 250 \times 452.5} = 0.1784 < \xi_b = 0.518$$

但是 $x = \xi h_0 = 0.1784 \times 452.5 = 80.7 < 2a_s' = 2 \times 43 = 86\text{mm}$ 。表示受压区计算高度小，受压钢筋 A'_s 不能达到其抗压强度设计值 f'_y，因此，设 $x=2a'_s=86$mm，对受压钢筋合力中心取矩，得

$$M_u = f_y' A_s' \left(h_0 - a_s'\right) = 360 \times 1473 \left(452.5 - 43\right) = 217.158 \times 10^6 \text{ N·mm}$$

当不考虑受压钢筋A'_s的作用时，

$$\xi = \frac{x}{h_0} = \frac{f_y A_s}{\alpha_1 f_c b h_0} = \frac{360 \times 1473}{1.0 \times 19.1 \times 250 \times 452.5} = 0.2454 < \xi_b = 0.518$$

则

$$M_u = \alpha_1 f_c b h_0^2 \xi \left(1 - 0.5\xi\right)$$
$$= 1.0 \times 19.1 \times 250 \times 452.5^2 \times 0.2454 \times \left(1 - 0.5 \times 0.2454\right) = 210.491 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

所以，该梁截面的极限弯矩

$$M_u = 217.158 \times 10^6 \text{ N·mm}$$

与弯矩的设计值比较 $M_u > M = 200 \times 10^6$ N·mm，该梁截面安全。

5.4.4 T 形截面设计

T 形截面中和轴的位置不同，设计时采用的公式不同，因此，需要首先根据截面的配筋（截面复核时）或截面的弯矩设计值（截面选择时）判断中和轴的位置。

1. 截面复核

（1）当 $f_y A_s \le \alpha_1 f_c b_f' h_f'$ 时，则 $x \le h'_f$，即中和轴位于翼缘内，属于第一类 T 形截面，可按 $b_f' \times h$ 的单筋矩形截面梁的计算方法进行验算。

（2）当 $f_y A_s > \alpha_1 f_c b_f' h_f'$ 时，则 $x > h'_f$，即中和轴位于肋部，属于第二类 T 形截面。

由式（5-99）可得

$$\xi = \frac{x}{h_0} = \frac{f_y A_s - \alpha_1 f_c \left(b_f' - b\right) h_f'}{\alpha_1 f_c b h_0} \qquad (5\text{-}124)$$

若$\xi<\xi_b$，则

$$M_u=\alpha_1 f_c b h_0^2 \xi\left(1-0.5\xi\right)+\alpha_1 f_c\left(b_f^{'}-b\right)h_f^{'}\left(h_0-0.5h_f^{'}\right) \tag{5-125}$$

若$\xi>\xi_b$，只能取$\xi=\xi_b$计算，则

$$\begin{aligned}M_u&=\alpha_1 f_c b h_0^2 \xi_b\left(1-0.5\xi_b\right)+\alpha_1 f_c\left(b_f^{'}-b\right)h_f^{'}\left(h_0-0.5h_f^{'}\right)\\&=\alpha_{sb} b h_0^2 \alpha_1 f_c+\alpha_1 f_c\left(b_f^{'}-b\right)h_f^{'}\left(h_0-0.5h_f^{'}\right)\end{aligned} \tag{5-126}$$

截面所能抵抗的弯矩 M_u 求出后，将 M_u 与截面弯矩的设计值 M 进行比较。当 M_u 大于截面的弯矩设计值 M 时，认为截面抗弯承载力满足要求，截面工作可靠；当 M_u 小于截面的弯矩设计值 M 时，则为不安全，需重新选择截面。

2. 截面选择

在求解过程中，令截面的抗弯承载力M_u等于该截面的弯矩设计值M，首先判断T形截面类型。

（1）当 $M\le\alpha_1 f_c b_f^{'} h_f^{'}\left(h_0-\dfrac{h_f^{'}}{2}\right)$时，则 $x\le h'_f$，即中和轴位于翼缘内，属于第一类 T 形截面。其计算方法与 $b_f^{'}\times h$ 的单筋矩形截面梁完全相同。

（2）当 $M>\alpha_1 f_c b_f^{'} h_f^{'}\left(h_0-\dfrac{h_f^{'}}{2}\right)$时，则 $x>h'_f$，即中和轴位于肋部，属于第二类 T 形截面。

这时，计算公式为式（5-101）和式（5-102）。在计算公式中，使截面的抗弯承载力 M_u 等于该截面的弯矩设计值 M。这两个方程只有 A_s 和 x 两个未知量，因此，可以得

$$\xi=\frac{x}{h_0}=1-\sqrt{1-2\frac{M-\alpha_1 f_c\left(b_f^{'}-b\right)h_f^{'}\left(h_0-0.5h_f^{'}\right)}{\alpha_1 f_c b h_0^2}} \tag{5-127}$$

若$\xi\le\xi_b$，则

$$A_s=\frac{\alpha_1 f_c\left(b_f^{'}-b\right)h_f^{'}+\alpha_1 f_c b\xi h_0}{f_y} \tag{5-128}$$

同时要求满足 $A_s\geqslant\rho_{min}b\times h$。如果不满足，则纵向受拉钢筋按 $A_s=\rho_{min}b\times h$ 配置。

若$\xi>\xi_b$，需加大截面，或提高混凝土强度等级，或改用双筋 T 形截面后重新计算。

【例 5-7】已知 T 形截面梁的弯矩设计值 $M=850\times10^6$N·mm，混凝土强度等级为 C40，钢筋采用 HRB400 级，梁的截面尺寸为 $b\times h$=300mm×700mm，b'_f=600mm，h'_f =120mm，混凝土保护层厚度 c=25mm。

求：所需的受拉钢筋截面面积 A_s。

〖解〗由于混凝土保护层厚度 c=25mm，同时截面所承担的弯矩较大，初步估计所需钢筋较多，假定受拉钢筋按两排布置，故取 a_s=60mm，则

$$h_0=h-a_s=700-60=640\,\text{mm}$$

由附录2附表2-1和附表2-3得，C40混凝土的f_c=19.1N/mm^2，f_t=1.71N/mm^2，HRB400钢筋的f_y=360N/mm^2。

由表5-1知：对于C40的混凝土α_1=1.0，β_1=0.8，由表5-2知：对于C40的混凝土和HRB400钢筋ξ_b=0.518。

令截面的抗弯承载力 M_u 等于该截面的弯矩设计值 M，判断 T 形截面类型：

$$\alpha_1 f_c b_f' h_f' \left(h_0 - 0.5h_f'\right) = 1.0\times19.1\times600\times120\times\left(640-0.5\times120\right)$$
$$= 797.616\times10^6\ \mathrm{N\cdot mm}$$

$$M = 850\times10^6\ \mathrm{N\cdot mm} > \alpha_1 f_c b_f' h_f' \left(h_0 - 0.5h_f'\right) = 797.616\times10^6\ \mathrm{N\cdot mm}$$

属于第二种类型的 T 形截面。

由式（5-127）

$$\xi = \frac{x}{h_0} = 1-\sqrt{1-2\frac{M-\alpha_1 f_c\left(b_f'-b\right)h_f'\left(h_0-0.5h_f'\right)}{\alpha_1 f_c b h_0^2}}$$
$$= 1-\sqrt{1-2\frac{850\times10^6-1.0\times19.1\times\left(600-300\right)\times120\times\left(640-0.5\times120\right)}{1.0\times19.1\times300\times640^2}}$$
$$= 0.2155 < \xi_b = 0.518$$

则由式（5-128）

$$A_s = \frac{\alpha_1 f_c\left(b_f'-b\right)h_f' + \alpha_1 f_c b\xi h_0}{f_y}$$
$$= \frac{1.0\times19.1\times\left(600-300\right)\times120+1.0\times19.1\times300\times0.2155\times640}{360} = 4105\ \mathrm{mm}^2$$

受拉钢筋选用 7 根直径 28mm 的 HRB400 钢筋，A_s=4310mm^2，双排布置（与初始假设相符）。

因为 $0.45\dfrac{f_t}{f_y} = 0.45\dfrac{1.71}{360} = 0.214\%$，所以 $\rho_{\min} = 0.214\%$

$$A_s = 4310\ \mathrm{mm}^2 > \rho_{\min} bh = 0.214\%\times300\times700 = 449\mathrm{mm}^2$$

受拉纵筋量满足大于最小配筋量的要求。

【例 5-8】已知一 T 形截面梁的截面尺寸 h=700mm，b=250mm，b'_f=600mm，h'_f =120mm，混凝土保护层厚度 c=25mm；截面配有 8 根直径 22mm 的 HRB400 受拉钢筋（A_s=3041mm^2），混凝土强度等级 C30。求该梁截面的极限弯矩 M_u。

〖解〗由于混凝土保护层厚度c=25mm。由于肋部宽度b只有250mm，8根直径22mm的钢筋必须分两排布置，故a_s=60mm，则

$$h_0 = h - a_s = 700 - 60 = 640\,\mathrm{mm}$$

由附录2附表2-1和附表2-3得，C30混凝土的f_c=14.3N/mm^2，f_t=1.43N/mm^2，HRB400钢筋的f_y=360N/mm^2。

由表5-1知：对于C30的混凝土α_1=1.0，β_1=0.8，由表5-2知：对于C30的混凝土和HRB400钢筋ξ_b=0.518。

因为 $0.45\frac{f_t}{f_y}=0.45\frac{1.43}{360}=0.179\%$，所以 $\rho_{min}=0.2\%$

$$A_s=3041\ \text{mm}^2>\rho_{min}bh=0.2\%\times250\times700=350\text{mm}^2$$

判断 T 形截面类型：

$$f_yA_s=360\times3041=1094.760\times10^3\text{N}$$

$$\alpha_1f_cb_f^{'}h_f^{'}=1.0\times14.3\times600\times120=1029.600\times10^3\text{N}$$

所以 $f_yA_s>\alpha_1f_cb_f^{'}h_f^{'}$，$x>h'_f$，即中和轴位于肋部，属于第二类 T 形截面。

由式（5-124）

$$\xi=\frac{f_yA_s-\alpha_1f_c\left(b_f^{'}-b\right)h_f^{'}}{\alpha_1f_cbh_0}$$

$$=\frac{360\times3041-1.0\times14.3\times\left(600-250\right)\times120}{1.0\times14.3\times250\times640}=0.2160<\xi_b=0.518$$

$$x=\xi h_0=0.2160\times640=138\text{mm}>h_f^{'}=120\text{mm}$$

则由式（5-125）

$$M_u=\alpha_1f_cbh_0^2\xi\left(1-0.5\xi\right)+\alpha_1f_c\left(b_f^{'}-b\right)h_f^{'}\left(h_0-0.5h_f^{'}\right)$$

$$=1.0\times14.3\times250\times640^2\times0.2160\times\left(1-0.5\times0.2160\right)$$

$$+1.0\times14.3\times\left(600-250\right)\times120\times\left(640-0.5\times120\right)$$

$$=630.481\times10^6\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

思 考 题

5.1 分别说明适筋梁、超筋梁和少筋梁的破坏特征。

5.2 适筋梁从开始加载到正截面承载力破坏经历了哪几个阶段？各阶段的主要特征是什么？分别说明各阶段截面上混凝土的应变分布和应力分布、纵向钢筋的应变和应力、裂缝开展、中性轴位置以及梁的跨中挠度的变化规律。

5.3 什么是钢筋混凝土受弯构件的界限破坏？钢筋混凝土受弯构件的界限受压区计算高度是如何确定的？试说明界限破坏时截面上钢筋和混凝土的应力和应变特征。

5.4 单筋适筋梁正截面承载力计算中，是如何假定钢筋和混凝土应力的？其正截面承载力计算公式的适用条件是什么？为什么要规定这些适用条件？

5.5 纵向受拉钢筋的最大配筋率ρ_{max}和最小配筋率ρ_{min}是根据什么原则确定的？它们各与什么因素有关？

5.6 分析影响受弯构件正截面抗弯能力的主要因素，如欲提高截面抗弯能力M_u，宜优先采用哪些措施？为什么？

5.7 在对单筋矩形截面承载力进行复核时，若$\xi > \xi_b$，其承载力如何计算？

5.8 什么是受弯构件双筋截面？在什么情况下才将受弯构件设计成双筋截面？

5.9 在双筋截面中受压钢筋起什么作用？在设计双筋矩形截面时，受压钢筋的抗压强度设计值应如何确定？为什么说受压钢筋不宜采用高强度的钢筋？

5.10 双筋适筋梁正截面承载力计算中，是如何假定钢筋和混凝土应力的？其正截面承载力计算公式的适用条件是什么？为什么要规定这些适用条件？

5.11 为什么在双筋矩形截面承载力计算中要规定$x \geqslant 2a'_s$的条件？当双筋矩形截面出现$x < 2a'_s$时应当如何计算其抗弯承载力？

5.12 在进行双筋截面设计时，若A'_s和A_s均为未知时，一般需要补充什么条件，可以使得截面的纵筋总量最少，为什么？

5.13 在T形截面抗弯承载力计算时，为什么要限制其翼缘计算宽度的取值？其取值与什么有关？

5.14 在T形截面的抗弯承载力截面设计和承载力复核时，如何确定中性轴位置？并说明原因。

5.15 在进行梁内纵向受拉钢筋布置时，纵向受拉钢筋根数、直径及间距应满足哪些规定？当纵向受拉钢筋不满足间距要求时，如何处理？

习 题

5.1 已知混凝土单筋矩形截面梁，$b \times h$=200mm×500mm，混凝土保护层厚度c=25mm；配置4根直径为18mm的钢筋，实测钢筋的屈服强度f_y=386N/mm^2，弹性模量E_s=2.0×10^{5}N/mm^2；混凝土的f_c=20.1N/mm^2，f_t=2.25N/mm^2，弹性模量E_c=2.25×10^4 N/mm^2。试按完全弹性计算：（1）开裂弯矩M_{cr}及其相应的钢筋应力和截面曲率；（2）分别计算M=20×10^6 N·mm和M=60×10^6 N·mm时相应的钢筋应力和截面曲率。

5.2 已知钢筋混凝土矩形截面梁，其截面尺寸$b \times h$=300mm×550mm，混凝土保护层厚度c=25mm；承受弯矩设计值M=200×10^{6}N·mm，采用C30混凝土和HRB335级钢筋。计算并配置该截面的纵向受拉钢筋。

5.3 已知钢筋混凝土矩形截面梁，其截面尺寸$b \times h$=250mm×650mm，混凝土保护层厚度c=25mm；采用C30混凝土，配有3根直径为25mm的HRB335级纵向受拉钢筋。试验算此梁承受弯矩设计值M=250×10^{6}N·mm时是否安全？

5.4 已知钢筋混凝土矩形截面梁$b \times h$=300mm×600mm，混凝土保护层厚度c=25mm；配置6根直径为25mm的HRB400级纵向受拉钢筋。计算当采用C30混凝土时所能承受的弯矩设计值。

5.5 已知某钢筋混凝土矩形截面梁，截面尺寸$b \times h$=250mm×600mm，混凝土保护层厚度c=25mm；采用C30混凝土和HRB400级钢筋，截面弯矩设计值M=350×10^{6}N·mm。试配置截面钢筋。

5.6 已知条件同题5.5，但在受压区已配有3根直径为18mm的HRB335级钢筋。试计算受拉钢筋的截面面积A_s。

5.7 已知钢筋混凝土矩形截面梁的截面尺寸为$b \times h$=250mm×500mm，混凝土保护层厚度c=25mm；混凝土强度等级为C30，钢筋采用HRB335级，截面弯矩设计值M＝350×10^{6}N·mm。

试配置截面钢筋。

5.8 已知条件同题5.7，但采用对称配筋，试配置截面钢筋。

5.9 一矩形截面钢筋混凝土梁，截面尺寸$b\times h$=200mm×500mm，混凝土保护层厚度c=35mm；采用C30混凝土和HRB335级钢筋，在受拉区和受压区分别配有3根直径为20mm的钢筋。试计算此梁可承受弯矩的设计值。

5.10 已知T形截面钢筋混凝土梁，截面尺寸为$b\times h$=250mm×600mm，b'_f=600mm，h'_f=100mm，混凝土保护层厚度c=25mm；承受弯矩设计值M=450×10^6N·mm，采用C30混凝土和HRB400级钢筋。求该截面所需的纵向受拉钢筋面积。若选用混凝土强度等级为C50，其他条件不变，试求纵向受拉钢筋面积。

5.11 已知 T 形截面钢筋混凝土梁，截面尺寸为 $b\times h$=250mm×800mm，b'_f=600mm，h'_f=120mm，混凝土保护层厚度 c=25mm；采用 C30 混凝土和 HRB335 级钢筋，配有 8 根直径为 25mm 的受拉钢筋。试计算此梁可承受弯矩的设计值。若选用混凝土强度等级为 C40，其他条件不变，试求此梁可承受弯矩的设计值。