

1. 长为1的均匀梁，左端  $x=0$  受到垂直向下的外力为  $\cos \omega t$  (N)，右端  $x=1$  在一个小弹簧上，弹簧的底座固定在平衡位置  $u=0$ ，写出边界条件并选  $u(x,t)$  将边界条件齐次化。

3. 长为1的均匀梁，左端  $x=0$  固定，右端  $x=1$  挂在一个小弹簧上，一个竖直的光滑细杆上，写出边界条件并选  $u(x,t)$  将边界条件齐次化。

4. 长为1的均匀梁，左端  $x=0$  有热流  $\sin t$  ( $J/s \cdot m^2$ )，写出边界条件并选  $u(x,t)$  将边界条件齐次化。

5. 长为1的均匀梁，侧面绝热。左端  $x=0$  外温度为  $\sin t$  (度) 而右端  $x=1$  有热流  $\cos t$  ( $J/s \cdot m^2$ ) 流入杆内，写出该问题的边界条件。

6. 设在带状平面区域  $\Omega = \{(x,y) | x > 0, 0 < y < a\}$  有温度分布，上下表面绝热。如果在内圆的边界上绝热而在外圆的边界上有热流  $\phi(x,y)$  ( $J/s \cdot m$ ) 流入薄板内，写出板内温度分布满足的定解问题。

7. 设有一均匀环形金属薄板上下两面绝热，外圆半径分别为  $a$  和  $b$ 。如果边界  $y=0$  上温度恒为零度，写出该问题的边界条件。

8. 设扇形  $\Omega = \{(x,y) | 0 < y < x, x^2 + y^2 < 4\}$  金属薄板上下两面绝热，在边界  $y=0$  上温度恒为零度，写出板内温度分布满足的定解问题。

9. 求解以下各题（建立时系数展开问题）  
问题转化为关于  $u(p,\theta)$  的定解问题。  
系数，写出板内温度分布  $u(x,y)$  满足的定解问题，并利用极坐标变换将所得

(1) 在区间  $[0,5]$  上将函数  $f(x) = x$  放正交基  $\{\sin \frac{n\pi}{5} x | n \geq 1\}$  展开为傅立叶级数  $x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{5} x$ ，求出系数  $f_n, f_1$ 。

14. 总结一阶、二阶常系数常微分方程，欧拉方程定解问题的求解方法。

原理和  $G_1(x, t, \xi)$  求出 (2) 的解。

上面问题当  $u(x, 0) = \phi(x)$  时解的表达式。如果 (2) 的解为  $G_1(x, t, \xi)$ ，利用叠加原

如果对于任意的  $\xi \in (0, 1)$ , (1) 的解为  $G_1(x, t, \xi)$ ，利用叠加原理和  $G_1(x, t, \xi)$  求出

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = a_1 u_{xx}, \quad 0 > x > l, \quad t < 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t < 0 \\ u = a_1 u_{xx} + g(x - \xi), \quad 0 > x > l, \quad t < 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

13. 考虑如下热传导方程定解问题

出这些解。

维热传导方程  $u_t - a^2 u_{xx} = 0$  的解；如果还要满足边界条件  $u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0$ ，找  
思想主要是利用了这些函数的什么性质？根据你学过的一些常见函数，试找出一  
12. 数学物理方程中常用到四类函数：正弦，余弦，双曲正弦和余弦函数，

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = x, \quad u'(x, 0) = \sin x, \quad -\infty < x < \infty \\ u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t < 0 \\ \Phi(x - at), \quad \Phi(x + at) \end{array} \right.$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad x^2 + y^2 = 4, \\ \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 1 - 2xy + 3x^2y, \quad x^2 + y^2 < 4 \end{array} \right.$$

11. 利用叠加原理求解以下各定解问题

$$(1) \quad u_{xx} + u_{yy} = \cos x + x^3y, \quad (2) \quad u_{xx} + u_{yy} = 1 + 2x - 5x^2y, \quad \therefore u = \frac{1}{2} xy^2 - \frac{1}{12} x^2 y^2 + C$$

10. 我已知函数  $w(x, t)$ ，并作函数代换  $v = u - w$  将以下非齐次方程齐次化

$$\{\sin \frac{(1+2n)\pi}{2l} x | n \geq 0\} \text{ 展开为傅立叶级数 } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{2l} x, \text{ 求 } f_n.$$

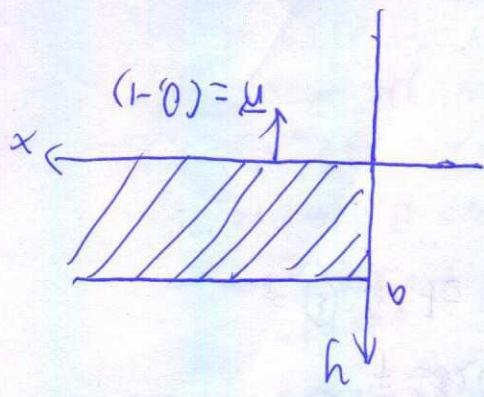
$$(4) \text{ 在区间 } [0, l] \text{ 上将函数 } f(x) = 3 \sin \frac{\pi}{l} x - 4 \sin \frac{5\pi}{l} x \text{ 按正交基 }$$

展开为傅立叶级数  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{l} x$ , 求出所有的系数  $f_n$ 。

$$(3) \text{ 在区间 } [0, l] \text{ 上将函数 } f(x) = \sin \frac{\pi}{l} x - 4 \sin \frac{5\pi}{l} x \text{ 按正交基 } \{\sin \frac{n\pi}{l} x | n \geq 1\}$$

傅立叶级数  $\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} (\phi_{n,1} \cos n\theta + \phi_{n,2} \sin n\theta)$ , 求出系数  $\phi_{0,1}, \phi_{1,2}, \phi_{2,1}$ 。

$$(2) \text{ 在区间 } [0, 2\pi] \text{ 上将函数 } \phi(\theta) = \theta \text{ 按正交基 } \{1, \cos n\theta, \sin n\theta | n \geq 1\} \text{ 展开为}$$



$$\begin{aligned} & \text{Given: } u(0,t) = 0, \quad u_y(x,0) = 0, \quad u(x,a) = 0 \\ & \text{Boundary conditions: } u(0,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,a) = 0 \\ & \text{Initial condition: } u(x,t) = \frac{u_0}{2} \sin t \\ & \text{Solving: } u(x,t) = \frac{u_0}{2} \sin t \\ & \text{At } y=a: \quad u(x,a) = 0 \\ & \text{At } x=a: \quad u(a,t) = 0 \\ & \text{At } y=0: \quad u(x,0) = 0 \\ & \text{At } x=0: \quad u(0,y) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u(x,t) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \\ & u(0,t) = a_0 + a_2 \sin t \\ & u(x,0) = a_0 + a_1 x \\ & u(x,a) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \\ & u(a,t) = a_0 + a_2 \sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u(x,t) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \\ & u(0,t) = a_0 + a_2 \sin t \\ & u(x,0) = a_0 + a_1 x \\ & u(x,a) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \\ & u(a,t) = a_0 + a_2 \sin t \\ & u(x,a) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \\ & u(x,t) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \end{aligned}$$

$$4. \text{ 热传导方程: } \frac{\partial u}{\partial n}(0,t) = \sin t$$

$$\begin{aligned} & u(x,t) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \\ & u(0,t) = a_0 + a_2 \sin t \\ & u(x,0) = a_0 + a_1 x \\ & u(x,a) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u(x,t) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \\ & u(0,t) = a_0 + a_2 \sin t \\ & u(x,0) = a_0 + a_1 x \\ & u(x,a) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u(x,t) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \\ & u(0,t) = a_0 + a_2 \sin t \\ & u(x,0) = a_0 + a_1 x \\ & u(x,a) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \end{aligned}$$

$$a_2 = 0 \quad \leftarrow$$

$$\begin{aligned} & u(x,t) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \\ & u(0,t) = a_0 + a_2 \sin t \\ & u(x,0) = a_0 + a_1 x \\ & u(x,a) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t \end{aligned}$$

$$u(x,t) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t$$

$$u(0,t) = a_0 + a_2 \sin t$$

$$u(x,0) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t$$

$$u(x,a) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t$$

$$u(x,t) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t$$

$$u(x,t) = a_0 + a_1 x + a_2 \sin t$$

$$n = 1 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \dots$$

(2)  $\Delta(\frac{1}{3}x^3) = 1$

(3)  $n = -\cos(x) + \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{12}x^4y^2$

(4)  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$   $\Delta(-\cos(x)) = \cos(x)$

(4)  $f_1 = 1, f_2 = -4, f_3 = 0$  (n/a)

~~$f_1 = 1, f_2 = -4, f_3 = 0$~~  (n/a)

(3)  $f(x,y) = \sin(10\theta)$   $\Rightarrow$   $f_{\theta\theta} = 100 \sin(10\theta)$   $\Rightarrow$   $\Delta f = 100 \sin(10\theta)$

$$f_{10,2} = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(10\theta) d\theta = -\frac{1}{2}$$

$$f_{20,1} = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(20\theta) d\theta = 0$$

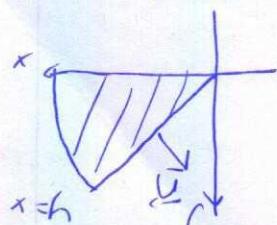
(1)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{10} \sin(10\theta) d\theta = 0$

(2)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{20} \cos(20\theta) d\theta = 0$

$$\left[ (x \cos \theta) \hat{i} + (y \sin \theta) \hat{i} + (y \cos \theta) \hat{j} + (-x \sin \theta) \hat{j} \right] n = \frac{0}{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = 0$$

$$n = \begin{cases} \cos \theta & \hat{i} \\ \sin \theta & \hat{j} \end{cases} [n_x, n_y] = \frac{n}{n}$$

$$0 = \frac{n}{n} \Rightarrow n = 1$$



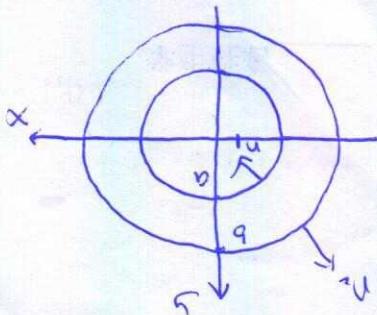
$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 0 < d \leq 1$$

$$y = 0 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$z = \{ (x,y) \mid 0 < x, x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$



$$0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r, \theta) - f(0, \theta)}{r} = f_\theta(0, \theta)$$

$$0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r, \theta) - f(0, \theta)}{r} = f_r(0, \theta)$$

$$f(0, \theta) = 0$$