《应用最优控制》试题

1996.6.14

一、基本概念(20 分)

1. 写出泛函、泛函极值的定义.

2. 写出 $\min\limits_{y} \mathbf{J}(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\,dx$（$x_1$ 固定)极值存在的必要条件，这些条件分别称作什么？

3. 写出线性二次型调节器(LQR)问题的描述与公式，解释其物理概念及目标函数中各项的含义。

4. 叙述 Bellman 最优性原理。

5. 简答什么是增益裕量、相位裕量？最优调节器的增益裕量和相位裕量是多少？

二、计算题

1. (15 分)已知线性系统的状态方程 $\dot{x}=Ax+Bu$，求 $u^*(t)$使性能指标

$$\min_{u} J=\frac{1}{2}\int_0^2 \|u(t)\|^2 dt$$ 最小。其中，$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$，

$u=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$，且给定 $x(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$，$x_1(2)=0$。

2. (15 分)已知系统的状态方程、初始条件和终端函数分别为:

$$\dot{x}_1=-x_1+x_2, \qquad x_1(0)=0$$

$$\dot{x}_2=u, \qquad x_2(0)=0$$

$$x_1^2(t_f)+x_2^2(t_f)=t_f^2+1$$

目标为: $\min\limits_{u} J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2 dt$. 试列出两点边值问题，其中末端时刻 t_f 是可变的.

三、(15 分)应用动态规划解离散 LQR 问题:

$$\min_{u(k)} J=\frac{1}{2}x^T(N)Sx(N)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left[x^T(k)Q(k)x(k)+u^T(k)R(k)u(k)\right]$$

$$s.t.\quad x(k+1)=\Phi(k)x(k)+\Gamma(k)u(k), \qquad x(0)=x_0$$

$$k=0,1,2,\cdots,N-1$$

式中，Q 和 S 为半正定，R 为正定.

四、(15 分)求解无限时间状态调节器问题:

$$\min_{u} J = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\left(x^{T}Qx + u^{2}\right)dt$$

s.t $\dot{x} = Ax + Bu$, $x_1(0)=1$, $x_2(0)=0$

其中, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\phi \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\mu \geq 0$.

五、(20 分)已知系统状态方程为:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad x_1(0) = x_{10} \qquad x_1(t_f) = 0$$

$$\dot{x}_2 = u, \qquad x_2(0) = x_{20}. \qquad x_2(t_f) = 0$$

$$|u(t)| \leq 1$$

目标函数为: $\min_{u} J = \int_{0}^{t_f}\left(\rho + |u|\right)dt$, 其中 t_f 未指定, $\rho>0$.

1) 证明最优控制函数 u*总共存在六种可能的最优控制序列:

{+1}, {0,+1}, {-1,0,+1}, {-1}, {0,-1}, {+1,0,-1}

2) 在相平面中求出切换线方程, 并画图说明切换规律.