应用最优控制

1. (15 分) 试求最优控制和最优状态轨线，将系统 $\dot{x}_1 = x_2$， $\dot{x}_2 = u$，从点 $x_1(0)=0$，$x_2(0)=0$ 转移到直线 $2x_1(1)+x_2(1)=2$，且使 $J=\frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt$ 取极小。

2. (15 分) $\min_u \mathbf{J} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(4x_1^2 + u^2(t)\right)dt$

s.t. $\dot{x}_1 = x_2$ $\quad x_1(0)=x_{10}$

$\dot{x}_2 = u$ $\quad x_2(0)=x_{20}$

求最优状态反馈。

3. (20 分)叙述 Bellman 最优性原理。应用此原理求解如下离散系统最优控制问题：

$$\min_u \mathbf{J} = \sum_{k=0}^{2}\left[x^2(k)+u^2(k)\right]$$

s.t. $x(k+1)=2x(k)+u(k)$ $\quad x(0)=1$

4. (20 分)已知线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0,\ \mathbf{u}(t_0)=\mathbf{u}_0$$

二次型目标泛函：

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbf{J} = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}+\dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\dot{\mathbf{u}}\right)dt$$

求解此最优调节器问题。

5. (20 分) 泛函求极值

$$\min_y \mathbf{J} = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$$

式中，x_0 固定，$y(x_0)=y_0$ 已知，x_1 可变，$y(x_1)$ 落在函数 $\varphi(x)$ 上。请推导出极值必要条件。

6. (10 分) 求解如下系统的最小时间控制问题

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = u,\ \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}(t_f)=0,\ |u|\le 1.$$

*考查的同学，5、6 题选做一题