西安交通大学研究生公共课最优控制 2003 年试题

考试时间：2003 年 7 月 1 日 2:30-5:00
考试地点：中 2-3221

一、(20 分)

泛函 $J[y(x)]$的变分可定义为 $\delta J = \left.\dfrac{dJ\left[y(x)+\beta\delta y(x)\right]}{d\beta}\right|_{\beta=0}$。

1．请以这种定义，求出 $J=\int_0^1 y^3(x)dx$ 的变分。

2．请以这种定义，证明若可微泛函 $J[y(x)]$在 $y_0(x)$上达到极值，则在 $y=y_0(x)$上有

$$\delta J = 0$$

二、(15 分)

已知一阶系统 $\dot{x}=u$，求 $u(t)$使系统由 $x(0)=1$ 转移到 $x(t_f)=0$，t_f未定，且使目标泛函

$$J = t_f + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2 dt$$

为最小，并求出最优轨线 $x(t)$和 t_f。

三、(15 分)

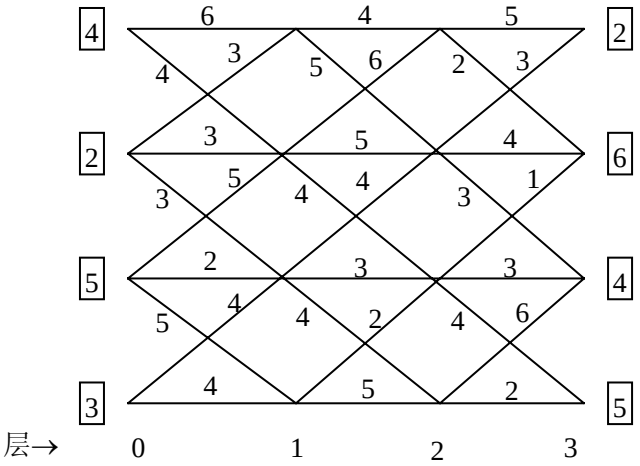
已知被控系统 $\dot{x}_1 = x_2$， $\dot{x}_2 = u$ 和目标集

$$M = \{(x_1, x_2): x_1 = 0, -\infty < x_2 < +\infty\}$$

试借助相平面分析满足约束条件$|u(t)|\le 1$ 的最小时间控制率 $u(x)$。并求最短时间。

四、（15 分）

求出图中从第 0 层到达第 3 层的最小费用，并找出最小费用路径，其中各起点、终点的费用以及每段路径的费用如图所示。注意只允许向右侧移动。最小费用路径可能有多条，如是则找出每一条。



五、（18 分）

给定一阶系统 $\dot{x} = x + u$，$x(t_0)=x_0$，性能指标为 $J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^2 + \rho u^2\right)dt$，试求$\rho$满足什么条件时最优反馈控制存在，并求 $u^*(x)$及 $J^*[x(t_0),t_0]$。

六、（17 分）

The position, x_1, and speed, x_2, of a particle moving on the line obey

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u,$$

where u is an applied control force. Initially the particle is at rest and $x_1(0) = X$, where $X > 0$. It is desired to bring the particle to rest at the origin while minimizing the cost

$$J = \int_0^T \tfrac{1}{2}\left(k^2 + u^2\right) dt.$$

Here k is a constant, T is the time that the particle reaches the origin and T is unconstrained.

Use the maximum principle to show that under optimal control the particle reaches the origin at time $T = (6X/k)^{1/2}$ and that u varies linearly with time from $-k$ to k.

*本题中“Use the maximum principle to show that…”是指应用广义的极大值原理来证明。这里广义最大值原理包括书中描述的控制有界时的情形，也包括第二章所讨论的控制可以任意取的情形，在许多参考书中将这两种情形都归入极大值原理。

考查的同学第五、六两题可选做一题。