西安交通大学研究生公共课最优控制 2006 试题

2006/07/12

一、（20 分）简答题

1） 什么是泛函？什么是泛函极值？

2） 对于线性连续系统的二次型目标泛函：

$$\min_u J=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t_f)S\boldsymbol{x}(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{x}^T(t)Q(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)R(t)\boldsymbol{u}(t)]dt$$

$$\text{s.t.}\quad \dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+B(t)\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

请解释其中各部分的物理意义，并解释此 LQR 问题所表示的物理概念。

3） 预测控制算法的三个基本点（或三个主要步骤）是什么？

4） 请简述你所在小组课程 project 的主要工作结果以及你个人的主要工作。

二、（15 分）

设系统的状态方程为 $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2, & x_1(0)=\xi_1\\ \dot{x}_2=u, & x_2(0)=\xi_2\end{cases}$，转移到 $x_1(T)=0$，$x_2(T)=0$，目标为 $\min_u J=\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$，其中 T 是给定的。求最优控制 $\hat{u}(t)$。

三、（20 分）

端点可变情形下的泛函极值问题：

$$\min_y J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$$

其中，x_0 固定，x_1 可变，$y_0=y(x_0)$固定，$y_1=y(x_1)$可变。请推导其泛函极值存在的必要条件：

$$\left.\begin{array}{ll} F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 & \text{（Euler 方程）}\\ \left.\begin{array}{l}(F-y'F_{y'})\big|_{x_1}\delta x_1=0\\ F_{y'}\big|_{x_1}\delta y_1=0\end{array}\right\} & \text{（横截条件）}\end{array}\right\}$$

四、（15 分）

给定如下的被控系统：$\dot{x} = Ax + Bu$，其中，$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

求最优反馈控制律，使如下性能指标最小化：

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(x^T \cdot x + u^2\right)dt$$

五、（15 分）

设离散系统方程 $x(k+1) = x(k) + u(k)$，性能指标

$$J = \sum_{k=0}^{3}\left[x^3(k) + u(k)x(k) + u^2(k)x(k)\right]$$

式中 $u(k)$限取+1 或-1，且 x(k)≥0。要求末端状态为 $x(4)=2$。试求使性能指标最小化的最优控制 $u^*(k)$和最优轨线 $x^*(k)$，$k = 0,1,2,3$。

六、（15 分）

Company 1 wishes to steal customers from company 2 and maximize the profit it obtains over an interval $[0, T]$. Denoting by $x_i(t)$ the number of customers of company i, and by $u(t)$ the advertising effort of company 1, this the leads to a problem

$$\text{minimize} \int_0^T \left[x_2(t) + 3u(t)\right] dt\,,$$

where $\dot{x}_1 = ux_2$, $\dot{x}_2 = -ux_2$, and $u(t)$ is constrained to the interval $[0, 1]$. Assuming $x_2(0) > 3/T$, use Pontryagin's maximum principle to show that the optimal advertising policy is bang-bang, and that there is just one change in advertising effort, at a time t^*, where

$$3\,e^{t^*} = x_2(0)(T - t^*)\,.$$

*** 考察的同学五、六题可选做一题。**