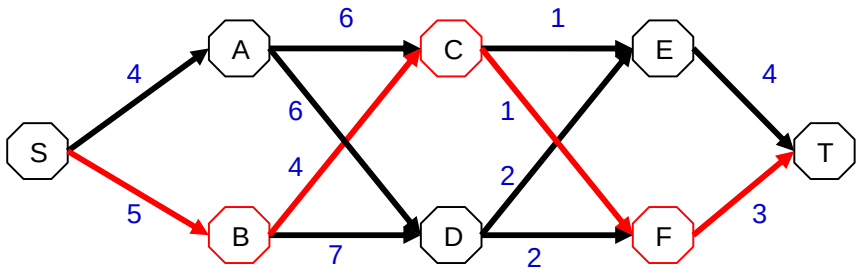
西安交通大学研究生公共课最优控制 2008 试题

2008/07/11

一、（15 分）简答题

1） 经过简单计算可知下图的最优路径为 S→B→C→F→T。结合这一示例试解释动态规划的最优性原理及其特点。



2） 请举例说明预测控制的基本原理（如预测控制方式下的五年规划）。

3） 增强学习是为解决什么问题而提出的？从下面 Q 学习算法的 Q 函数递归关系式中，可以看出它与动态规划有什么联系？

$$\hat{Q}(s,a) \equiv r(s,a) + \gamma \max_{a'} \hat{Q}(\delta(s,a),a')$$

二、（10 分）

考虑如下泛函求极值问题

$$\min_u J = t_f + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t)+u(t))dt$$
$$s.t. \quad \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)), \quad x(t_0) = a$$

其中，a 为给定常数。证明其 Hamilton 函数在最优轨线上值为-1。

三、（30 分）计算题

1） 泛函求极值

$$\min_u J = t_f + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2(t)dt$$
$$s.t. \quad \dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 1, \quad x(t_f) = 0$$

求最优控制、最优轨线、终端时刻。其中，终端时刻 t_f 不指定。

2）试用动态规划方法求解如下的离散系统泛函求极值问题

$$\min_{u(k)} J = x^2(3) + \sum_{k=0}^{2}\left[x^2(k) + u^2(k)\right]$$
$$s.t. \quad x(k+1) = 2x(k) + u(k), \quad x(0) = 1$$

四、（15 分）试设计能限制输入信号变化速率的反馈控制器

$$\min_{u} J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) + \dot{u}^T(t)N\dot{u}(t)\right)dt$$
$$s.t. \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

式中，R 及 N 正定，Q 半正定。

五、（15 分）

设宇宙飞船登月舱的质量为 $m(t)$，高度为 $h(t)$，垂直速度为 $v(t)$，发动机推力为 $u(t)$，月球表面重力加速度为常数 g，不含燃料时登月舱质量为 M，初始燃料的总质量为 $F(0)$。已知登月舱的状态方程为

$$\dot{h}(t) = v(t), \qquad h(0) = h_0$$
$$\dot{v}(t) = \frac{u(t)}{m(t)} - g, \qquad v(0) = v_0$$
$$\dot{m}(t) = -ku(t), \qquad m(0) = M + F(0)$$

要求登月舱在月球表面实现软着陆，即 $h(t_f)=0$，$v(t_f)=0$。发动机推力 $u(t)$满足 $0 \le u(t) \le \alpha$。试求使登月舱燃料消耗最小的最优发动机推力，即

$$\min_{u} J = -m(t_f)$$

六、（15 分）

在实际应用中常常碰到可取曲线 $y(x)$是分段光滑的，即 $y(x)$在有限个点上连续而不可微，此种连续而不可微的点称为角点。例如，当潜艇从深水区向空中发射导弹时，由于水和空气对导弹的阻力系数不同，导弹的运行状态将在水和空气的界面处出现角点。

考虑如下泛函求极值问题

$$\min_{y} J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$$

假定分段光滑的可取曲线 $y(x)$的始端和终端都是固定的，并只在 $x_c \in (x_0, x_1)$处有一个角点。试求极值曲线在角点处应满足的角点条件。（提示以 x_c 为分界点将原泛函分为两个部分。）

*** 考察的同学五、六题可选做一题。**