一级和二级倒立摆控制

第四小组：　　翟茜　张璞　肖煦媛　宋素华

1.倒立摆系统简介

倒立摆系统是一个复杂的控制系统，具有非线性、强耦合、多变量、不稳定等特性。 在控制过程中，它能有效的反映控制中的许多关键问题，如镇定问题，非线性问题，鲁棒性问题，随动问题及跟踪问题恩等，都可以以倒立摆为对象加以研究。除此之外，它和火箭的飞行及机器人关节运动有很多相似之处，其原理可用于控制火箭稳定发射。倒立摆的研究对于火箭飞行控制和机器人控制等现代高科技的研究具有重要的实践意义。因此倒立摆的控制成为控制理论中经久不衰的研究课题。在最近的 25 年里，许多经典和现代控制理论被用于倒立摆的稳定控制，例如 PID 控制、自适应控制、状态反馈控制、智能控制、模糊控制、人工神经元控制。

从形式上可以将倒立摆系统分为以下几种：

1）直线倒立摆系统：或称为“小车-倒立摆系统”,是由可以沿直线导轨运动的小车及一端定于小车之上的匀质长杆组成的系统。

2）环形倒立摆系统：可以将它看成是将小车的直线导轨弯曲而成的系统

3）平面倒立摆系统：匀质摆杆的底端可以在平面内自由运动,并且摆杆可以沿平面内的任一轴线转动。

4）柔性连接倒立摆系统：在原倒立摆系统的基础之上引入了新的自由振荡环节:自由弹簧系统。

5）柔性倒立摆系统：它不仅仅是将匀质刚体换成了柔性摆杆,而是其本身已经变为非线性分布参数系统。

6）直线柔性连接两级倒立摆：所谓直线柔性连接两级倒立摆系统,就是在直线刚性两级倒立摆的基础上,加入自由弹簧系统:电机连接一主动小车,而主动小车通过一根弹簧作用于从动小车,对固定于从动小车上的两级倒立摆实施控制。

2.倒立摆数学模型分析

2.1 一级倒立摆数学模型的分析及建立

一级倒立摆系统如图 1 所示，即一个带轮的小车，顶端铰链系一刚性倒立摆,小车可沿一笔直的有界轨道向左或向右运动，同时摆可在垂直平面内自由运动。

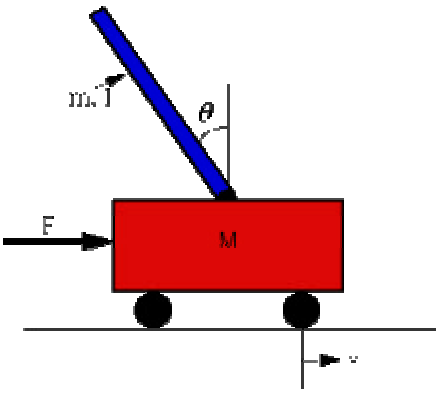


图 1 一级倒立摆系统

为便于分析我们作如下假设：摆杆及小车都是刚体；库伦摩擦、动摩擦及其他摩擦足够小，在建模过程中忽略不计。根据牛顿力学、刚体动力学理论对小车及摆杆进行受力分析，如下图所示：

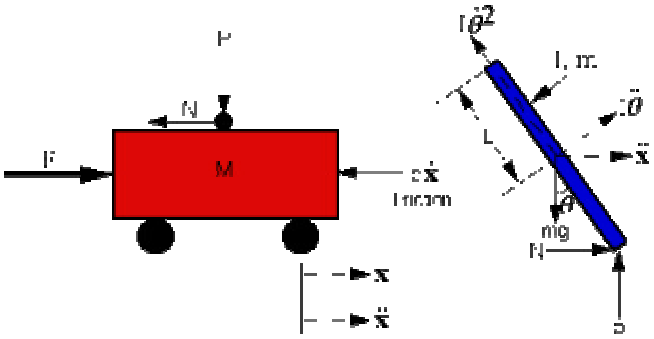


图 2 一级倒立摆受力分析图

由动力学理论可推出一级倒立摆的运动方程

$$I\frac{d^2q}{dt^2} = F_P l\sin q - F_N l\cos q$$

$$F_P - mg = m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos q)$$

$$F_N = m\frac{d^2}{dt^2}(x + l\sin q)$$

$$F - F_N = m'\frac{d^2x}{dt^2}$$

m'为小车质量，m为倒立摆质量，

l为倒立摆质心到转轴距离，g为重力加速度，

q为摆杆与竖直方向的夹角，

F为控制器输出的控制力。

在任一时刻，该系统的状态都由4个变量描述小车位置 X ,小车平移速度 $\dot{X}$ ，摆杆与竖直方向的夹角 q 及角加速度 $\dot{q}$

令 $X=\begin{bmatrix} q & \dot{q} & x & \dot{x} \end{bmatrix}^T$，$Y=\begin{bmatrix} q & x \end{bmatrix}^T$

考虑倒立状态：q 《1

则在倒立状态附近有：$\sin q \approx q, \cos q \approx 1.$

故可得：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

其中：

$$a=\frac{ml(m+m')g}{I(m+m')+mm'l^2} \qquad b=-\frac{m^2 l^2 g}{I(m+m')+mm'l^2}$$

$$c=\frac{ml}{I(m+m')+mm'l^2} \qquad d=\frac{I+ml^2}{I(m+m')+mm'l^2}$$

2.2 二阶倒立摆模型的分析及建立

二级倒立摆系统是一个复杂的、非线性的、不稳定的高阶系统。我们主要研究的是二阶倒立摆系统，利用二阶倒立摆的控制对象设计外控制方案。研究控制对象的稳定性问题，也就是重新设计外控制器，即运用现代控制理论并以 MATLAB 语言为辅助设计工具，在计算机上进行二级倒立摆的外控制器的分析与设计工作，并利用 MATLAB 进行动画仿真。

首先，我们建立二级倒立摆的模型。二级倒立摆系统如图 3 所示，它有以下部分组成：一段光滑导轨，一个可以在导轨上来回移动的小车，下摆杆 1 铰接在小车上，上摆杆 2 以同样的方式与下摆杆 1 相连，它们的铰接方式决定了它们在竖直平面运动。

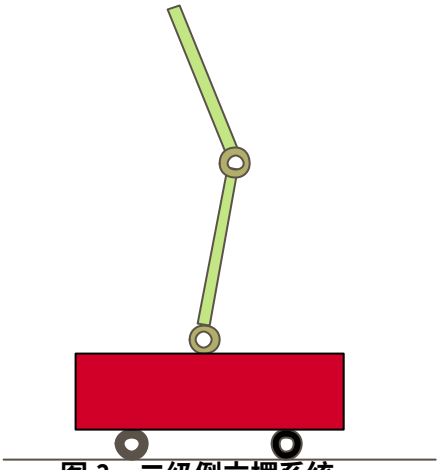


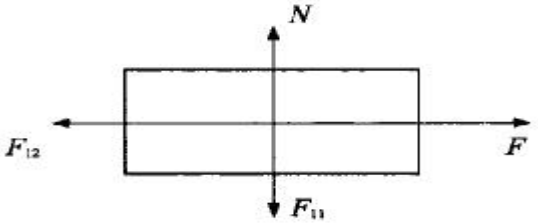
图 3　二级倒立摆系统

为便于分析，我们做出如下假设：每一级摆杆都是刚体，实验过程中的库仑摩擦、动摩擦等所有摩擦力足够小，在建模过程中可忽略不计。

利用运动合成原理：绝对运动=相对运动＋牵连运动，首先对系统进行运动学分析，由于将动坐标系建在摆杆 1、摆杆 2 的质心处便于理解，分析过程以此为基础。利用牛顿力学对系统进行动力学分析，由此得出二级倒立摆数学模型。

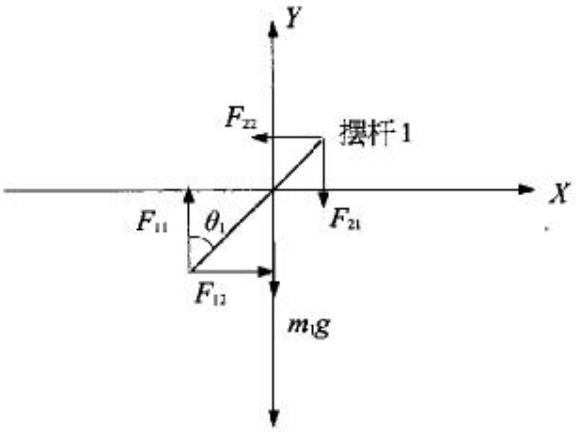
利用力学中的隔离法，将二级倒立摆系统分为小车、摆杆 1、摆杆 2 三部分.

首先，对小车进行分析， 将摆杆 1 对小车的作用力分解为竖直方向的分力 F_{11}；和水平方向的分力 F_{12}，如下图所示：



根据牛顿第二定律可以得到水平方向的方程为：$F - F_{12} = m_0 \ddot{x}$

下面对下摆（即摆杆 1）进行受力分析：



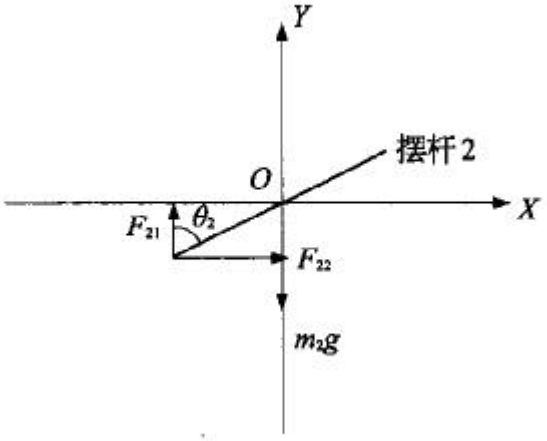
根据牛顿第二定律和动量矩定律可以得到如下方程：

$$F_{12} - F_{22} = m_1\ddot{x} + m_1 l_1 \ddot{q}_1 \cos q_1 - m_1 l_1 \dot{q}_1^{\,2} \sin q_1$$

$$m_1 g - F_{11} + F_{21} = m_1 l_1 \ddot{q}_1 \sin q_1 + m_1 l_1 \dot{q}_1^{\,2} \cos q_1$$

$$\frac{d\left(J_1 \dot{q}_1\right)}{dt} = F_{11} l_1 \sin q_1 + F_{21}\left(L_1 - l_1\right)\sin q_1 - F_{12} l_1 \cos q_1 - F_{22}\left(L_1 - l_1\right)\cos q_1$$

最后对上摆（即摆杆 2）进行受力分析：



同样根据牛顿第二定律和动量矩定律可以得到下列方程：

$$F_{22} = m_2\ddot{x} + m_2L_1\ddot{q}_1\cos q_1 + m_2l_2\ddot{q}_2\cos q_2 - m_2L_1\dot{q}_1\cos q_1 - m_2l_2\dot{q}_2\cos q_2$$

$$m_2g - F_{21} = m_2L_1\ddot{q}_1\sin q_1 + m_2l_2\ddot{q}_2\sin q_2 + m_2L_1\dot{q}_1^2\sin q_1 + m_2l_2\dot{q}_2^2\sin q_2$$

$$\frac{d\left(J_2\dot{q}_2\right)}{dt} = F_{21}l_2\sin q_2 - F_{22}l_2\cos q_2$$

在研究过程中，我们认为上摆与下摆的摆动都很小，可以进行线性化近似：

$q_1 \approx q_2 \approx 0$；$\cos q_1 \approx \cos q_2 \approx 1$；$\sin q_1 \approx q_1$;$\sin q_2 \approx q_2$

经过整理并化简，我们可以得到以下微分方程：

$$(m_0 + m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1l_1 + m_2L_1)\ddot{q}_1 + m_2l_2\ddot{q}_2 = F$$

$$(m_1l_1 + m_2L_1)\ddot{x} + (J_1 + m_1l_1^2 + m_2L_1^2)\ddot{q}_1 + m_2L_1l_1\ddot{q}_2 = (m_1l_1 + m_2L_1)gq_1$$

$$m_2l_2\ddot{x} + m_2L_1l_1\ddot{q}_2 + (J_2 + m_2l_2^2)\ddot{q}_2 = m_2gl_2q_2$$

将微分方程写成矩阵形式，同时为了尽量的接近实际情况，我们考虑摩擦。最后得到矩阵方程如下：

$$M*\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix} = F*\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{bmatrix} + N*\begin{bmatrix}x\\ q_1\\ q_2\end{bmatrix} + G*u$$

其中：

$$M = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & m_1*l_1 & m_2*l_2 \\ m_1*l_1 + m_2*L_1 & j_1 + m_1*l_2^2 + m_2*L_1^2 & m_2*l_1*L_1 \\ m_2*l_2 & m_2*L_1*l_2 & j_2 + m_2*l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix}-f_0 & 0 & 0\\ 0 & -(f_1+f_2) & f_2\\ 0 & f_2 & -f_2\end{bmatrix} \qquad G=\begin{bmatrix}G_0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

这里f_0是小车系统的摩擦系数；f_1是下摆转轴摩擦阻力矩系数；f_2是上摆转轴摩擦阻力矩系数；G_0是输入增益。

当我们选取 x、q_1、q_2-q_1、$\dot{x}$、$\dot{q}_1$、$\dot{q}_2-\dot{q}_1$ 作为状态变量，可以得出如下的状态空间方程：

$$\dot{x}=A*x+B*u$$

$$y=c*x$$

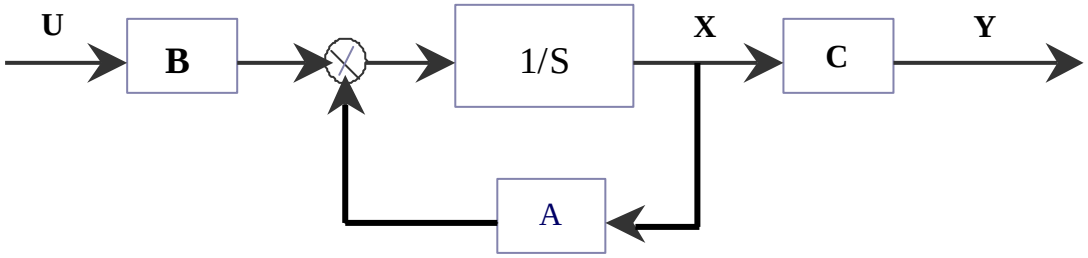
我们从参考资料选择了系统参数：小车系统的等效质量 1.32822 ；下摆质量 0.22 ；上摆质量 0.187 ；下摆圆心对转轴处转动惯量 0.0049626 ；上摆圆心对转轴处转动惯量 0.0048235 ；下摆圆心至转轴之间的距离 0.304 ：上摆圆心至转轴之间的距离 0226 ；上、下摆转轴间的距离 049 ；小车系统的摩擦系数 22.947 ；下摆转轴处的摩擦阻力矩系数 0.007056 kg·m／s；上摆转轴处的摩擦阻力矩系数 0.002646kg·m／s；输入增益 11.88。计算出的 A，B，C 如下所示：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2.5716 & 0.1642 & -16.6679 & 0.0124 & -0.0057\\ 0 & 29.9495 & -15.1946 & 40.3173 & -0.2048 & 0.1737\\ 0 & -36.6925 & 65.4411 & -49.3946 & 0.4634 & -0.5910\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 8.6478 & -20.9178 & 25.6274\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得到如下的系统框图：



根据所选择的参数，用 MATLAB 语言编写的程序判别本系统可控性及可观性、计算特征值。计算出该系统的特征值为：[0，-17.2128，8.2958，3.9402，

-3.7809，-8.7060]。有三个特征值分布在S 平面右半部,因此该对象系统是不稳定的。并且此系统能控能观。为了使其稳定,必须加入控制器,重新配置系统的极点以满足要求。结合《最优控制》课程的学习，选用线性二次型性能指标设计法(LQR 法）进行控制器设计。

3．线性二次型最优控制

3.1 控制器的设计

对于线性二次型，其控制目标为：

$J=\frac{1}{2}X^T(t_f)SX^T(t_f)+\frac{1}{2}\int_0^{tf}[X^T(t)Q(t)X^T(t)+u^T(t)R(t)u(t)]dt$ 最小。

其中 Q、R 分别是对状态变量和输入向量的加权矩阵，t_f 为中止时间。对此目标函数，其取最小值的解即为 Riccati 方程 $PA+A^TP-PBR^{-1}B^TP+Q=0$ 的解。

二级倒立摆的控制目的是使二级倒立摆在不稳定的平衡点保持稳定的平衡，能经受一定的外加干扰。对于系统是在初始条件 $X(0)=0$ 和所有状态可测（或可重构）下,要求从状态变量X 中产生控制量u =- KX ，令系统过渡到最终状态X（∞）= 0 ,并使二次性能指标

$$J=\int_0^{\infty}(X^TQX+u^TRu)dt$$

取最小的控制规律为 $u=-KX$ ， $K=-R^{-1}BP$

其中 P 为满足 Riccati 方程的唯一正定对称解。且要求系统完全可控和完全可观。Q 为状态变量加权阵，代表对各状态变量暂态误差的重视程度。取 6 × 6 维半正定的状态加权矩阵,通常取对角阵,对角线上的元素分别表示对相应状态向量 X 中各分量的重视程度。 R 为输入加权阵,为一维正定的控制加权阵,表示对消耗控制能量的重视程度。

Q 、R值可通过仿真实验得到后，再经过反复模拟实验得到。 理论上，不论怎样选Q 、R ，负反馈若稳定，则倒立摆就能倒立。但实际上，因为滑轨的长度有限、电机的功率也有限,而且还存在非线性问题等,能使倒立摆倒立的Q 、R 的范围是被限定的。

求解 Riccati 方程求出矩阵 P， 从而求得最优反馈增益阵 K，最后验证系统的动态性能是否满足要求。若不满足要求则重新假设加权阵 Q 和 R ,重复上述计算直到性能满足要求为止。

3.2 控制方法的实现

控制量 $u=-KX$ 利用 Matlab 的 lqr 函数可以很方便地算出控制矩阵 K。lqr 函数有两个数矩阵可选：R 和 Q ,它们用来平衡系统对输入量和状态量的重

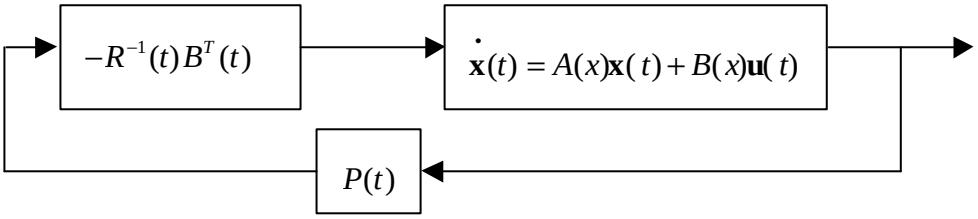
视程度。

[K,S,e]=lqr(A,B,Q,R)计算连续时间系统的最优反馈增益矩阵 K，使系统 $\dot{x} = Ax + Bx$。

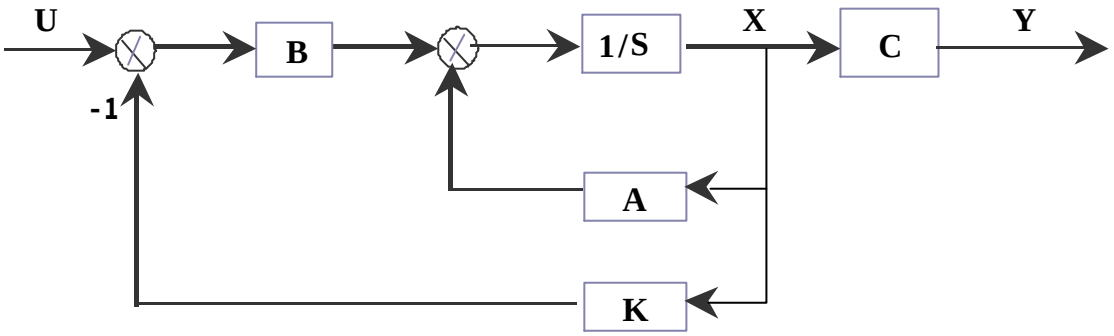
采用反馈律：$u = -Kx$，使性能指标函数 $J = \int_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru)dt$ 最小。同时返回代数Raccati方程 $A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0$ 的解S，及闭环系统的特征值e。这里 $K = R^{-1}B^T S$。

由最优反馈控制理论知：设计的结果是一种反馈控制。在取得 $\mathbf{x}(t)$ 后，经过两个线性变换，并且倒相，即可形成最优控制 $\mathbf{u}(t)$。

根据 $\mathbf{u}(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)\mathbf{x}(t)$ 可画出最优反馈控制的结构和反馈系统框图如下：



. (a) 最优反馈控制的结构



(b)反馈系统框图

图 4

4.MATLAB 的 Simulink 建模

4.1 Simulink 建模

根据上文对二级倒立摆模型的分析，结合提出的二次型目标函数，建立 simulink 模型如图 5 所示。

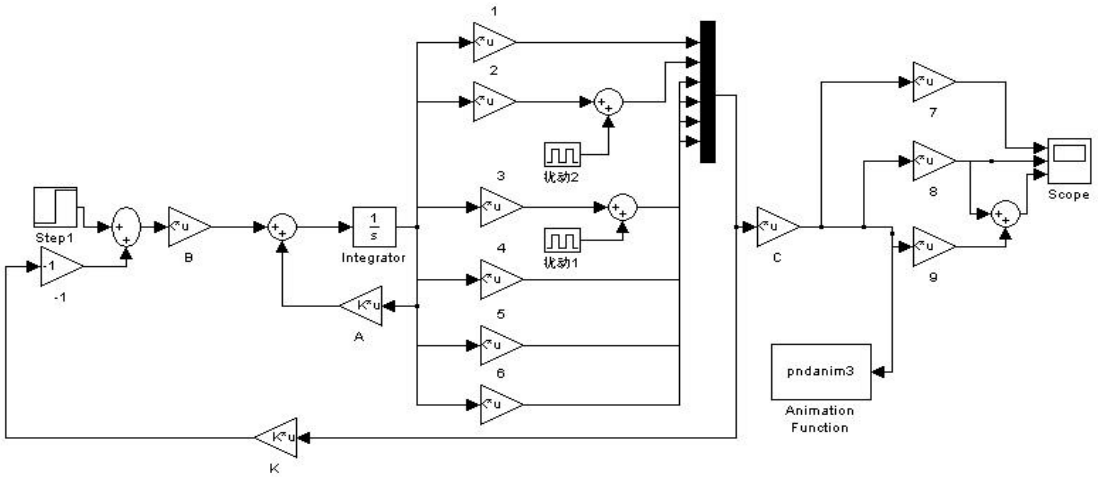


图 5　二级倒立摆的 Simulink 模型

图中 5 个子模块分别实现描述小车加速度、上摆角加速度、下摆角加速度的三个状态方程。图中下方的 K 阵是 Kalman 增益 $K(t)=R^{-1}(t)B^{T}(t)P(t)$，其中 $P(t)$ 是 Riccati 方程的解。

由命令 [K,P,E]=lqr(A,B,Q,R) 即可求得状态反馈矩阵 K。

取 $Q=\begin{bmatrix} 900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　　$R=1$

计算得 K=[30.0000　115.1262　153.0868　24.8609　38.1189　24.6673]，系统特征值为：-39.0657，-7.1413 + 5.2559i，-7.1413 - 5.2559i，-5.8146，-4.5050，-3.5829。可见，LQR 最优状态反馈之后，控制系统的六个特征值均分布在 S 平面左半部，即得出闭环稳定的系统。

4.2 SIMULINK 环境中实现动画

创建基于 S-函数调用 MATLAB 语言中的 M 文件生成 SIMULINK 环境中的动画模块，利用该模块对倒立摆控制系统的响应进行实时模拟，来证实控制方法的有

效性。

SIMULINK 环境中实现动画的方法是擦图方式，在保持画面背景不变，只更新变化部分。实现步骤：(1) 新位置上显示活动的对象。(2) 擦出原有位置上的图像。快速重复第 1 步与第 2 步便可以得到动画效果。MATLAB 提供了刷新屏幕命令 drawnow。

当 MATLAB 完成对 SIMULINK 环境的初始化时，并在工作存储区建立里一个系统函数 S-函数，该函数提供了 SIMULINK 环境所需要的一切数据。S-函数是基于 MATLAB 环境中的可执行文件。动画细节的完成是建立在调用作图语句的基础上的，S-函数的作用是把系统的响应结果与动画演示结合起来。报告后附有实现动画的动画模块 S-函数的源程序。

5.系统模型的仿真结果及分析

5.1.系统的抗干扰能力分析

为了检验所建立的二阶倒立摆系统模型的健壮性，考察状态变量的扰动对系统响应的影响。所加的扰动为周期 5 秒的脉冲，每个脉冲持续时间为 0.25 秒幅值 6 度。图 6 和图 7 分别仿真了当系统处于稳定状态时给上摆和下摆脉冲扰动时的响应。图 6 为扰动加在上摆角度 q_1 上时系统的响应，图 7 为相同的扰动加在上摆角度 q_2 上时系统的响应。

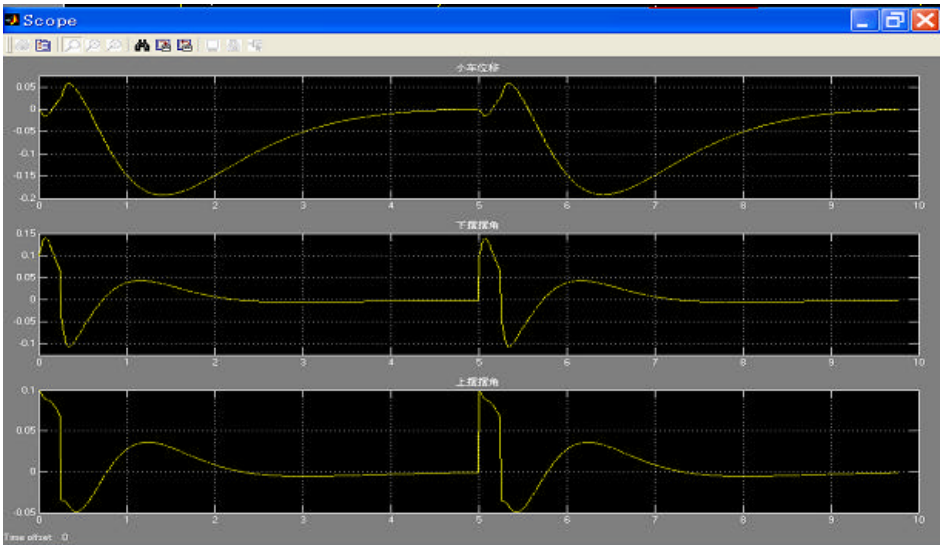


图 6　q_1 上加扰动时的系统响应

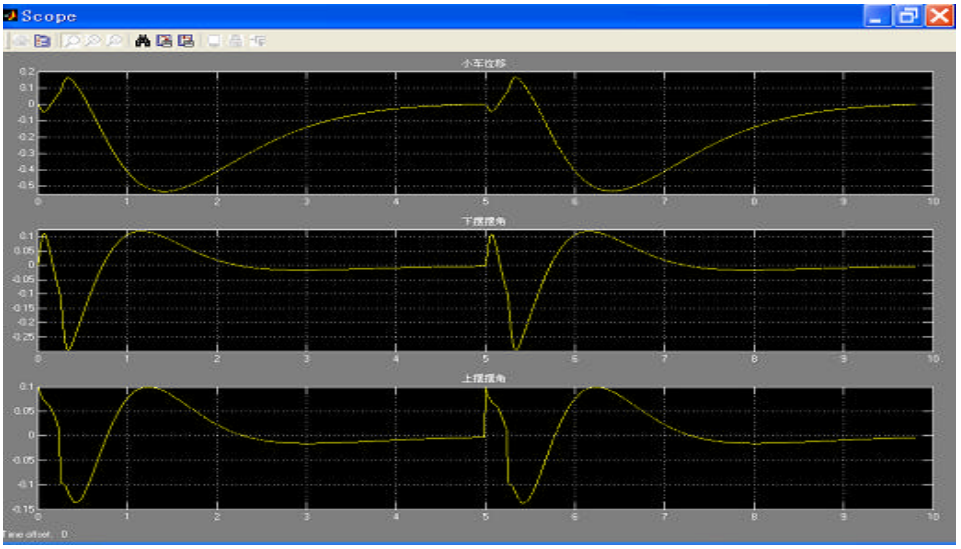


图 7　q_2 上加扰动时的系统响应

从图中可以看出，经过一段时间调节系统总能进入稳定状态。也证明了所建立的系统的健壮性，有较强的抗干扰能力。

5.2 改变 Q、R 对系统响应的影响

给小车加输入阶跃信号，阶跃开始的时间是 1s，阶跃值为 1。改变 Q、R，利用 Simulink 的仿真结果来得到系统响应的影响。

当选用的 $Q=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&900&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$；R=1 时，Simulink 的仿真结果如下图所示：

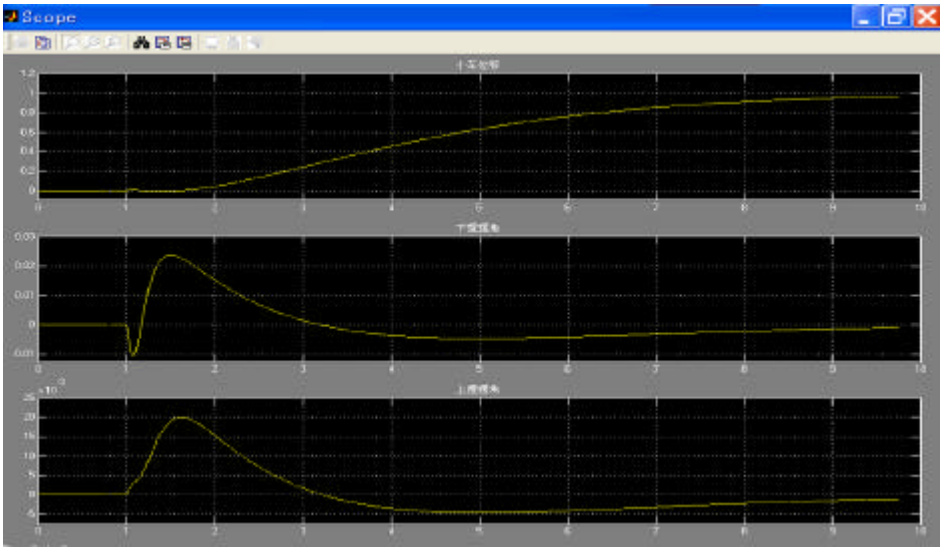


图 8　R=1

从图中可得小车位移的调整时间为 10s 幅值为 1，q_1 的调整时间为 9s 幅值为 0.025，q_2 的调整时间为 9.5s 幅值为 0.02。

当选用的 $Q=\begin{bmatrix} 900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；R=1 时，Simulink 的仿真结果如下图所示：

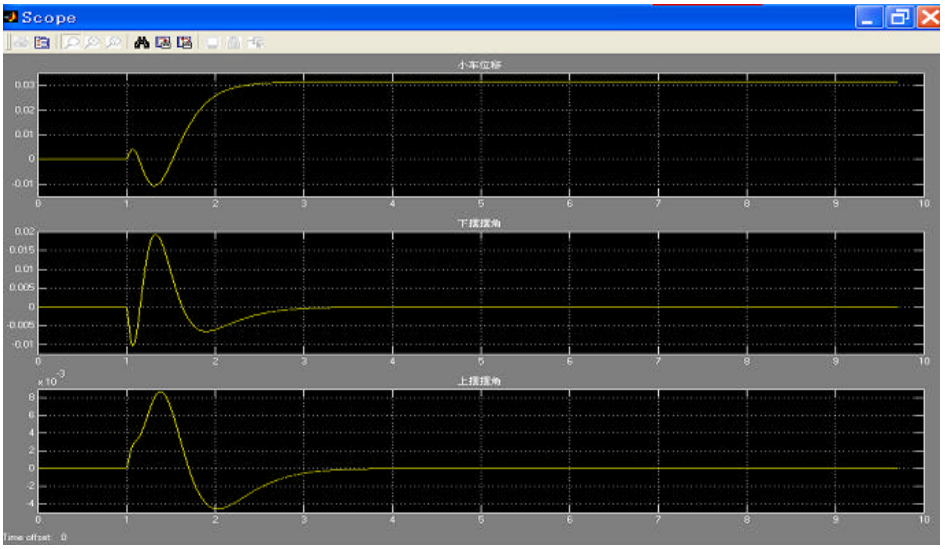


图 9　R=1

从图中可得小车位移的调整时间为 2.5s 幅值为 0.03，q_1 的调整时间为 3s 幅值为 0.02，q_2 的调整时间为 3s 幅值为 0.008。

当选用的 $Q=\begin{bmatrix} 900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；R=0.1 时，Simulink 的仿真结果如下图所示：

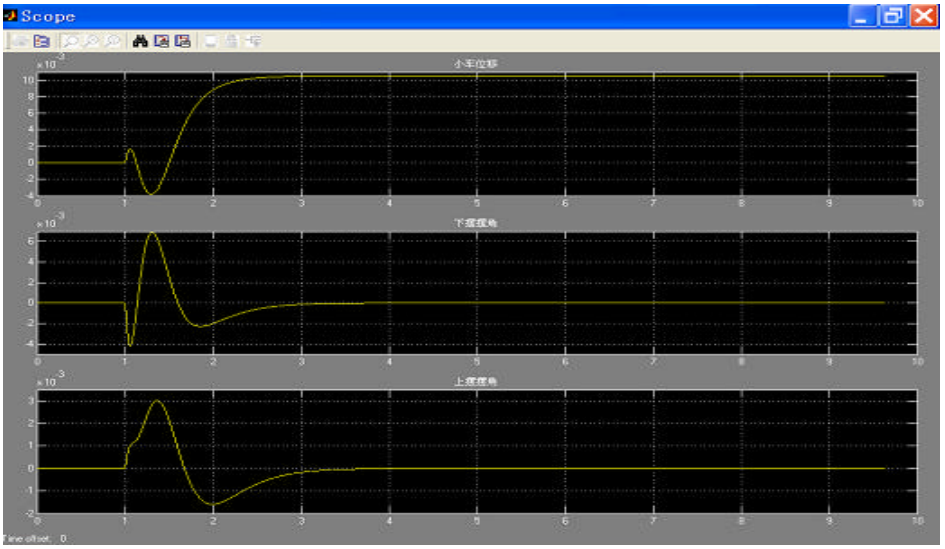


图 10 R=0.1

从图中可得小车位移的调整时间为 2.4s 幅值为 0.01，q_1 的调整时间为 3s 幅值为 0.006，q_2 的调整时间为 3s 幅值为 0.003。

经过对比可见重视小车位移的暂态误差，小车位移的动态响应性能更优。

R 代表对消耗控制能量的重视程度，图 9 和图 10 表示 Q 阵一样，R 分别为 1 和 0.1 时的系统响应图。由于状态变量不能明显的表示出控制能量的大小，可以通过不同 R 时小车位移的动态响应来分析 R 对系统响应的影响。对比 9、10 两图，当 R=1 时小车位移的调整时间为 2.5s 幅值为 0.03；R=0.1 时小车位移的调整时间为 2.5s，幅值为 0.01。R=1 比 R=0.1 对控制能量的消耗更为重视，从另一个角度看，R=1 对小车位移的相对重视程度比 R=0.1 时有所减弱，因此 R=1 时小车位移比 R=0.1 时大一些。但 R 的选取还应与实际系统控制量的限制有关。倒立摆 Q 、R 的范围是有限定的。

5.3倒立摆的动画仿真

运行图5所建的模型，可以得到倒立摆的动画模型。

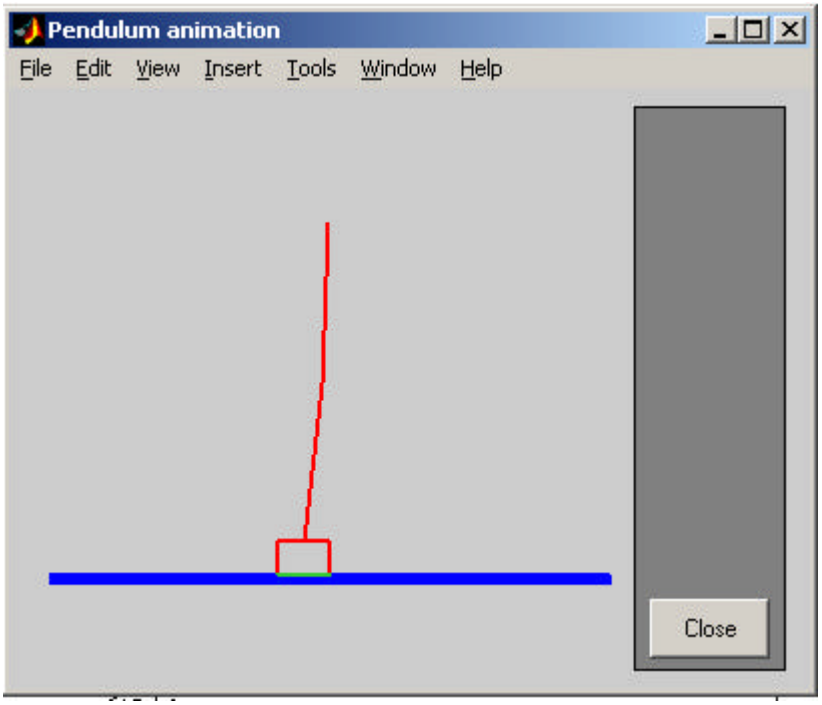


图11　二级倒立摆的动画仿真

6.小结

通过本次倒立摆系统的设计，我们了解了倒立摆系统的特点，并且将最优控制的理论应用到实际中。我们采用了最优反馈控制的方法来实现它的稳定控制，加深了对最优控制理论的理解。我们在设计中遇到很多问题，比如开始时二级倒立摆的方程的建立，设计方法和参数的选取，怎样实现动画来验证控制方法的有效性。

线性连续系统最优控制方法简单易行，可以实现对二阶倒立摆的控制，并且控制性能与 Q、R 的选取相关。我们所建模型的控制性能还需近一步完善。最优控制理论实质上完成了一件重要的工作：最优极点配置。线性理论告诉我们：通过状态反馈，极点可以任意配置。而最优控制理论则告诉我们：极点如此配置，才是最优的。

7.二级倒立摆仿真动画程序

```
function [sys,x0,str,ts]=animat(t,x,u,flag,Te)
global pendulum ;
switch flag
case 0
    animinit('Pendulum animation');
```

```
    pendulum=findobj('Type','figure','Name','Pendulum
animation');
    axis([-100 110 -10 90]);
    hold on;
    plot([-100 110],[0 0],'blue',[-100:110;-100:110],[-2
0],'blue','Linewidth',2);
    mx=[0 -10 -10 10 10 0 0 0];
    my=[6 6 0 0 6 6 33 63];
    hnd1=plot(mx,my,'red','erasemode','xor','linewidth',2);
    set(gca,'UserData',hnd1);
    [sys,x0,str,ts]=Initialisation(Te);
case 2
    if any(get(0,'Children')==pendulum)
        if strcmp(get(pendulum,'Name'),'Pendulum animation')
            set(0,'currentfigure',pendulum);
             hnd1=get(gca,'UserData');
             cx=20*u(1);
            [tetay1,tetax1]=pol2cart((u(2))*1,30);
            px1=cx+tetax1;
            [tetay2,tetax2]=pol2cart((u(2)+u(3))*1,30);
            px2=px1+tetax2;
            mx=[cx cx-10 cx-10 cx+10 cx+10 cx px1 px2];
            my=[6 6 0 0 6 6 6+tetay1 6+tetay1+tetay2];
            set(hnd1,'Xdata',mx,'Ydata',my);
            drawnow;
        end
    end
    sys=[];
case {1,3,4,9}
    sys=[];
otherwise
    error(['Unhandled falg=',num2str(flag)]);
end
function [sys,x0,str,ts]=Initialisation(Te);
sizes=simsizes;
sizes.NumContStates=0;
sizes.NumDiscStates=0;
sizes.NumOutputs=0;
sizes.NumInputs=3;
sizes.DirFeedthrough=0;
sizes.NumSampleTimes=1;
sys=simsizes(sizes);
x0=[];
str=[];
```

```
ts=[Te 0];
```