应用最优控制

Project 报 告

汽车侧向运动的最优控制

文勇　　(3103041021) 硕 330 班

朱茂林　　(3103041011) 硕 330 班

张明星　　(3103040004) 硕 329 班

梁飞　　(3103040014) 硕 329 班

崔逸群　　(热工所)

一．Project 问题分析及相关讨论

1．汽车侧向运动的最优控制及控制策略的选取：

在日常生活中，总会遇到这样的情况，我们想让运动发生偏移的汽车，能够在我们操作的方向盘，在最短的时间里达到我们期望的运动速度和运动方向，同时要求在控制过程中，汽车的震动小，耗去的汽油也少，对驾驶员的要求也低。我们的 Project 就是从类似的实际例子中抽样出来的最优控制问题。

查阅了很多相关的资料后，我们选择的设计策略是采样系统线性二次型最优反馈控制器。我们选取采样系统的原因是，采样系统是连续和离散相混合的系统，其中既包含有连续信号，也包含有离散信号。计算机控制系统就属于采样控制系统，其中控制对象是连续的，控制器是离散的，通常在连续的控制对象和离散的控制器之间采用零阶保持器相连接。设计时，通常首先将连续的控制对象模型离散化，然后设计一个线性离散控制器，使给定的离散二次型性能指标函数达到最优。采样系统设计的难点是，设计出的最优控制系统在采样点具有很好的动态响应性能。

2。设计目标：

设计一个线性离散控制器，寻找最优控制 u(t)在给定的控制量幅度和输出偏移的限制下性能指标为最小的控制过程，假设汽车处于一个不确定的初始状态，而控制的结果是要使汽车能从初始态，恢复到匀速直线运动的理想状态。通过离散化分析和设计寻找一个最优控制量 U（t）＝－LX（t）使得系统在控制量和输出量的允许范围内，系统的二次型损失函数极小。

3．性能指标函数的选取：

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + \rho u^T Pu) dt$$

积分符号内的第一项 $x^T Qx$ 是控制过程中的暂态误差，Q 是待选择的加权矩阵。

第二项是控制过程中的控制能量的消耗，ρ 是待定的加权系数，

P 是待选择的加权矩阵

虽然调节的时间是有限的，但不能确定在哪个时间点能达到控制目标，所以我们仍然采用无限时间调节的方式。

4．采样周期 T 和加权阵的选择：

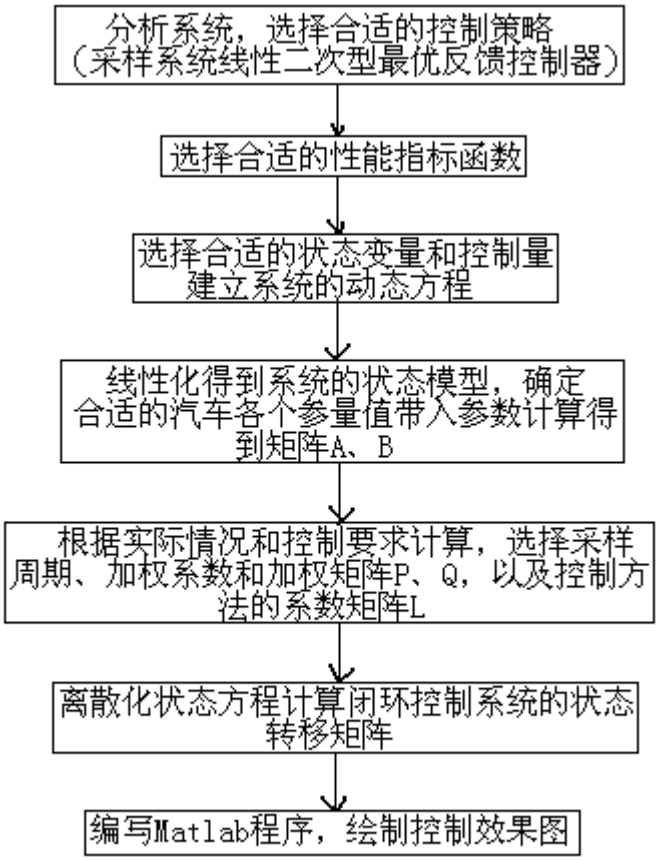
在控制量的范围受到限制，以及根据实际的要求给定初始条件的情况下，通过综合考虑状态偏移损失和控制能量损失，从而获得较好的采样周期的折衷选择，选择合适的采样周期可以降低计算量。

关于采样周期的选择，最常见的是基于频带的要求及香农采样定理。按照采样定理，并考虑一定的富裕量，通常建议采样频率应至少五倍于香农极限频率。而且，对于不同的采样周期有理由选择不同的加权系数，以使得设计出的控制系统更加符合实际的要求。

通常，在二次型损失函数中选择加权系数使其满足一定的实际要求是比较困难的。一般，长采样周期可以给出与短采样周期几乎同样好的动态响应。甚至有时能给出更好的动态响应。由于长采样周期能够降低对计算机的要求，因此我们总是在满足性能指标要求的基础上选用尽可能长的采样周期。

加权阵 Q 和 P 的选择是采用平方倒数——对角元素法来选择。

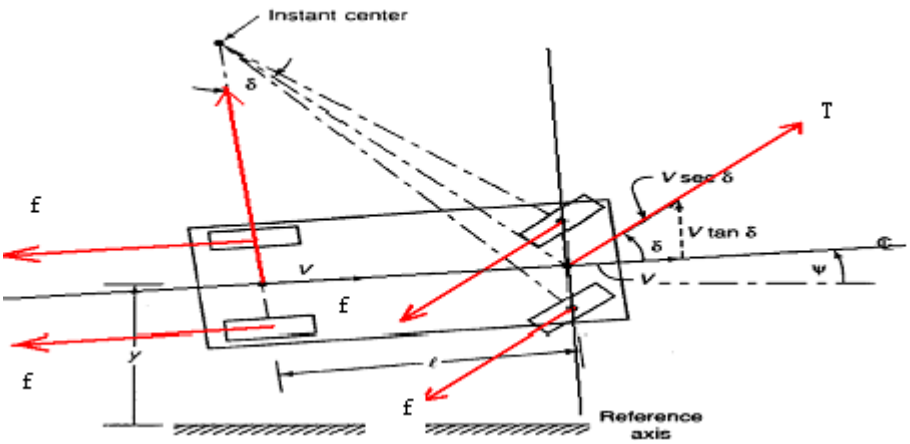
5．设计流程图为：



二．建模和相关计算处理

1．首先建立一个线性连续时间模型：

汽车的侧向运动模型如下图：



从汽车运动过程的受力图可以看出，汽车一共受到 6 个力的作用：

汽车两个前轮受到相同摩擦力： $f_{前}$

汽车两个后轮受到相同摩擦力： $f_{后}$

为了便于最优控制的实现，设定 $f_{前} = f_{后}$

汽车在直线运动前受到的向心力： $mv\dot{\psi}$

m 是汽车的质量，
v 是汽车运动的速度，
ψ 是汽车运动时，运动方向与水平方向的夹角。

汽车引擎的驱动力：T。
同时 T 与运动方向有个夹角 δ

2．建立的运动方程：
速度方向

$$m\dot{V} = T\cos\delta - 2f_{后} - 2f_{前}\cos\delta$$

垂直速度方向

$$mv\cdot\dot{\psi} = T\sin\delta - 2f_{前}\sin\delta - \frac{mv^2}{l\cdot ctg\delta}$$

3．建立状态方程：
汽车在运动过程中，比较理想化的考虑是，汽车的状态变量只有运动速的的大小和方向，所以我们选取的状态变量为：

$$x = [\Delta v, \Delta\psi]^T$$

选取的控制量

$$u = [\Delta T, \Delta\delta]^T$$

初始偏移

$$x_I = [\Delta v, 0]^T \qquad x_{II} = [0, \Delta\psi]^T$$

对以上两个方程进行线性化，在平衡点附近泰勒级数展开进行线性化得到状态方程：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

线性化后的矩阵 A，B 分别为：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\tan\delta/L + L\sin\delta\cos\delta & 0 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} \dfrac{\cos\delta}{m} & \sqrt{(T-2f_{前})^2-4f_{后}^2} \\ \dfrac{\sin\delta}{m} & lv-\dfrac{v}{l}\dfrac{m^2v^4}{l^2(T-2f_{前})} \end{bmatrix}$$

A, B 矩阵表示的物理意义是：

汽车当前时刻运动速度的大小和前一个时刻的运动速度的大小、方向无关，只与当前时刻的引擎驱动力的大小和方向有关;汽车当前时刻运动的方向与前一个时刻的运动速度大小有关，而且与当前时刻的引擎驱动力的大小和方向有关。

4．参数介绍和选取：

V——行驶速度（米/秒）120m/s

T——引擎动力（牛顿）1600N

δ——迎角（弧度）π/6 ，引擎动力的方向

ψ——纵向行驶夹角（弧度）0.05 弧度

m——汽车质量（千克）1485 kg

f——前后摩擦力（牛顿）225N

l——车长（米）3.5 米

代入可得：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.97 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 5.8\times10^{-4} & 1058.8 \\ 3.4\times10^{-4} & 0 \end{bmatrix}$$

5．加权矩阵的选择：

设计一个离散控制器 U（k）＝－LX(k)以及 U(t)=U(k) kT=<t<(k+1)T 并且|u(t)|=<u0

加权阵 Q 和 P 采用平方倒数——对角元素法来选择。即

$$Q=\begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{nn} \end{bmatrix} \qquad q_{ii}=\frac{1}{x_{i0}^2}$$

其中 u_i x_{i0} 是状态 x 的最大可能数值。

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & 0 \\ 0 & p_{mm} \end{bmatrix} \qquad p_{ii}=\frac{1}{u_{i0}^2}$$

u_{i0} 是 u_i 的最大容许值。

根据控制要求取值如下：

$$x_{10}=|\Delta v|_{\max}=1米/秒$$

$$x_{20}=|\Delta\psi|_{\max}=0.05弧度$$

$$u_{10}=|\Delta T|_{\max}=1600\ 牛顿$$

$$u_{20}=|\Delta\delta|_{\max}=0.3弧度$$

由以上数据可得：

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 400\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}4\times10^{-7} & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$$

可根据周期的不同选择不同的加权系数 ρ

6．采样周期的选择：

采样周期 T 和加权系数 p 之间一定的关系

【1】对于绝大多数情况，控制变量的最大值均发生在 I＝0 的时刻

【2】如果 X（0）＝X1（0）时，控制变量的限制条件能够满足那么当 X（0）＝X2（0）时也一定能满足

【3】无论对于 X1 还是 X2，如果 u1＝Δ T 的限制条件能够满足，那么 u2＝Δ δ 的条件也一定满足，所以我们主要考虑了控制变量 u1 的限制条件。

因为我们重点考虑 u1 和 X1 所以根据反馈控制方程，对于离散控制器的限制条件就可以得到|L（1，1）|《1600 由于离散控制器 L 取决于采样周期和加权系数的选择，所以加权系数必须随不同的采样周期而变化。如果给定 T，可以求得合适得加权系数使得|L（1，1）|＝1600。根据资料显示，加权系数将随采样周期得增加而减少。

根据经验公式：

$$p(T)=p(0)\left\{1-\frac{T}{T_m}\right\}\left\{1-0.3\sin\frac{T}{2T_m}\pi\right\}$$

$$T=(0.4-0.6)T_m$$

$$p(0)=\frac{K^2}{m(m+2)}$$

$$K=\frac{b_n}{a_n}$$

$$m=\left|\frac{Ku(0)}{y(0)}\right|$$

代入数值得 p(0)=0.33

可得 p＝0.165

由 p(0),Q,P 可以计算得到

使得二次型损失函数：

$$J=\int_0^\infty (x^TQx+\rho u^TPu)dt$$

极小的 L(0)=[2.3　1.1]由

$$T_m\approx 1.3\frac{b_n^2}{p(L_1(0)+a_n)^2L_n(0)}$$

计算得到：

$$T_m = 4.05$$

综合【1】考虑状态偏移损失和控制损失尽量小

【2】降低计算量

T＝2 秒

三．最优离散控制器的计算

根据 Riccati 迭代方程，利用 Matlab 计算得到无限时间的反馈离散最优控制器参数 L

$$u(k) = -L(k)x(k)$$
$$L(k) = [Q_2 + G^T S(k+1)G]^{-1}[G^T S(k+1)F]$$
$$S(k) = [F - GL(k)]^T S(k+1)[F - GL(k)] + L^T(k)Q_2 L(k) + Q_1$$
$$S(N) = Q_0$$
$$N \to \infty$$

代入参数计算德：

$$L = \begin{bmatrix} 1599.4 & -1117 \\ 0.3744 & -0.54 \end{bmatrix}$$

连续模型经过离散化后为：

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$$

其中

$$F = e^{AT}$$
$$G = \left(\int_0^T e^{At} dt\right) B$$

代入数据得：

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.97 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1.186 & 1123.8 \\ 3.6\times10^{-4} & 1.185 \end{bmatrix}$$

从而得到反馈状态方程：

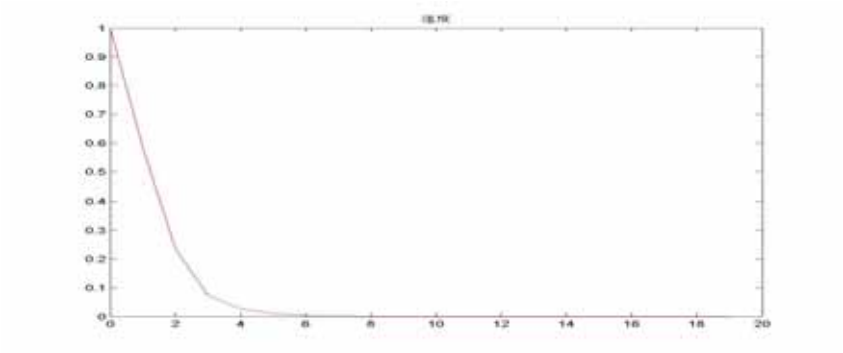
$$x(k+1) = Hx(k)$$

H 是闭环系统反馈控制传递函数，

$$H = F - GL$$

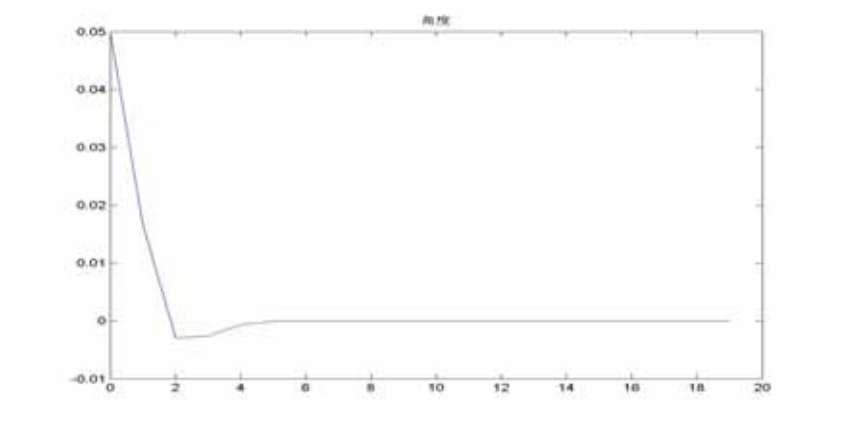
四．绘制效果图及讨论

运用 Matlab 计算 H，并画出控制效果图：
代入 X1 初始偏移参数运行程序得到对运动速度大小的控制效果图：



由图可见，速度在很短的时间内达到控制要求，而且，稳态误差和失调量均很小。

代入 X2 初始偏移参数运行程序得到对运动速度方向的控制效果图：



由图可见，汽车的运动方向近似与汽车的运动速度大小在同一时刻达到控制要求，虽然有超调量，但最后的控制效果还不错。

采样周期的选择在整个系统中起到了关键的作用，模型建立的好坏决定了仿真的成败，加权阵和初始参数的选择决定了是否存在反馈最优解。Q 要求非负定对称，P 要求正定对称，连续系统要求能控能观。

五．Project 心得体会

通过 Project 我们锻炼了自己，学到了很多东西，尝试把理论知识用于实践中，虽然遇到了很多困难，经过我们小组成员的共同努力，不断的尝试，不断的改进，较好地完成了控制任务，我们很高兴。

在此，向高峰老师、田峰老师表示深切的感谢，谢谢你们的辛勤劳动、诲人不倦。希望我们选修最优控制的同学能在 6 月 1 日的考试中考出好的成绩，报答你们。同时也向选修最优控制课程的同学表示感谢，谢谢你们的热情帮助！

六．参考文献

1、《应用最优控制》 吴受章 西安交通大学出版社 1986

2、《最优控制 理论与应用》 解学书 清华大学出版社 1986

3、Bryson.pdf