第三讲 贝叶斯决策理论

主讲：薛建儒，助教：宋凡、叶蓁

2019/2/26，Tuesday

3.1 贝叶斯决策理论

一个智能系统随时都在解决决策问题。例如，无人车运动过程中要根据周围场景的状态做出加速、减速、转弯等决策。一个扫地机器人需要根据自身电池电量以及与充电插座的位置做出继续工作还是返回充电的决策。简单地说，决策问题就是基于观测数据选择行动/行为。如何能根据观测到的数据选择最优行为/行动？显然，仅仅依靠观测数据或单纯凭经验（先验知识，与观测数据无关）都是不够的，需要考虑综合利用经验和观测数据。

最优决策（decision making）问题可定义为，综合先验知识和当前反映状态的观测数据，给出最佳行动。这里的状态是指智能系统自身的状态和所处环境的状态，先验是指所掌握的关于状态的信息。例如，上一节讲到的鱼分类问题中，状态就是鱼的类别，观测就是获得的图像，先验就是特定季节特定地点能捕到某种鱼的概率。

贝叶斯决策理论给出了能有效结合观测和先验信息实现最优决策的方法。一个智能系统基于贝叶斯决策理论解决决策问题的过程可以用图 1 表示。由于智能系统的状态和环境状态无法直接得到，因此需要通过控制传感器进行测量，得到反映状态的传感数据，即观测数据。然后对观测数据抽取特征，结合先验知识和特征估计状态、评估风险，最后给出决策。简单地说，对于一个给定的特征空间和行动集合，可以基于贝叶斯决策理论确定从特征空间到行动集合的映射，这个映射就是决策规则（decision rule）$\alpha(x)$。对于分类问题而言，$\alpha(x)$ 就是一个分类函数，输入特征，输出行为就是判断 x 所属的类别。

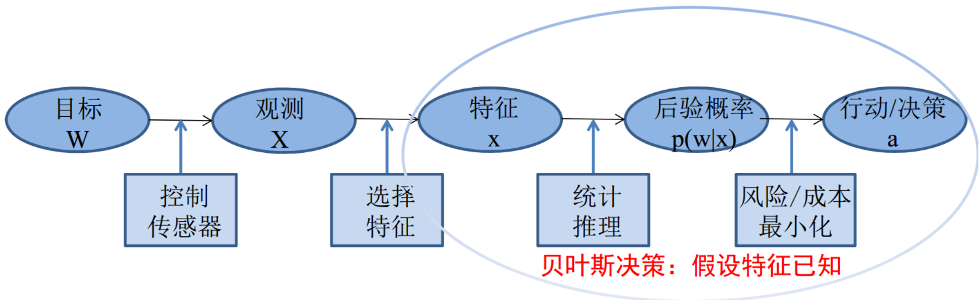

图 1 贝叶斯决策过程示意框图。

用贝叶斯推理求解问题，就是假设决策问题可以用概率形式来描述，问题的概率描述均已知，然后基于贝叶斯推理求取风险最小的决策。用随机变量$x \in \mathbb{R}$、$\mathbf{w} \in \{\omega_i, i = 1, \dots c\}$、$a \in \{\alpha_j, j = 1, \dots k\}$分别表示特征、状态和动作，状态先验、似然分别用$p(w)$、$p(w|x)$表示且已知，用风险函数$\lambda(\alpha|w)$表示状态为 w 时采取行动 $\boldsymbol{\alpha}$ 的代价。利用贝叶斯公式综合先验和似然，得到状态的后验分布$p(w|x)$。采取行动α_i的期望风险可以按下式计算。贝叶斯最小风险决策就是采取风险最小的行动，即$\alpha^* = argmin\, R(\alpha_i|x)$。

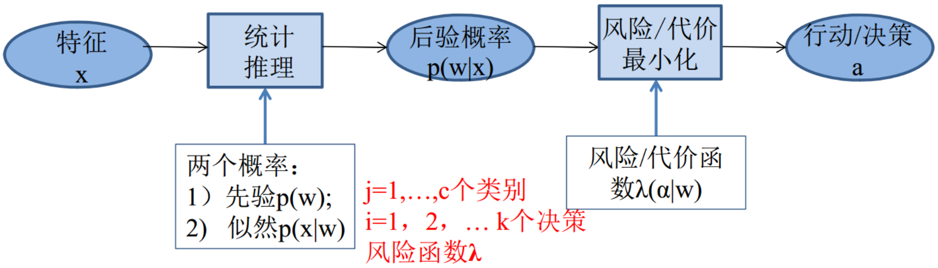

图 2 贝叶斯决策过程中统计推断及风险评估。

贝叶斯公式： $\mathrm{p}(\omega_i|\mathrm{x}) = \frac{p(x|\omega_i)p(\omega_i)}{p(x)}$ （3.1）

期望风险： $\mathrm{R}\left(\alpha_j\middle|\mathrm{x}\right) = \sum_i \lambda(\alpha_j|\omega_i)p(\omega_i|x)$ (3.2)

这里，状态 w 的取值为ω_i，$i = 1, \dots, \dots, c$. α_j为行为，$\mathrm{j} = 1, \dots, \dots, \mathrm{k}$，$\mathrm{p}(\omega_i)$是先验概率，$\mathrm{p}(\mathrm{x}|\omega_i)$是似然概率（likelihood），在分类问题中称为类条件概率，p(x)被称为证据（evidence），$\mathrm{p}(\omega_i|\mathrm{x})$是后验概率。类条件概率是指该类所有特征的概率分布。类条件概率和先验一般可以从训练样本得到。$\lambda(\alpha_\mathrm{j}|\omega_i)$是损失函数，用来评估风险或代价，需要根据具体问题确定。比如在做疾病诊断时，将健康的人判定为患病，会给病人造成精神损失；将患病的人判定为健康，会耽误治疗。

用一个例子说明贝叶斯决策过程。

例 1：抛硬币，猜正反面：猜对赢 1 元(代价为-1)，猜错输 1 元(代价为 1)。设 x 为观测，相信正面朝上(H)的概率为 60%，反面朝上(T)的概率为 40%。

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{R}(\alpha_i|\mathrm{x}) = \sum_j \lambda(\alpha_i|\omega_j)p(\omega_j|x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

因此为了减小风险，选择猜正面朝上。

在这个例子中，没有观测，用先验代替后验概率。

3.2 二分类问题的贝叶斯决策

综前所述，一旦确定了决策规则/函数α(x)，就建立了从特征空间到行动集合的映射，从而决策问题得到解决。下面利用贝叶斯最小风险决策求解二分类问题的分类决策。

在二分类问题中，用λ_{ij}表示当实际类别为ω_j而误判为ω_i时所引起的代价。用贝叶斯最小风险决策可以得到三种等价的决策规则。

决策规则-1：

若$\mathrm{R}(\alpha_1|\mathrm{x}) < \mathrm{R}(\alpha_2|\mathrm{x})$则采取决策$\alpha_1$："decide ω_1"

$$\mathrm{R}(\alpha_1|\mathrm{x}) = \lambda_{11}p(\omega_1|x) + \lambda_{12}p(\omega_2|x)$$

$$\mathrm{R}(\alpha_2|\mathrm{x}) = \lambda_{21}p(\omega_1|x) + \lambda_{22}p(\omega_2|x)$$

对于决策规则-1，因为不等号两边都有 p(x)证据（evidence）这一项，可以约去，就得到

决策规则-2：

若有$(\lambda_{21} - \lambda_{11})p(x|\omega_1)p(\omega_1) > (\lambda_{12} - \lambda_{22})p(x|\omega_2)p(\omega_2)$

则采取决策α_1： "decide ω_1"，

否则采取措施α_2："decide ω_2"

对于决策规则-2，把和 x 相关项整理为不等式的左边，其余整理到不等式右边，就得到规则-3。左边被称为似然比，右边是一个与 x 无关的常数。

决策规则-3：似然比

If $\frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)} > \frac{\lambda_{12}-\lambda_{22}}{\lambda_{21}-\lambda_{11}} * \frac{p(\omega_2)}{p(\omega_1)}$ (3.3)

Then decide ω_1

最优决策就是对比似然比和某个与 x 无关的常数，做出分类决策。

3.3 最小错误率分类

分类错误率就是指分类器发生分类错误的概率。考虑二分类问题，有两个判断：

✔α_1: 表示结果判定为 ω_1

✔α_2: 表示结果判定为 ω_2

用损失函数$\lambda_{ij}(\alpha_i|\omega_j)$表示当实际类别为$\omega_j$而决策为$\omega_i$对应的行动$\alpha_i$所导致的损失。按下式计算两个判断的条件风险：

$$\mathrm{R}(\alpha_1|\mathrm{x}) = \lambda_{11}p(\omega_1|x) + \lambda_{12}p(\omega_2|x) \quad (3.4)$$

$$\mathrm{R}(\alpha_2|\mathrm{x}) = \lambda_{21}p(\omega_1|x) + \lambda_{22}p(\omega_2|x) \quad (3.5)$$

定义“0-1”损失函数为：

$$\lambda(\alpha_i, \omega_j) = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases} \quad \mathrm{i,j} = 1,2$$

则对条件风险计算可简化为：

$$\mathrm{R}(\alpha_i|\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{j=2} \lambda(\alpha_i|\omega_j)p(\omega_j|\mathrm{x}) = \sum_{j\neq i} p(\omega_j|x) = 1 - p(\omega_i|x) \quad (3.6)$$

对 x 分类错误的发生概率为:

$$p(error|x) = p(\omega_1)\ if\ we\ decide\ \omega_2$$

$$p(error|x) = p(\omega_1)\ if\ we\ decide\ \omega_2$$

由此，得到了最小错误率的规则，即

Decide ω_1 if $p(\omega_1|x) > p(\omega_2|x)$; otherwise decide ω_2

因此有： $p(error|x) = \min\,[p(\omega_1|x), p(\omega_1|x)]$ (3.7)

不难看出，具有最小错误率的决策就是在 0-1 损失函数条件下的贝叶斯最小风险决策。

例 2：鱼的分类

仅使用先验分类：Decide ω_1 if $p(\omega_1) > p(\omega_2)$; otherwise decide ω_2

增加类条件概率(似然)即用$p(x|\omega_1)$与$p(x|\omega_2)$描述两类鱼的光泽度的概率分布，得到类别的后验概率：

$$\mathrm{p}(\omega_i|\mathrm{x}) = \frac{p(x|\omega_i)p(\omega_i)}{p(x)}$$

两类情况下：

$$p(x) = \sum_{j=1}^{j=2} p(x|\omega_j)p(\omega_j) \quad (3.8)$$

给定后验概率后的决策：

$$\text{if } p(\omega_1|\mathrm{x}) > p(\omega_2|\mathrm{x}) \rightarrow True\ state\ of\ nature = \omega_1$$

$$\text{if } p(\omega_1|\mathrm{x}) < p(\omega_2|\mathrm{x}) \rightarrow True\ state\ of\ nature = \omega_2$$

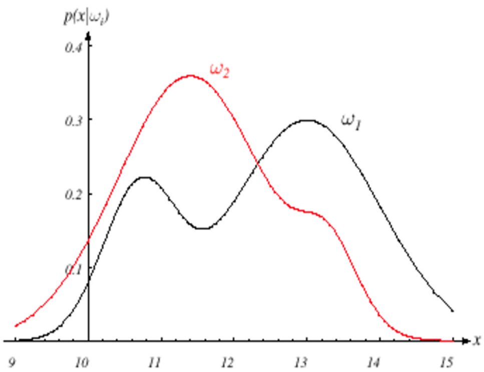

图 3. 二分类中的类条件概率分布。红色为ω_2的类条件概率，黑色为ω_1的类条件概率。

后验分布

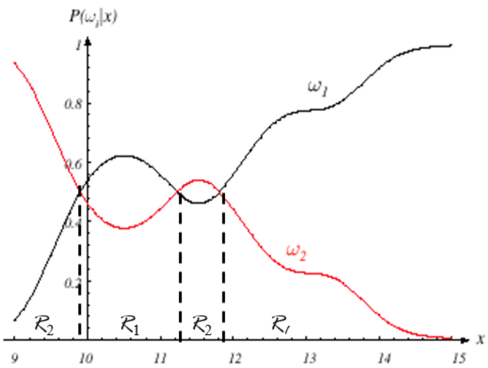

图 4 根据后验概率确定分类边界，$\mathcal{R}_1$表示属于ω_1的区间，$\mathcal{R}_2$表示属于ω_2区间。其中，类条件概率如图 3 所示，先验$p(\omega_1) = 2/3$，$p(\omega_1) = 1/3$。可以根据贝叶斯最小风险决策得到分类边界。

不同损失函数定义会影响最终的分类边界。图 5 为定义 0-1 损失函数，按决策规则 3，即通过比较似然比与θ_λ会得到的对 x 的区域划分结果。图 6 为另一种损失函数得到的分类结果。显然，根据不同的损失函数，即使采用同样的最小错误率规则，也会影响最后决策。

Let $\frac{\lambda_{12}-\lambda_{22}}{\lambda_{21}-\lambda_{11}} * \frac{p(\omega_2)}{p(\omega_1)} = \theta_\lambda$ then decide ω_1 if $\frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)} > \theta_\lambda$

if $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

then $\theta_\lambda = \frac{p(\omega_2)}{p(\omega_1)} = \theta_a$

另一种情况，

If $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ then $\theta_\lambda = \frac{2p(\omega_2)}{p(\omega_1)} = \theta_b$

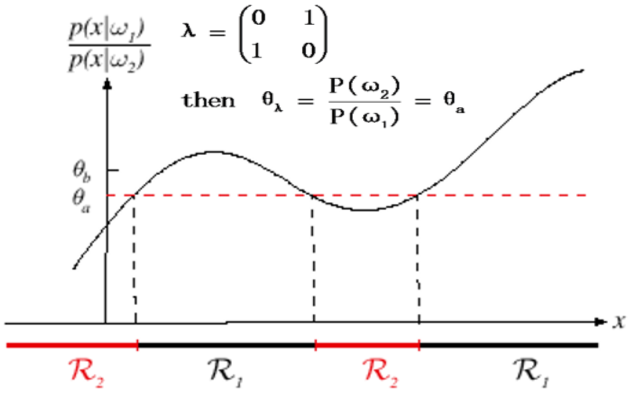

图 5　0-1 损失函数的最小错误率分类，$\mathcal{R}_1$表示属于ω_1的区间，$\mathcal{R}_2$表示属于ω_2区间。θ_a决定了分类区域$\mathcal{R}_1$和$\mathcal{R}_2$。如果增大λ_{21}，得到θ_b，区间$\mathcal{R}_1$变小。

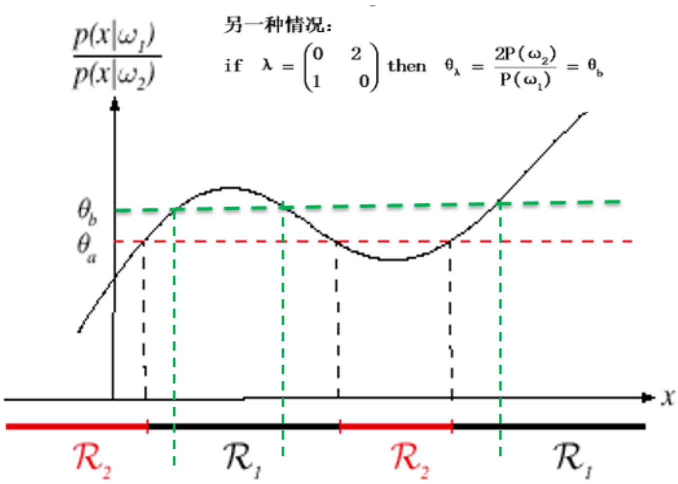

图 6　非 0-1 损失函数的最小错误率分类。θ_b决定了决策边界。如果增大λ_{21}，得到θ_b,区间$\mathcal{R}_1$变小，区间$\mathcal{R}_2$变大。

3.4 最小最大决策

前面的讨论中均假设先验已知，但若先验未知，如何决策使贝叶斯风险最小？为此先写出贝叶斯风险的计算公式：

$$R = \int R(\alpha(x)|x)p(x)dx \tag{3.9}$$

具体到两类分类问题中，贝叶斯风险可按下式计算：

$$R = \int_{R_1} [\lambda_{11}p(\omega_1)p(x|\omega_1) + \lambda_{12}p(\omega_2)p(x|\omega_2)]dx + \int_{R_2} [\lambda_{21}p(\omega_1)p(x|\omega_1) + \lambda_{22}p(\omega_2)p(x|\omega_2)]dx \tag{3.10}$$

利用$p(\omega_1) = 1 - p(\omega_2)$和$\int_{R_1} p(x|\omega_1)dx = 1 - \int_{R_2} p(x|\omega_1)dx$，进一步可把贝叶斯风险表达为$p(\omega_1)$的函数。

$$R\big(p(\omega_1)\big) = \lambda_{22} + (\lambda_{12} - \lambda_{22}) \int_{R_1} p(x|\omega_2)dx$$

$$+p(\omega_1)\Big[(\lambda_{11} - \lambda_{22}) - (\lambda_{21} - \lambda_{11}) \int_{R_2} p(x|\omega_1)dx - (\lambda_{12} - \lambda_{22}) \int_{R_1} p(x|\omega_2)dx\Big] \quad (3.11)$$

$$\lambda_{22} + (\lambda_{12} - \lambda_{22}) \int_{R_1} p(x|\omega_2)dx \ = \ R_{mm}, minimax\ risk \quad (3.12)$$

$$\Big[(\lambda_{11} - \lambda_{22}) - (\lambda_{21} - \lambda_{11}) \int_{R_2} p(x|\omega_1)dx - (\lambda_{12} - \lambda_{22}) \int_{R_1} p(x|\omega_2)dx\Big] = 0\ for\ minimax\ solution \quad (3.13)$$

式(3.11)中，贝叶斯风险最小的必要条件是$R(\mathrm{P}(\omega_1))$的导数为零，即式(3.11)中$p(\omega_1)$的系数为零，得到贝叶斯风险最小值：

$$R_{mm} = \lambda_{22} + (\lambda_{12} - \lambda_{22}) \int_{R_1} p(x|\omega_2)dx \quad (3.14)$$

$$= \lambda_{11} + (\lambda_{21} - \lambda_{11}) \int_{R_2} p(x|\omega_1)dx \quad (3.15)$$

这个结论对于$R(\mathrm{p}(\omega_2))$同样成立。

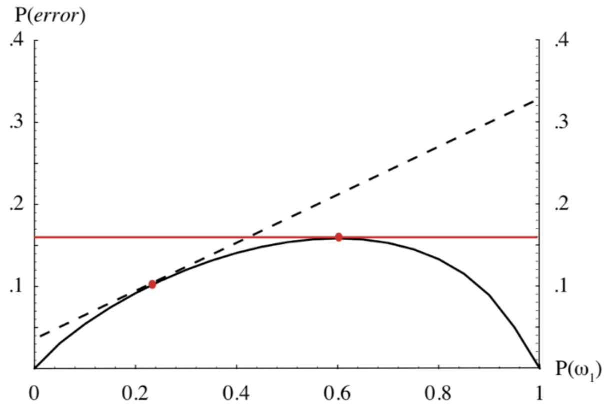

图 7 两类问题中的最小错误率与先验的关系。对二分类问题，若固定分类边界，最小（贝叶斯）错误率是先验概率$p(\omega_1)$的函数，其函数曲线位于底部。对于每一个先验概率值（如$p(\omega_1)$=0.25）都有一个相关的最优决策边界以及相应的贝叶斯错误率，对于任何这样的（固定的）边界，如果改变先验概率值，那么错误率随$p(\omega_1)$的线性变化（如图中黑色虚线所示）。分类错误率的最大值出现在先验的极值处，此图中就是$p(\omega_1)$=1。为了最小化最大错误率，需要按最大贝叶斯错误率（这里就是$p(\omega_1)$=0.6）确定分类边界，如此，便能保证该错误率不会随着先验概率的改变而改变，如图中红色水平线所示。