数学与金融工程

刘嘉

数学与统计学院
计算科学系

汇报提纲

1 金 融 与 金 融 工 程 概 述

2 金融工程的主要研究问题

3 经 典 案 例

金融与金融工程

金融是一个经济学的概念和范畴。通常，“金”是指资金，“融”是指融通，“金融”则指资金的融通，或者说资本的借贷，即由资金融通的工具、机构、市场和制度构成的有机系统，是经济系统的重要组成部分。

金融核心：在不确定的环境下，通过资本市场，对资源进行跨期（最优）配置。

金融工程（Financial Engineering）是数学方法在金融问题中的应用，它又称为

- 计算金融 Computational Finance
- 金融数学 Financial Mathematics
- 数理金融 Mathematical Finance
- 定量金融 Quantititave Finance[1]

[1] 国际金融工程师网站（https://iafe.org）

金融工程

❑ 应用驱动的多学科交叉课题

数学：研究现实世界的空间形式和数量关系的科学。

金融学：研究运作“金钱”事务的科学。

金融工程：运用数学工具来定量研究金融问题的一门学科

出现：20世纪50年代　　成于：20世纪80年代

金融数学研究的中心问题：定价和最优投资策略的选择。

主要理论包括：

- 资本资产定价
- 投资组合管理
- 风险度量
- 金融产品创新

❑ 金融工程师应具备的知识：多学科交叉

投资银行、商业银行、对冲基金、保险公司、公司财务部门和监管机构聘用金融工程师。

（1）金融理论

价值与财富，收益的度量，投资分析，证券组合选择理论，风险的识别与度量，风险管理，金融衍生产品，期权定价理论，套期保值。

（2）数学知识

微积分，线性代数，最优化理论与方法，概率论与数理统计，随机过程，控制论。

（3）建模技术

对模型的求解和计算机实现。

❑ 应用驱动的多学科交叉课题

• **普林斯顿工程与应用科学学院金融工程硕士课程安排**

系列1：基础课程	系列2：有关工程和金融中的数学	系列3：风险评估与管理	讨论课
回归和时间序列分析 金融经济学I 金融经济学II 金融工程 高级计量经济学 概率和随机过程	线性规划 动态规划 随机规划	金融工程 非线性规划 马尔可夫过程控制	专题讨论

❑ 应用驱动的多学科交叉课题

本节课我们主要介绍：

- 价格预测
- 风险管理
- 投资组合
- 资产定价

1、价格预测

❑ GDP预测

- IMF预测：2018年中国经济的实际增速为6.6%，但按照美元计算后中国的GDP总量由之前预测的14.09万亿美元下调到13.46万亿美元[1]

- 社科院预测：
  前三季度中国GDP增长6.7%
  全年6.6%左右[2]

数据来源：Wind

[1]IMF世界经济展望报告， 10月8日
[2]NAES宏观经济形势季度分析会（2018年3季度）， 10月9日

- 指定第二年政府工作计划
- 制作货币政策

❑ 预测预报模型

在进行金融建模和做金融决策的过程中，需要知道某些事件在将来可能发生的情况和可能的结果，预测、预报在金融模型和金融计算中起着十分重要的作用。

对应的数学问题：寻找函数关系

$$y_{T+1} = \varphi(y_T, y_{T-1}, \cdots, y_1)$$

建立在对过去数据分析的基础上：数据科学

- ❑ 统计方法（线性回归、Logistic回归、时间序列分析）
- ❑ 人工智能（神经网络、深度学习、强化学习）

❑ 预测预报模型

预测预报的过程

1、收集和分析过去的信息（时间序列），确定时间序列的模式特征。

a）稳定的，非稳定的。

b）时间趋势，还是长期趋势。

c）季节型的，非季节型的。

2、确定预测预报模型（一个或几个）。

3、调整模型中的参数值。

4、检验所选模型的适用程度（另选，调整）。

5、进行预测预报。

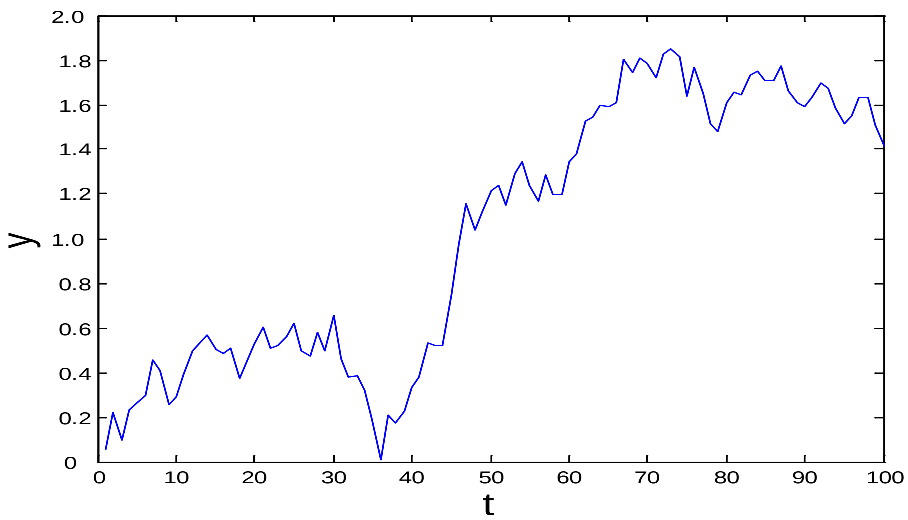
❑ 预测预报模型

几个简单的预测预报模型

(1) 自回归模型(AR)

$$y_t = \sum_{1}^{p} \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

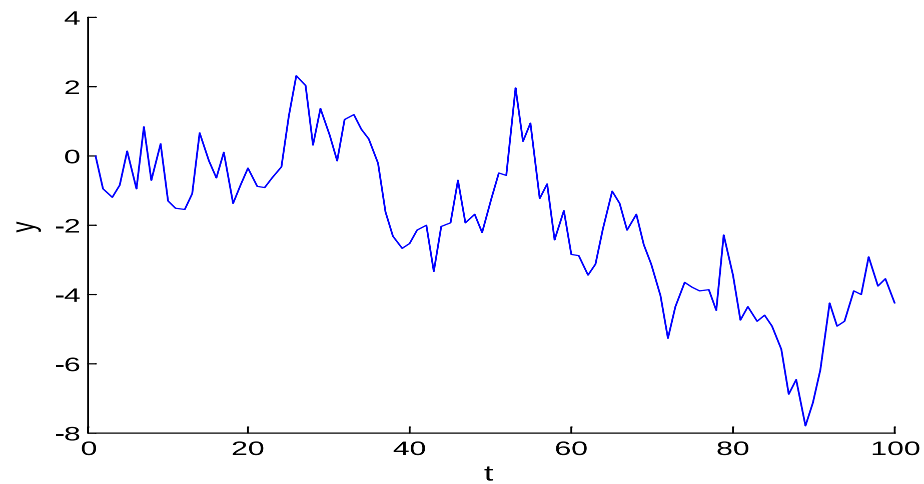
——适用于长期趋势时间序列



(2) 移动平均模型（MA）

$$y_t = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

——适用于具时间趋势时间序列



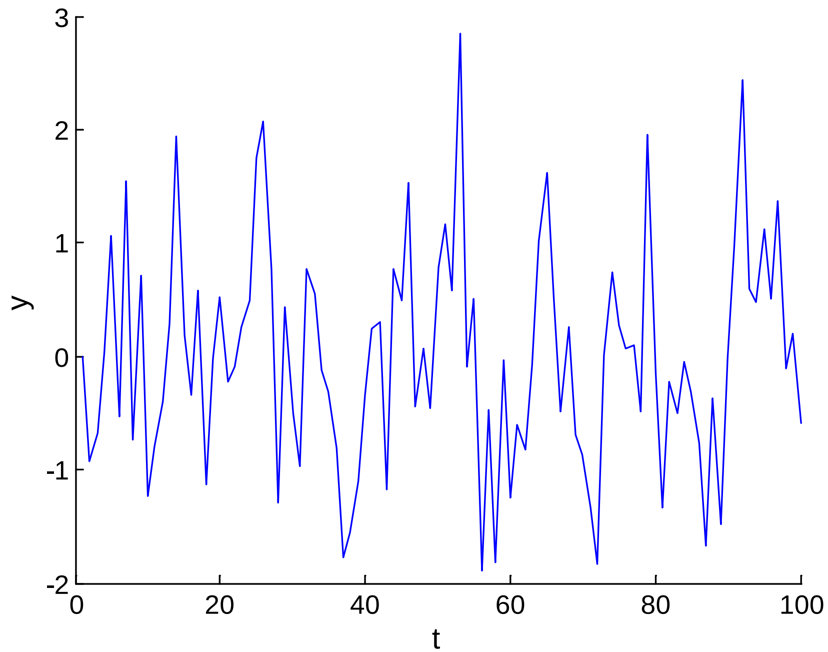
❑ 预测预报模型

(3) 自回归移动平均过程模型（ARMA 1,1）

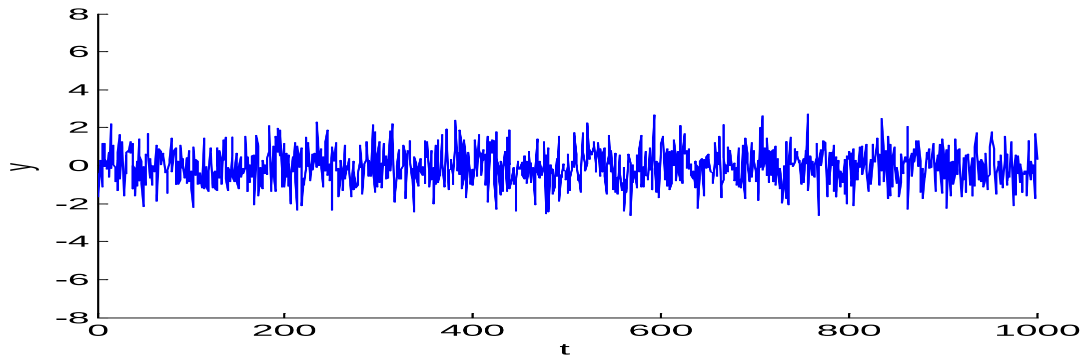
$$y_t = ay_{t-1} - b\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_t$$

——适用于既具有时间趋势，又具有长期趋势的时间序列。

$$\varepsilon_t \sim N(0,1)$$



经典线性回归模型的一个重要假定：总体回归函数中的随机误差项满足同方差性



预测预报模型

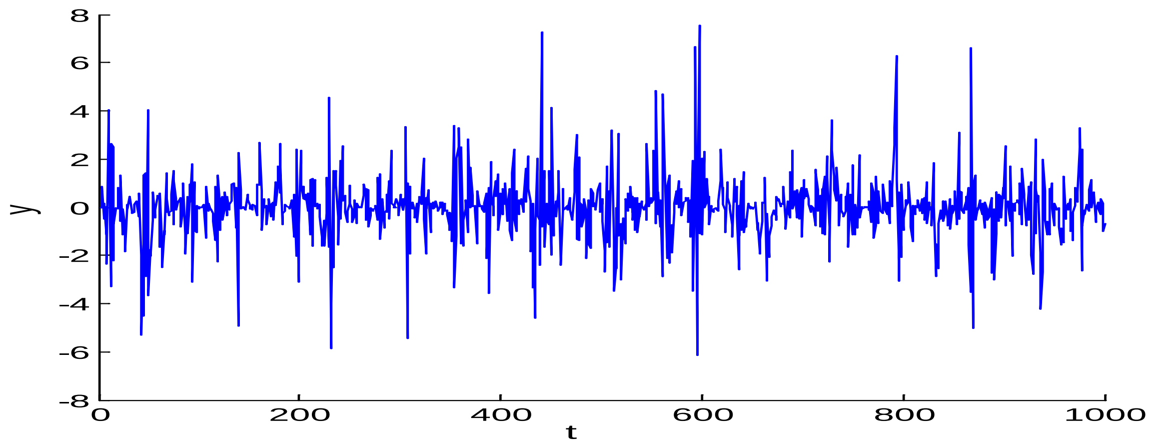
2003年度诺贝尔经济学奖授予Robert F.Engle和 Clive Granger。

- 令Engle 摘取桂冠的是他于1982年提出的ARCH模型。
- Granger因为时间序列的协整分析方法而获奖。

自回归条件异方差模型(ARCH)

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t \qquad z_t \sim iid\ N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2$$



Robert F.Engle

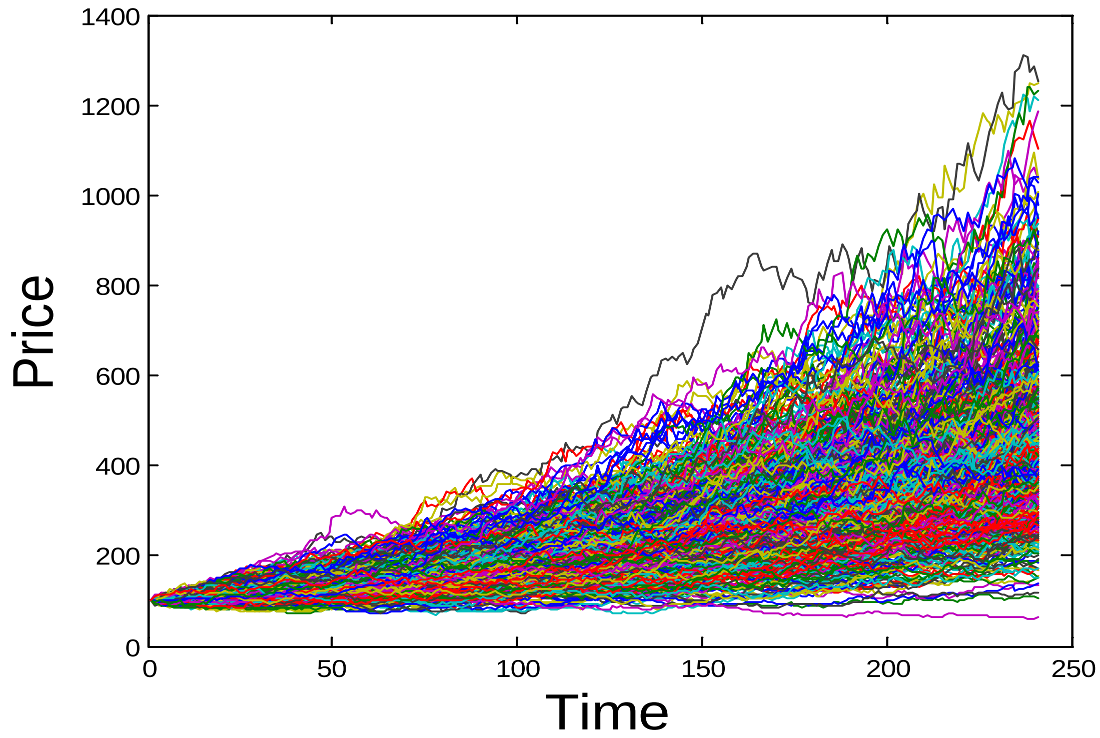
2、风险度量

❑ 风险

风险：
未来结果的不确定性或波动性

金融风险：
未来价格、利率、汇率、收益率的不确定性或波动性

风险的来源：
信息的不对称与不完备



价格的模拟过程

❑ 风险

市场风险：

利率风险、汇率风险、股市风险、价格风险。

信用风险：

由于交易对手不能或不愿履约导致损失的可能性。

流动性风险：

产品销售的流动性（产品变现，市场效率低下），现金流与资金不匹配；资金供不应求，导致违约或发生损失的可能性。

❑ 风险度量

风险管理：

识别风险，量化风险，控制风险。

风险控制：

保险，投资组合（分散化投资），套期保值。

两类风险：

系统风险：外在不确定性导致的风险，如宏观经济走势，市场资金供求，政治局势等。系统风险不可能通过投资分散化消除。

非系统风险：内在不确定性产生的风险，如企业的管理能力，生产规模，信誉等级。非系统风险可通过分散投资来化解。

❑ 风险度量

方差：直观的二阶统计量（Markovitz，1952）

$$\text{variance}: \quad E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right]$$

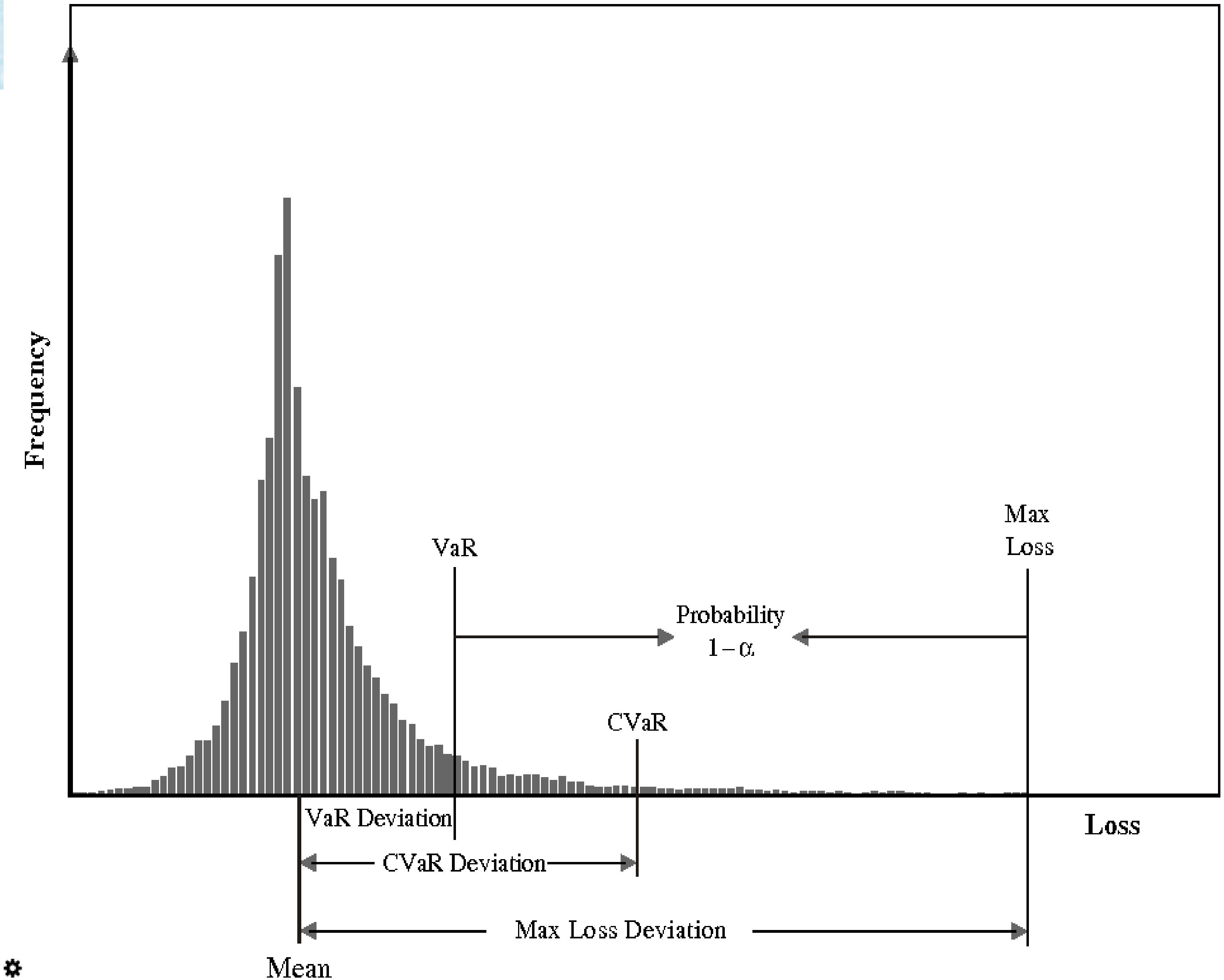
在险价值（Value-at-Risk）：在给定时段，以概率x%我们可能损失多少（JP-Morgan，1997）

$$\mathrm{VaR}_k = -F_X^{-1}(k), \qquad \Pr(X > \mathrm{VaR}) = k$$

条件在险价值（Conditional Value-at-Risk）：在给定时段，超过VaR的平均损失 （Rockafellar & Uryasev，2002）

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = E\{X \mid X \geqslant VaR_\alpha(X)\} = \inf\left\{a + \frac{1}{1-\alpha}E[X-a]^+ : a \in R\right\}$$

❑ 风险度量


Frequency
VaR
Max
Loss
Probability
1 – α
CVaR
VaR Deviation
CVaR Deviation
Max Loss Deviation
Mean
Loss

❑ Coherent风险度量

公理化的风险度量体系(Artzner, Delbaen, *et al.* 1997, 1999)

Coherent 度量: $\rho : X \to R$

A、转移不变性 (Transitional invariance):

$$\rho(x + \alpha r_0) = \rho(x) - \alpha, \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, \alpha \in R$$

B、次可加性 (Subadditivity):

$$\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y), \quad \forall\, x, y \in X$$

C、正齐次性 (Positive homogeneity):

$$\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x), \quad \forall\, \lambda \geqslant 0, \quad \forall\, x \in X$$

D、单调性 (Monotonicity):

$$\rho(y) \leqslant \rho(x), \quad \text{如果} \quad x \leqslant y, \quad \forall\, x, y \in X$$

❑ 如何恰当度量金融风险

导致金融风险难于刻画的主要原因：

市场参与主体是各类不同的投资者，对风险的理解、判断不同

金融风险的主要特征：

某种意义上，风险本身是一个主观的概念。即使我们可以指定、识别一个风险度量所应满足的某些特性，也不可能存在一个唯一的风险度量，可用于解决每个投资者的问题！

- 现有度量：仅从投资者行为的结果，即收益、损失、财富的分布特征来建模
- 未来：行为金融学，考虑对投资者行为、心理的描述有望导出全新的风险度量模型

3、投资组合

❑ 投资组合

1.1 报告期末基金资产组合情况

序号	项目	金额（元）	占基金总资产的比例（%）
1	固定收益投资	2,179,717,927.00	53.54
	其中：债券	2,179,717,927.00	53.54
	资产支持证券	–	–
2	买入返售金融资产	229,951,504.93	5.65
	其中：买断式回购的买入返售金融资产	–	–
3	银行存款和结算备付金合计	1,622,224,051.39	39.85
4	其他资产	39,442,668.85	0.97
5	合计	4,071,336,152.17	100.00

南方现金通货币市场基金（A Chinese fund）

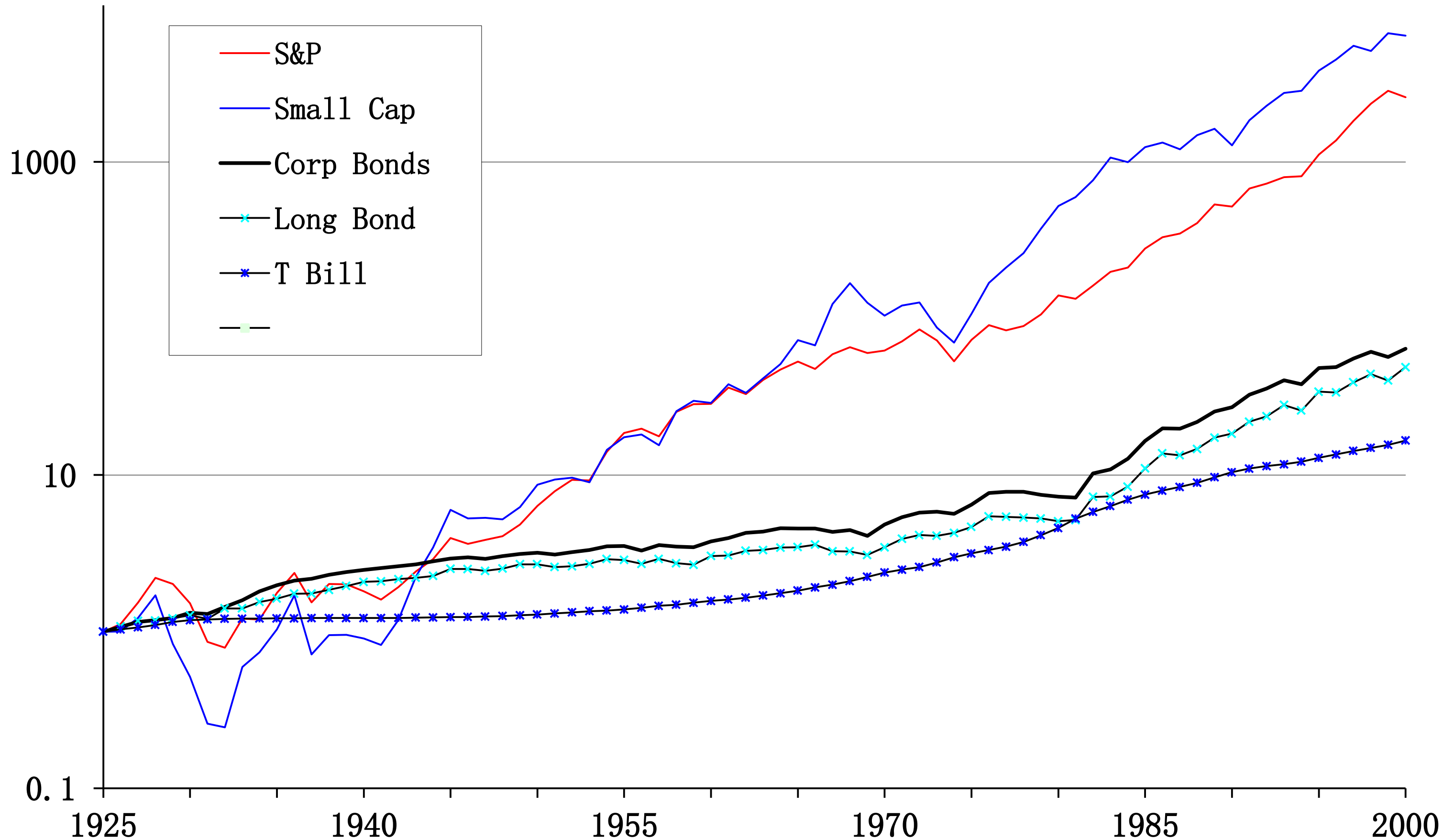
❑ 投资组合

1.5 报告期末按摊余成本占基金资产净值比例大小排序的前十名债券投资明细

南方现金通货币市场基金

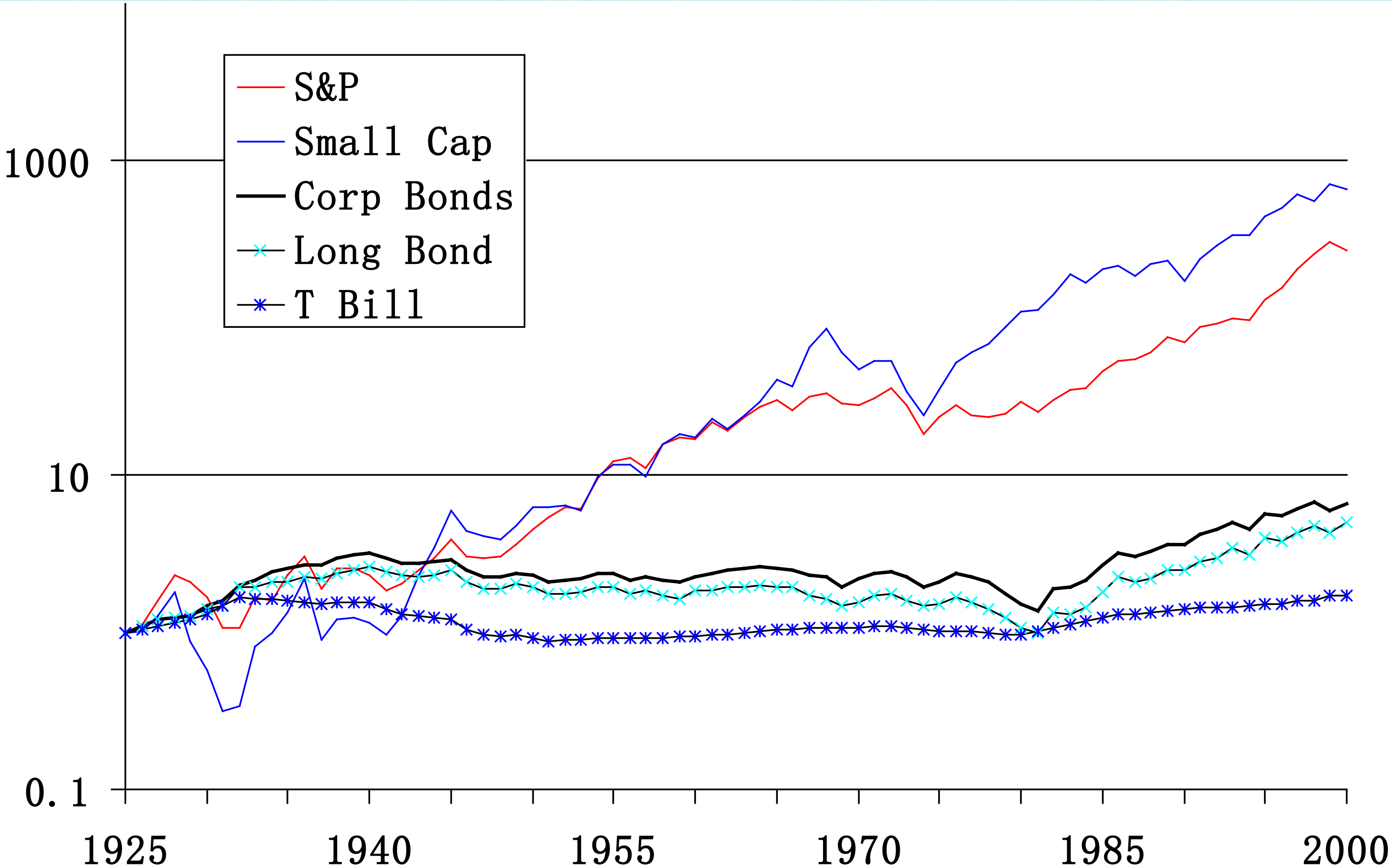
序号	债券代码	债券名称	债券数量（张）	摊余成本（元）	占基金资产净值比例（%）
1	111690757	16 包商银行 CD006	3, 000, 000	298, 786, 663. 15	8. 46
2	111618101	16 华夏 CD101	2, 000, 000	197, 653, 844. 65	5. 60
3	111607086	16 招行 CD086	2, 000, 000	197, 600, 891. 52	5. 60
4	111609229	16 浦发 CD229	2, 000, 000	197, 158, 353. 46	5. 58
5	019515	15 国债 15	1, 343, 120	134, 312, 020. 27	3. 80
6	111691887	16 南京银行 CD035	1, 300, 000	129, 872, 896. 79	3. 68
7	111609196	16 浦发 CD196	1, 000, 000	98, 826, 922. 29	2. 80
8	111617091	16 光大 CD091	1, 000, 000	98, 804, 738. 85	2. 80
9	111619031	16 恒丰银行 CD031	1, 000, 000	98, 728, 203. 81	2. 80

❑ 为什么做投资组合



Source: Ibbotson Associates

❑ 为什么做投资组合



Source: Ibbotson Associates

投资组合➜化解非系统风险

投资组合的一个主要选择方法：数学规划模型

❑ 投资组合

基本模型A：

决策变量：对不同资产的投资比例.

Minimize: 投资组合的风险,

Subject to: 投资组合的期望收益 ≥ 设定的目标,

其它对投资组合的限制,

基本模型B：

Maximize: 投资组合的期望收益,

Subject to: 投资组合的风险 ≤ 可承受的水平,

对投资组合的其它限制

基本模型C：

Maximize: 投资组合的期望收益 − λ 投资组合的风险

Subject to: 对投资组合的限制

$\lambda \in (0,+\infty)$ 表示投资者对风险的容忍程度

□ 期望收益与风险

单个资产的期望收益与风险。

期望收益： $E(r_A)=\sum_{t=1}^{T} r_{At}/T$ （**均值**）

r_{At}：资产 A 在日期 t 的收益率。

T：已知收益率的总数。

风险：方差

$$\sigma_A^{\ 2}=E(r_A-E(r_A))^2=\frac{\sum_{t=1}^{T}[r_{At}-E(r_A)]^2}{T}$$

协方差：

$$\begin{aligned}\sigma_{AB}&=E[(r_A-E(r_A))(r_B-E(r_B))]\\&=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[r_{At}-E(r_A))(r_{Bt}-E(r_B))\end{aligned}$$

□ 期望收益与风险

投资组合的期望收益与风险

记投资组合为

$$\sum_{t=1}^{T} x_i = 1$$

$x_i : i = 1, 2, \cdots, n$ i 个

$$E(r) = \begin{pmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ \vdots \\ E(r_n) \end{pmatrix}$$

$E(r_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ i .

□ 期望收益与风险

$$V=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

方差——协方差矩阵

$\sigma_{ii}=\sigma_i^2$，第 i 个资产收益率分布的方差，$i=1,2,\cdots,n$

$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,n$

第 i 个资产收益率分布与第 j 个资产收益率分布间的协方差。

❑ 期望收益与风险

投资组合 x

x 的

$$
\begin{aligned}
\sigma_x^{\ 2} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \sigma_{ij} x_j \\
&= x_1[\sigma_{11}x_1 + \sigma_{12}x_2 + \cdots + \sigma_{1n}x_n] \\
&\quad + x_2[\sigma_{21}x_1 + \sigma_{22}x_2 + \cdots + \sigma_{2n}x_n] \\
&\quad + x_3[\sigma_{31}x_1 + \sigma_{32}x_2 + \cdots + \sigma_{3n}x_n] \\
&\quad + \cdots\cdots \\
&\quad + x_n[\sigma_{n1}x_1 + \sigma_{n2}x_2 + \cdots + \sigma_{nn}x_n] \\
&= x^T V x
\end{aligned}
$$

❑ 投资组合模型

均值-方差模型（MV 模型）

在确定的收益目标下，使风险最小的投资组合。

Minimize $\quad x^T V x$

$$x^T E(r) \geq \mu$$

□ 投资组合模型

在可承受一定的风险水平下，使期望收益最大的投资组合。

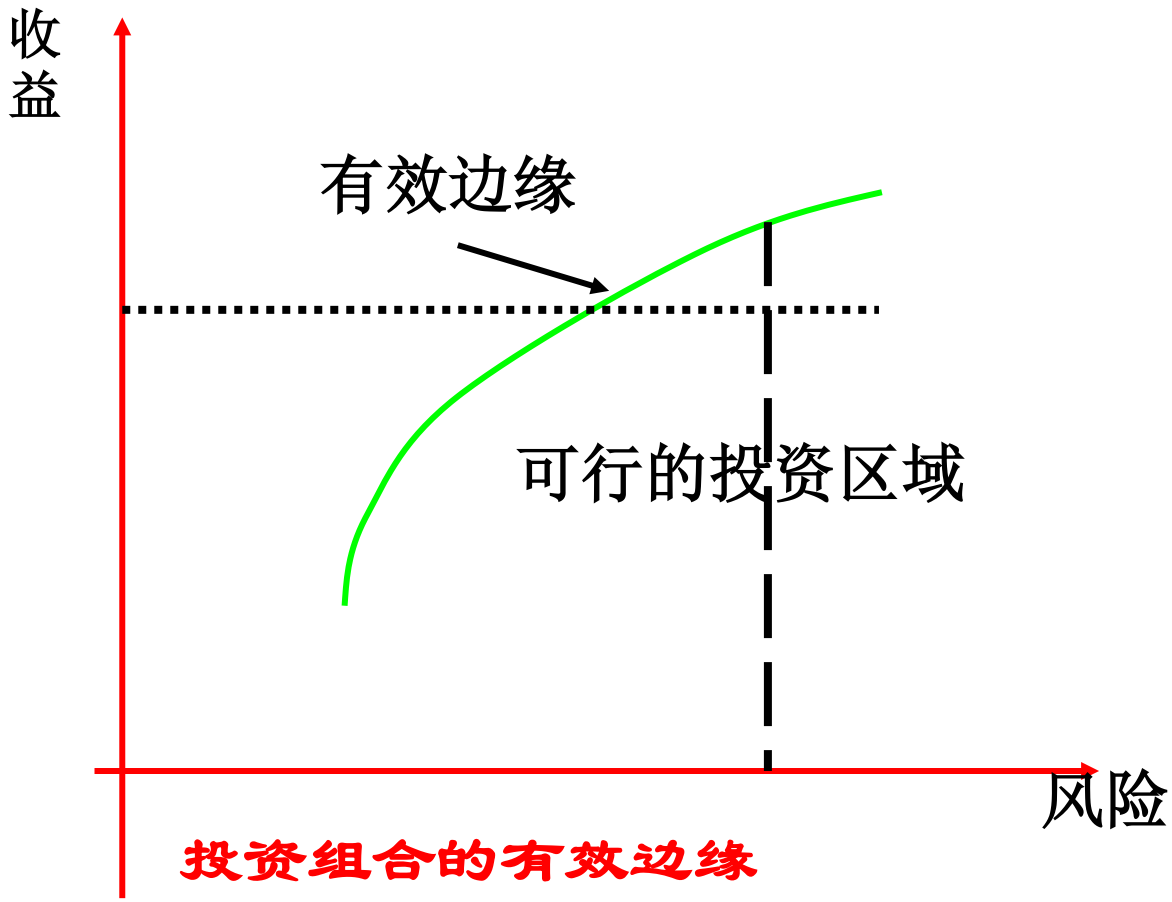
$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize} && x^T E(r) \\
&\text{Subject to} && x^T V x = \sigma_p{}^2 \\
& && \sum_{i=1}^{n} x_i = 1
\end{aligned}
$$

$\sigma_p{}^2$：所能随受的风险水平。

使风险最小，收益最大的加权模型

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimize} && x^T V x - \lambda x^T E(r) \\
& && \sum_{i=1}^{n} x_i = 1
\end{aligned}
$$

❑ 投资组合



投资组合的有效边缘

在允许卖空的条件下，有效边缘是一双曲线右支的上半支．对于有效边缘上的任何一个投资组合都不存在在收益和风险两方面都比他好的组合．

❑ 投资组合

H. Markowitz 在《资产组合选择》一文中，第一次从风险资产的收益率和风险之间的关系出发，讨论了不确定经济环境中最优资产组合的选择问题。

1990年诺贝尔经济奖授予H. Markowitz，W. Sharpe 和M. Miller，奖励他们在金融经济学中的先驱工作——

- H. Markowitz 的投资组合理论、
- W. Sharpe的 资本资产定价理论
- M. Miller 的公司财务理论。

❑ 投资组合

W. Sharpe 的资本资产定价理论，在较强的市场假设下，给出了Markowitz 均值方差模型的均衡版本，即资本资产定价模型。（CAPM）

其主要贡献是在有价证券理论方面对不确定条件下金融决策的规范分析，以及资本市场理论方面关于以不确定性为特征的金融市场的实证性均衡理论。马克维茨的分析方法进一步发展为著名的"资本资产定价模型"，用来说明在金融市场上如何建立反映风险和潜在收益有价证券价格。

4、资产定价

❑ 金融衍生品

- 投资组合策略可降低非系统风险，但不能规避系统风险。
- 要规避系统风险，要利用金融衍生产品采用套期保值策略。

金融工程的任务之一：

设计、开发金融衍生产品，确定有效的套期保值策略。

金融衍生产品：

以某种金融资产为标的物，由买卖双方协商在将来某一时刻按商定的条件执行的合约。

标的物：

股票、商品、证券、债券、货币、利率、市场指数等。

衍生产品：

远期，期货，期权，互换等。

❑ 金融衍生品：远期

- 远期合约是一个在确定的将来时刻按确定的价格购买或出售某项资产的协议。
- 多头(long position)：远期合约的一方同意在将来某个确定的日期以确定的价格购买标的资产。
- 空头(short position)：远期合约的一方同意在将来某个确定的日期以确定的价格出售标的资产。
- 远期价格(forward price)：使远期合约价值为零的交割价格。签署远期合约时刻该合约价值为零。

❑ 金融衍生品

中国银行远期结售汇牌价

货币名称	货币代码	交易期限	买入价	卖出价	中间价	汇率日期
欧元	EUR	一周	783.2983	797.1888	790.31355	2018/11/16
欧元	EUR	二十天	784.01675	798.03175	791.09425	2018/11/16
欧元	EUR	一个月	784.5104	798.7368	791.6936	2018/11/16
欧元	EUR	二个月	787.46965	801.73645	794.67	2018/11/16
欧元	EUR	三个月	789.3504	803.6474	796.57	2018/11/16
欧元	EUR	四个月	791.0442	805.5763	798.38	2018/11/16
欧元	EUR	五个月	793.3092	807.8445	800.65	2018/11/16
欧元	EUR	六个月	794.9375	809.6482	802.36	2018/11/16
欧元	EUR	七个月	796.92445	811.69665	804.38	2018/11/16
欧元	EUR	八个月	799.03225	813.83815	806.51	2018/11/16
欧元	EUR	九个月	801.05985	815.98465	808.59	2018/11/16
欧元	EUR	十个月	803.12645	818.11605	810.69	2018/11/16
欧元	EUR	十一个月	805.1076	820.1552	812.7	2018/11/16

❑ 金融衍生品：期权

- 看涨期权、买入期权、择购权（call option）：持有者有权在某一确定时间以某一确定的价格购买标的资产。
- 看跌期权、卖出期权、择售权(put option)：持有者有权在某一确定时间以某一确定的价格出售标的资产。
- 执行价格、敲定价格(exercise price or strike price)：期权合约中的价格
- 到期日、执行日、期满日(expiration date, exercise date, maturity)：合约中的日期
- 美式期权(American options)：可在期权有效期内任何时候执行
- 欧式期权(European options)：只能在到期日执行

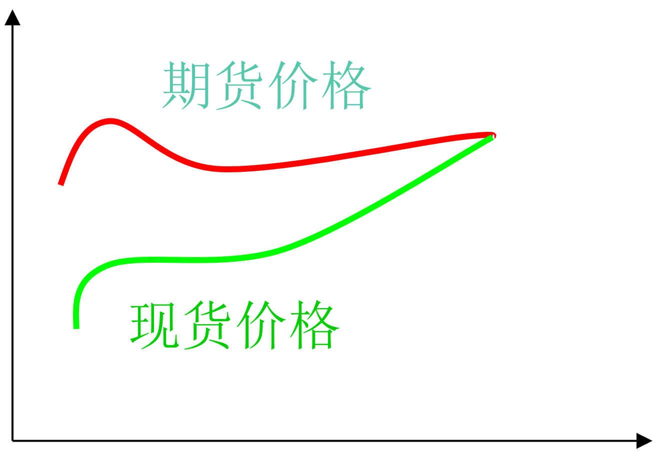
❑ 套期保值

熊市中电铜生产商的保值交易

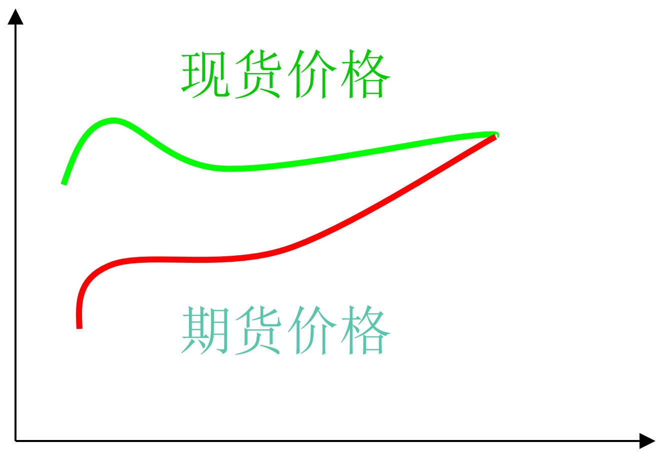
	现货市场	期货市场
	目标销售价：17200（元/吨） 计划销售量：4000（吨）	5月份期货合约卖出价17450（元/吨），合约数量4000（吨）
第一周	实际销售量：1000吨，平均销售价16500元/吨，销售亏损70万元	5月合约买入平仓量1000吨，平仓价16650元/吨，平仓盈利80万元
第二周	实际销售量1000吨，平均销售价16450元/吨，销售亏损75万元	5月合约买入平仓量1000吨，平仓价16600元/吨，平仓盈利85万元
第三周	实际销售量1000吨，平均销售价16400元/吨，销售亏损80万元	5月合约买入平仓量1000吨，平仓价16550元/吨，平仓盈利90万元
第四周	实际销售量1000吨，平均销售价16400元/吨，销售亏损80万元	5月合约买入平仓量1000吨，平仓价16500元/吨，平仓盈利95万元
累 计	累计销售4000吨 累计销售亏损305万元	累计平仓4000吨 累计平仓盈利350万元

❑ 金融衍生品：期货价差

- ❑ 正常市场(normal market)：期货价格随到期期限的增加而增加，纽约商品交易所的金属铂。
- ❑ 逆转市场(inverted market)：期货价格随到期期限的增加而减少，纽约商品期货交易所的金属铜。
- ❑ 混合型：棉花。
- ❑ 期货价格收敛于现货价格



期货价格高于现货价格



期货价格低于现货价格

❑ 金融衍生品定价：二叉树模型

❑ 单步二叉树模型（时间3个月，无风险利率12%）

S
f

股票价格=20

股票价格=22
期权价格=1

Su
f_u

股票价格=18
期权价格=0

Sd
f_d

无风险组合：
多头：0. 25股股票
空头：1个期权

$$Su\Delta - f_u = Sd\Delta - f_d$$

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{Su - Sd}$$

$$S\Delta - f = (Su\Delta - f_u)e^{-rT}$$

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$$

无套利准则

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

❑ 金融衍生品：股票价格的连续时间行为过程

$dS = \mu S dt$ $S = S_0 e^{\mu t}$ 瞬态期望漂移率 μS

股票价格比例变化的方差率 σ^2

Δt时间后股票价格比例变化的方差 $\sigma^2 \Delta t$

Δt时间后股票价格的实际变化的方差 $\sigma^2 S^2 \Delta t$

S的瞬态方差率 $\sigma^2 S^2$

S用上述瞬态期望漂移率和瞬态方差率的Ito过程表达为

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

变量σ称为股票价格波动率，变量μ为股票价格的预期收益率。

❑ 金融衍生品：欧式期权定价

❑Black-Scholes定价公式

欧式看涨期权到期日的期望价值为 $\hat{E}[\max(S_T - X, 0)]$

$$c = e^{-r(T-t)}\hat{E}[\max(S_T - X, 0)] \qquad \ln S_T \sim \varphi[\ln S + r - \frac{\sigma^2}{2}(T-t), \sigma\sqrt{T-t}]$$

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

本质：Ito引理

$$c = e^{-r(T-t)}[SN(d_1)e^{r(T-t)} - XN(d_2)]$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

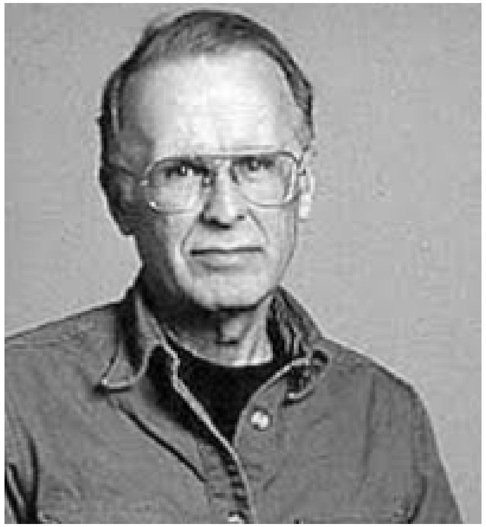
$$p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Kiyoshi Itô
1987年的沃尔夫奖

❑ 金融衍生品

1997年诺贝尔经济奖授予R. Merton和M. Schole, 以奖励他们和F. Black在确定衍生证券价值方法方面的贡献，也就是关于期权定价的著名的Black-Sholes公式。

Myron Schole



Fischer Black

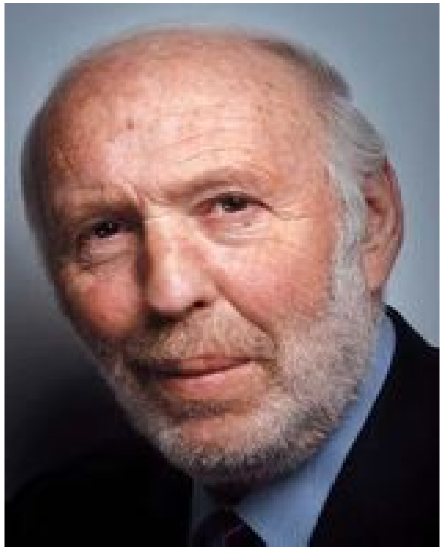
Robert Merton

5、量化投资

❑ 量化投资的兴起

国外量化投资的代表企业及人物

◆ “最赚钱的基金经理”——詹姆斯·西蒙斯



詹姆斯·西蒙斯
(James Simons)

- MIT数学系毕业，加州大学伯克利分校物理学博士。曾供职于美国防御分析研究所，做密码破译工作。后供职于石溪大学，任数学系主任。他与陈省身一起获得了维布伦奖。
- 文艺复兴科技公司创始人 。
- 他所管理的大奖章基金从1989年到2006年平均年收益率高达38.5%，净回报率超过股神巴菲特的18 % 。
- 2000年科技股股灾，标普指数下跌10%，大奖章基金净回报98.5%；2008年全球金融危机，而大奖章净赚80%
- 采用数学模型和计算机技术进行投资决策
- 雇员大都为物理学家、数学家、生物学家及计算机专家，几乎不雇佣华尔街人士，大都拥有博士学位

❑ 量化投资的兴起

国外量化投资的代表企业及人物

- “1990年，哈佛大学经济学本科生肯尼斯·格里芬在索普的帮助下，设立大本营投资集团，利用数学模型的进行可转债套利交易。后发展高频交易策略等，成为多元化多策略基金。第一年回报率达到70%。2004年基金资产150亿美元，2003年个人资产7.5亿美元

- 1991年，普林斯顿大学数学系毕业生彼得·穆勒在由伯克利经济学教授巴尔·罗森堡创立的BaRRa量化基金中发明了阿尔法系统策略。后到摩根士丹利成立过程驱动小组，由数学、统计与计算机顶尖高手组成，建立了“大富翁”程序化交易系统，专注于特定行业的统计套利。1996年-2006年利润约50亿美元，团队奖金10亿美元。

总结

- 数学有广泛的应用
- 学好数学大有可为

希望同学们打好基础，祝大家将来取得更大的成就！

谢谢大家！