西安交通大学研究生课程“流体力学近代进展”CFD部分

目　　录

第一章 计算流体力学最新进展

§1.1 概述
§1.2 工业界对计算流体力学提出的挑战
§1.3 计算流体力学方法新进展
§1.4 叶轮机械气动理论层次结构
§1.5 叶轮机械气动理论发展进程

第二章 非结构化网格方法

§2.1 概述
2.1.1 非结构化网格上的时间推进法
2.1.2 非结构化网格上的压力修正算法
2.1.3 自适应网格
§2.2 非结构化网格生成方法
2.2.1 概述
2.2.2 阵面推进法
2.2.3 阵面推进法算例
§2.3 二维非结构化网格上的SIMPLE算法
2.3.1 直角坐标系下的控制方程及湍流模型
2.3.2 对流扩散方程的离散
§2.4 算例分析
参考文献

第三章 高精度紧致差分格式

§3.1 概述
§3.2 微分方程及差分方程的耗散与频散
3.2.1 微分方程的耗散与频散
3.2.2 差分方程的耗散与频散
§3.3 一阶导数的高阶紧致差分格式
3.3.1 4阶差分格式
3.3.2 6阶差分格式
3.3.3 8阶差分格式
3.3.4 10阶差分格式
§3.4二阶导数的高阶紧致差分格式
3.4.1 4阶差分格式
3.4.2 6阶差分格式
3.4.3 8阶差分格式
3.4.4 10阶差分格式
§3.5边界处理
3.5.1 一阶导数在边界上的差分格式
3.5.2 二阶导数在边界上的差分格式
§3.6 算例分析
参考文献

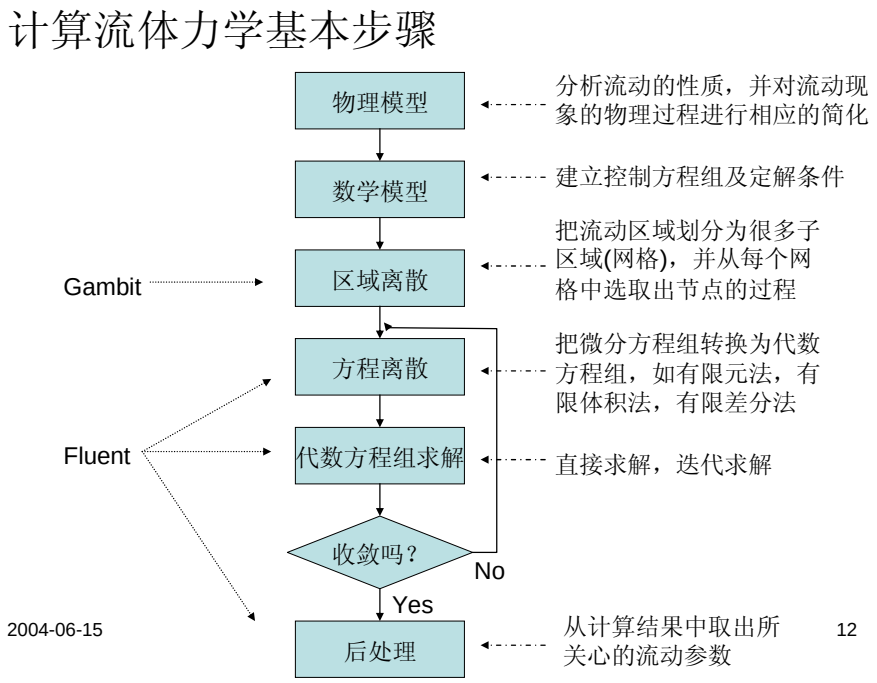
第四章 三维流体诱发振动的数值方法及应用

§4.1 引言
§4.2 流体诱发振动模型
§4.2.1 流动控制方程组
§4.2.2 振动控制方程组
§4.2.3 流体－结构耦合
§4.2.4 定解条件
§4.3 数值方法
§4.3.1 流体流动的有限体积法
§4.3.2 圆柱运动的有限体积法
§4.3.3 流体诱发振动的数值求解基本步骤
§4.4 算例分析
§4.4.1 刚性圆柱体
§4.4.2 受限振动圆柱体
§4.4.3 自由振动圆柱体
§4.5 结论
参考文献
致谢

西安交通大学研究生课程“流体力学近代进展”CFD部分
第一章 计算流体力学最新进展

张 楚 华
西安交通大学流体机械研究所，710049
电子信箱：chzhang@mail.xjtu.edu.cn

§1.1概述



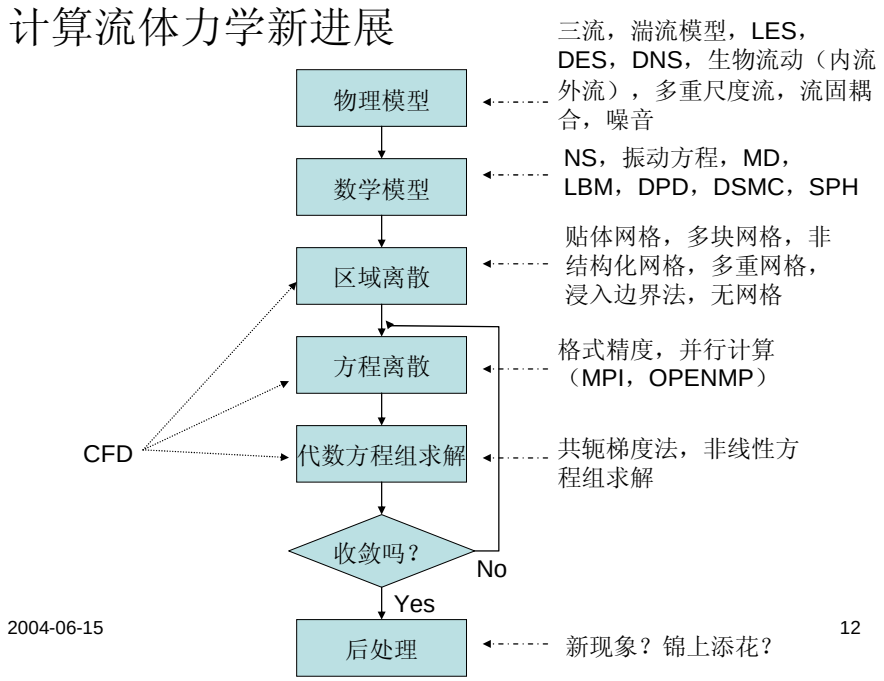
其中属于计算流体力学研究范畴的主要有3部分：区域离散，方程离散及代数方程组求解。

§1.2 Industry’s Challenge for CFD (刘智军)

(1) Can we trust the results?
(2) Can we get the results in time?
(3) Is it easy enough to use for engineer?
(4) How much time is lost in between individual CAE tools?
(5) How do we use it in our process?

工业界并不指望所有的理论问题都解决以后才能用CFD进行模拟，也并不指望CFD能解决所有的问题。

§1.3 计算流体力学方法新进展

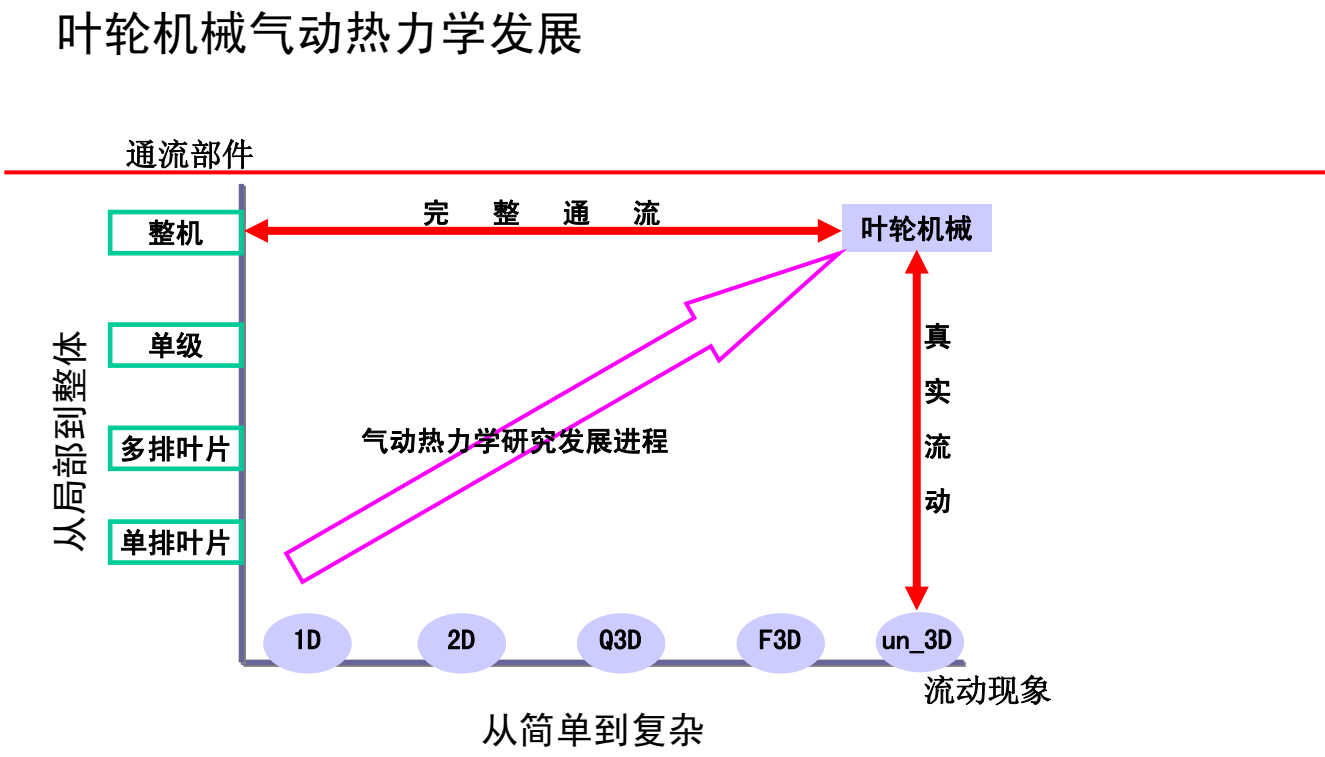


§1.4 叶轮机械气动理论层次结构

基础课（数学，连续介质力学，磨刀不误砍材工）冯元祯
三大专业基础课（工程热力学，流体力学，传热学）普朗特
工作原理课程（三机一泵，透平机械原理）徐忠 王仲奇
张量分析及应用（建模）王甲升
叶轮机械气动热力学理论（控制方程及简化，命题提法）刘高联
叶轮机械内流数值方法(准三元,全三元,流线曲率)王尚锦Lakshminarayana
计算流体力学（微分方程数值求解）帕坦卡，Hirsch
计算方法及程序设计（细节决定成败）冯康

物理概念要清楚，数学力学基础要扎实。

§1.5 叶轮机械气动理论发展进程



西安交通大学研究生课程“流体力学近代进展”CFD部分
第二章 非结构化网格方法

张 楚 华
西安交通大学流体机械研究所，710049
电子信箱：chzhang@mail.xjtu.edu.cn

§2.1 概述

在自然界和工程实际中遇到的许多流动问题具有复杂的流动区域，复杂的流动过程。随着计算机硬件技术日新月异的进步和数值计算方法的发展，计算流体动力学已有能力求解一些复杂的流动问题。

在处理复杂区域时，网格起着重要作用。计算流体动力学在数值求解复杂区域的流动探索中，主要采用了三种类型的网格。（1）贴体坐标网格：网格线由三族空间曲线坐标线组成，流动边界与其中的一个坐标面重合。这种方法已经求解了一些实际问题，但在求解更复杂的边界扭曲比较严重的三维流动时，网格质量难以保证，网格线的光滑性较差；在求解多连通区域时，需要加入人工割边或利用区域填充法，将流动区域变换为单连通计算区域；（2）多块网格：将复杂的流动区域分解为一系列简单子区域，在每个子区域内使用简单的网格。这种方法能够较方便地实施并行计算，但在内界面上的变量交换比较复杂且处理方法尚不具备通用性；（3）非结构化网格：当求解复杂区域的流动时，网格的贴体性和结构有序性的要求是使生成的网格质量差的根本原因。贴体性的要求是准确求解实际物理问题所必需的，因此放弃网格的结构有序性，即采用非结构化网格是数值求解复杂几何形状流动的另一尝试。非结构化网格方法的优点在于能够较方便地求解复杂边界的流动；复杂区域的网格生成自动化程度高、贴体性好；流动方程可以直接在物理空间上离散和求解，不需要坐标变换和方程变换；更容易实现网格自适应处理等。非结构化网格方法是90年代以来计算流体动力学研究的热点之一，许多原来基于结构化网格方法的商业计算流体动力学软件改用了非结构化网格方法。

表1 三类网格的比较

网格类型	优点	缺点
贴体网格	a 研究成熟 b 网格结构简单	a 需要坐标变换和方程转换 b 复杂区域内网格质量难以保证 c 多连通区域需要人工割边或区域填充法
多块网格	a 子区域划分灵活 b 各子区域可采用不同的模型 c 便于实施并行计算	a 内部边界条件提法与处理
非结构化网格	a 复杂区域的网格质量高 b 不需要坐标变换和方程变换 c 网格自适应处理 d 网格生成自动化	a 前后处理 网格生成 b 计算负荷大

在非结构化网格上的计算方法主要为有限元法和有限体积法。有限元法可以采用三角形网格和四面体网格等非结构化网格，是数值求解椭圆型微分方程的很有效方法。为了更有效地处理Euler方程和N-S方程中的对流项，人们又提出了控制体有限元法。由于有限元法需要复杂的型函数计算，并且形成规模庞大的总体系数矩阵，其计算负荷较大。

与有限元法相比，有限体积法不受型函数选取的限制，故其网格选取具有更大的灵活性。可以采用任意多边形和多面体作为网格单元，也可以采用混合体作为网格单元，也可以在网格系统中出现“悬挂结点”，更利于进行网格的自适应处理。而且有限体积法求解流动方程，其离散过程物理概念清晰，离散方程中的系数具有明确的物理意义，满足流动变量的局部及整体守恒特性等。因此，基于非结构化网格的有限体积法是求解复杂形状流动问题的最有效

的数值方法之一。

在非结构化网格上利用有限体积法求解微分方程的历史可追溯到60年代中期[1]，而在这以后二十年期间，在非结构化网格上利用有限控制体积法对流动方程的数值研究几乎是一片空白，其主要原因可能是：计算机容量和速度的限制；缺乏人工介入少、自动化程度高的非结构化网格生成方法；这期间对有限元方法研究空前繁荣。Jameson[2]于1986率先在航空工业界使用非结构网格上的有限体积法求解了Euler方程，经过了这些年的发展和完善，非结构化网格的方法在数值求解流动方程，特别在Euler方程取得了很大成功，现已能够对整机绕流进行气动分析。

借助于在结构化网格上一些成功的经验，在非结构化网格上求解流动方程的计算方法主要有两类：以密度为基本求解变量的时间推进法；以压力或压力修正量为基本求解变量的SIMPLE类算法。

2.1.1 非结构化网格上的时间推进法

Jameson在80年代中期首先成功地在三角形网格上利用有限体积法求解了二维Euler方程，他们采用的三角形网格由矩形网格剖分而来，网格编号及拓扑结构能够用（i，j）识别，控制体积直接取为三角形单元，所有的求解变量均位于三角形单元的中点（内节点法），时间离散采用Runge-Kutta显式时间推进法，空间离散采用中心差分格式并引入二阶和四阶人工粘性系数消除非物理振荡，采用了隐式残量光滑、局部时间步长最大化和多重网格等方法加速收敛速度。这种方法因内存需求量较小、方程离散过程直观、稳定性较好而被后来的研究者所广泛采用。Mavriplis[3]将Jameson方法推广至完全非结构化的三角形网格，但将求解变量位于三角形单元的顶点（外节点法），控制体积为所有以该点为顶点的三角形的并集，即控制体积是部分重叠的。采用这样的控制体积使得界面流通量的计算更方便、更直观，但生成更为庞大的系数矩阵，因此研究者更愿意采用互不重叠的有限控制体来离散方程。

对Jameson方法的另一重要改进是Frink，Whitaker及Barth[4-6]等人将Rao的矢通量分裂的迎风格式引入非结构化网格的数值方法中。这种分裂格式在计算控制界面上的流通量时需要先确定界面上的Rieman状态变量，而Rieman状态变量由普通的迎风格式计算。Mavriplis [7]还将并行算法引入非结构化网格的计算中，但由于非结构化网格计算中并行机制并不突出，因此加速比并不高。

2.1.2 非结构化网格上的压力修正算法

在90年代中期，SIMPLE算法被推广至非结构化网格上。Taniguchi和Kobayashi[8]首先采用Voronoi图作为有限控制体积的网格系统，以压力为直接求解变量计算了二维不可压缩流动。Hwang[9]和Thomadakis[10]提出了在交错非结构化网格上求解了二维不可压缩流的SIMPLE算法，压力位于三角形中心，而速度分量位于三角形顶点。Jiang和Prekwas[11]提出了一种混合非结构化网格上的不可压缩流动的SIMPLE解，网格中出现了三角形和四边形单元，然后将其推广至可压缩流动的数值计算。 Davidson[12]给出了在同位非结构化网格上的二维不可压缩层流的SIMPLEC解，所有的求解变量均位于三角形中心。Mathur和Murthy[13]的方法基本上和Davidson相同，他们采用了代数多重网格方法求解代数方程组来加快收敛速度。值得注意的是Jiang提出了一种新型的非结构化网格概念，这种方法首先将计算区域离散为无结构的四边形网格，根据对流场的预先估计，或在计算过程中，对流场变化剧烈的区域内的四边形网格进行任意细分，这样在流场中出现非四边形的网格单元。这种网格集中了结构化网格和非结构化网格的优点，克服了为分解边界层流动而采用高伸展比的三角形单元所引起的困难。在这种网格上构造稳定性好的差分格式是计算流体动力学的一个很有前途的研究方向。

非结构化网格上的SIMPLE类算法的收敛速度和代数方程组的求解方法有很大关系。由于非结构化网格拓扑结构的任意性，一些在结构化网格上行之有效的代数方程组求解方法如ADI、SIP不再适合于非结构化网格方法。预条件矩阵共轭梯度法是十多年以前提出的、近年来比较推崇的一种迭代方法[14]。许多计算实践表明这种方法的迭代次数及迭代时间比分裂法大大减少。原始的共轭梯度法只适用于系数矩阵为正定对称的情况，但是在计算流体力学中，利用结构化网格和非结构化网格方法离散Euler方程和N-S方程所形成的代数方程组的系数矩阵只具有对称的稀疏形态但数值是非对称的。近年来，将共轭梯度法加以推广用于非

对称的情形引起了众多学者的兴趣。最自然的方法是将代数方程组Ax=b变换为$(A^TA)x=A^Tb$，这样形成的系数矩阵A^TA虽然具有正定对称的性质，但其条件数变大，稀疏性降低，难以推广于实际三维流动问题。广义最小剩余方法(GMRES)能严格地保持剩余最小的特征，但迭代关系式为多项回归式，即在计算第*n*次共轭方向时，需要前*n*-1次共轭方向，这意味着对大型矩阵需要额外的庞大内存，而这在实际三维湍流计算中几乎是不可承受的。共轭梯度平方法(CGS)是简单的二项回归迭代方法，能从当前的剩余向量直接确定下一共轭方向，同时能使剩余基本上沿着最小方向进行。所有的共轭梯度法都属于Krylov子空间迭代法，只有经过预条件处理后才会得到较快的收敛速度。尤其在利用k-ε模型求解湍流问题时，常采用大数法来确定固壁附近第一个内结点上的湍流量，这样生成的代数方程组的条件数很大，必需经过预条件处理才能使用共轭梯度法求解。性能高的预条件矩阵应具有如下特点：变换后的系数矩阵具有良好的条件数；预条件矩阵容易计算且在迭代过程中不能出现矩阵相乘运算；内存占有量小。

2.1.3 自适应网格

自适应网格的目的在于提高数值解的分辨率。为了能很好地分辨出流场的变化特性，需要在流场变化剧烈的区域，如近壁区、尾流区、旋涡区、激波等区域内加密网格，而在变化平缓的区域内疏散网格以减轻计算负荷，因此需要预先估计出流场内变化情况来布置网格点。然而这种估计是不精确的，特别在非定常流动时，流动过程本身是不断变化的，为此需要在求解过程中不断地调整网格的疏密程度，这样就产生了自适应网格。非结构化网格的无序性使其非常适合于作自适应处理。主要有三种方法用于求解自适应问题：(1)网格运动法。将网格系统视为一个弹簧系统，网格的每条边的弹性系数由局部流场的梯度决定，运动网格点使弹簧系统得到新的平衡状态，这种方法的特点是没有加入新点，不改变网格的拓扑结构；(2)网格加密法。根据流场参数的变化情况，标定需要分裂的单元，然后将标定的单元细分，这种方法只加密网格，不疏散网格，网格点随着求解过程而递增；(3)网格再生法。根据流场的梯度，确定旧网格点上的网格尺度参数，以旧网格点为源汇点，重新生成疏密更合理的新网格，这种方法在流场局部既能加密网格，又能疏散网格。

综上所述，采用非结构化网格求解流场是计算流体动力学中一个新的研究方向，当然这一领域仍有一些棘手的问题急待解决和完善，其中主要包括：高质量的二维及三维非结构化网格生成问题；非结构化网格方法的计算负荷问题，对其基本要求是内存需求量和计算速度与结构化网格基本相当，这个问题在进行实际三维非定常流场计算时尤为突出；非结构化网格上高精度差分格式的实现问题；快速稳定的非结构化代数方程组的求解问题；在高伸展比的非结构化网格单元上实现稳定性、经济性俱佳的计算格式；非结构化网格的自适应问题等。

§2.2 非结构化网格生成方法

2.2.1 概述

流动方程数值解的精确性依赖于计算格式精度、网格质量和边界条件处理方法等。高精度的计算格式只有应用在高质量的网格上才能得到高精度的结果，不合理或质量不好的网格可能导致数值计算的误差增大，计算稳定性差，甚至无法得到收敛解。因此，网格生成方法已成为计算流体动力学中重要的研究内容。

判断网格质量优劣的主要指标包括网格的贴体性、光滑性、正交性、结构性、自适应性等。当流动区域不规则时，很难同时满足这些要求。网格的结构性和自适应性是目前网格研究中的活跃领域。

结构化网格具有严格的有序性，物理空间上结构化网格的整体结构有三种基本形式：H型、C型、O型。通过坐标变换，这些类型的网格都能变换成计算空间上的笛卡儿网格。生成方法主要有：代数方法、保角变换法、解偏微分方程组方法[15]。

非结构化网格有两种类型：宏观非结构化网格和微观非结构化网格。宏观非结构化网格是首先将整个流动区域分成许多小块，每个小块用结构化网格划分，然后将各块的网格用非结构化网格连接方法合并为总体非结构化网格。结构化网格可视为宏观非结构化网格的特例。通常所说的非结构化网格是微观非结构化网格，它是完全没有规律的网格，

非结构化网格生成方法主要有两种：Delaunay三角形化方法[16-18]和阵面推进法[19-22]。这两种方法均能实现网格生成的自动化；能够实现局部加密；能够加以推广生成三维非结构化网格。

Delaunay三角形化主要基于这样一个思想：给定流动区域Ω内N个不同的离散点P_i，i=1,N，对每个点P_i形成Voronoi区域，它由Ω内所有离P_i点最近的点组成：

$$V_i = \{P : |P - P_i| < |P - P_j|, \forall i \neq j\}$$

将相邻的Voronoi区域的中心点P_i相连接，就形成了三角形网格，且生成的网格的个数和拓扑结构是由区域形状和所给定的离散点唯一确定。这种方法具有严格的计算几何学基础，在计算机图形学中应用广泛，缺点是网格生成的过程是大量三角形单元的不断破坏和重组的过程，生成效率低，在粘性固壁附近不易实现方向性加密。

阵面推进法将边界离散点视为行波，逐层向计算区域内部推进，直至行波传递到计算区域内的每一点。这种方法网格生成过程直观，与Advancing Layer方法结合能在固壁附近生成数层高伸展比的三角形单元或四边形单元以更好地分辨边界层流动，能够实现方向性加密。

2.2.2 阵面推进法

所谓阵面就是一系列首尾相接的有向线段的集合，它将计算区域分隔成左右两部分(相对于有向线段的走向)，在阵面的右侧区域是已被剖分为三角形网格的、在以后推进过程中不需要再考虑的部分，在阵面左侧是待剖分的区域部分。当在左侧区域内生成新的三角形时，只需和阵面上的有向线段判断是否交叉而无需考虑右侧区域。

阵面推进法的思路为：首先输入边界离散点，形成初始阵面；然后根据背景网格所提供的局部尺度参数，在阵面左侧生成新的网格点，或者利用阵面上更合适的点，形成新的三角形；最后修改阵面，使边界点的连接信息向流场内部推进，直至整个流动区域被三角形覆盖。这里给出一种阵面推法的基本步骤：

第一步．确定背景结构化笛卡尔网格上的空间尺度参数。这需要求解一个带有源项的Poisson方程的Dirichlet问题，网格的疏密程度由源项控制；（图1a）

第二步．根据背景结构化网格上的局部网格空间尺度参数，将流动边界离散为一系列首尾相接的有向线段，形成初始阵面，要求流动区域始终位于有向线段的左侧；（图1b）

第三步．在阵面中选取一合适的有向线段AB（通常选择阵面中最早生成的有向线段）：

（A）以AB为底边，在AB左侧生成一新的“最佳点”C，要求三角形ABC尽量接近于正三角形；（图1c）

（B）以C点为圆心，以n倍的AB长为半径作圆，将所有位于该圆内的且在阵面上的结点组成候选点序列，然后根据候选点与C点之间的距离，由近向远对候选点序列进行排序。如第一个点D满足：

$AD > \alpha_1 AC$　且　$BD > \alpha_1 BC$　(2-2)

则将C点置于候选点序列的首位，选取第一个候选点为新的考查点；（n,α_1为调节因子，本文分别取为5、1.5）

（C）判断考查点和AB组成的三角形的性态，如不满足要求，则选取下一个候选点为新的考查点，转（C）；

第四步．将考查录用的点P和AB组成新的三角形，加入三角形序列中，判断P点及线段PA和PB是否已存在于相应的序列中，如不存在，则加入到各自的序列中，且将PA、PB加入阵面，如存在，则在阵面序列中删除相应的线段；

第五步．将AB从阵面中删除；

第六步．判断阵面上是否已空，如未空则转第三步；（图1d）

第七步．对生成的网格进行优化，完毕。（图1e）

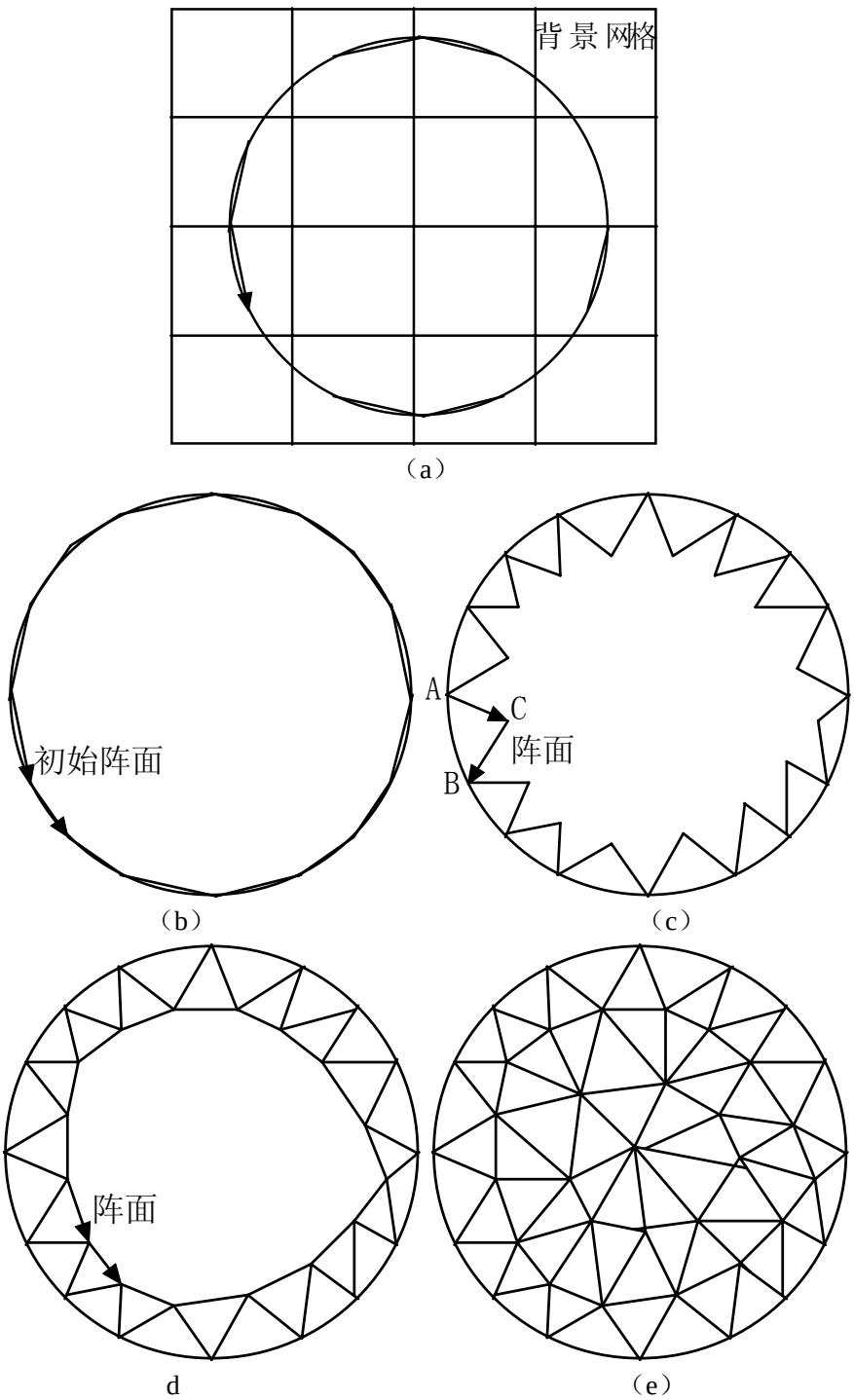


图1 用阵面推进法生成圆的三角形网格过程

在这里，需要对上述网格生成过程中的几个问题加以说明。

（一）背景网格

在生成初始阵面和新的三角形单元时，需要知道局部网格空间尺度参数，这可以由背景网格提供，对背景网格的要求是它能完全覆盖计算区域。早期的阵面推进法采用非结构化背景网格，背景网格的几何形状与拓扑结构以及其上的空间尺度参数通过人为给定，这种方法缺点为人工介入成分多，不易被使用者所掌握，生成的非结构化网格光滑性难以保证，进行空间尺度参数插值运算时需要进行大量的搜索运算，降低了网格的生成效率。

事实上，背景网格的唯一作用是为计算区域内的任一点提供网格尺度参数，这完全可

由结构化笛卡尔直角坐标网格来提供。背景网格上的空间尺度参数分布就类似于热源扩散的温度场的分布，网格的疏密程度可由背景网格区域内分布的一些点源和线源来控制，这相当于求解一个Poisson方程的Dirichlet问题：

$$\nabla \bullet \nabla S = G \qquad S\big|_{\Gamma} = S_b \tag{1}$$

S为网格空间尺度参数， G为控制网格尺度参数分布的源项，其离散表达式为：

$$G_{i,j} = \sum_{n=1}^{N} \psi_n (S_{i,j} J_n - I_n) \tag{2}$$

$(i，j)$表示背景网格节点编号，N为源的总数，Ψ_n为第n个源的强度，I_n和J_n分别为：

$$I_n = \begin{cases} S_n / r_n^2 & \text{点源} \\ \dfrac{1}{|l_n|}\displaystyle\int_{l_n} \dfrac{f(l)}{r(l)^2} dl & \text{线源} \end{cases} \tag{3}$$

$$J_n = \begin{cases} 1/r_n^2 & \text{点源} \\ \dfrac{1}{|l_n|}\displaystyle\int_{l_n} \dfrac{1}{r(l)^2} dl & \text{线源} \end{cases} \tag{4}$$

式中S_n为点源的空间尺度参数值，$f(l)$为线源的空间尺度参数值，l_n为线源的长度，r_n为源与背景网格点（i，j）之间的距离。

利用亚松驰Gauss-Seidel迭代方法求解方程(1)，其公式为：

$$S_{i,j}^{m+1} = (1-\omega) S_{i,j}^{m} + \omega (S_{i-1,j}^{m+1} + S_{i+1,j}^{m} + S_{i,j-1}^{m+1} + S_{i,j+1}^{m} + h^2 \sum_{n=1}^{N} \psi_n I_n) / (4 + h^2 \sum_{n=1}^{N} \psi_n J_n) \tag{5}$$

式中ω为亚松弛因子，m为迭代次数，h为背景网格的间距，初始迭代值可由源项给出：

$$S_{i,j}^{0} = (\sum_{n=1}^{N} \psi_n I_n) / (\sum_{n=1}^{N} \psi_n J_n) \tag{6}$$

对于流动区域内的任意一点P（x_p, y_p），利用背景结构化网格很容易确定其空间尺度参数：

$$\begin{aligned} S_p &= (S_{i,j}/r_{i,j}^2 + S_{i+1,j}/r_{i+1,j}^2 + S_{i,j+1}/r_{i,j+1}^2 + S_{i+1,j+1}/r_{i+1,j+1}^2) / \\ &\quad (1/r_{i,j}^2 + 1/r_{i+1,j}^2 + 1/r_{i,j+1}^2 + 1/r_{i+1,j+1}^2) \\ i &= \mathrm{int}((x_p - x_{\min})/h) + 1 \\ j &= \mathrm{int}((y_p - y_{\min})/h) + 1 \end{aligned} \tag{7}$$

int()表示取整运算，(x_{min}, y_{min})为背景网格(1，1)的坐标。

（二）边界的离散

在大多数实际流场计算中，流动区域的边界，尤其是固壁边界以离散点的形式给出：$\{P_1,P_2,P_3, \cdots P_N\}$，这些人工给出的离散点分布往往很不均匀，如果直接以这些离散点形成初始阵面生成网格，那么所生成的网格质量差，有时甚至使网格生成过程崩溃，因此需要对边界重新拟合和离散。

一种简单的重新离散办法是将边界用拉格朗日分段线性函数拟合：

$$\left\{ \overline{P_k P_{k+1}} \;\middle|\; 1 \le k \le N-1 \right\}$$

然后将每个分线段$\overline{P_k P_{k+1}}$根据背景网格上的空间尺度参数离散为：

$$\left\{ P_k,\ P_{k1},\ P_{k2}, \ldots\ldots,\ P_{k+1} \right\}$$

然而利用这种边界拟合和离散方法所生成的网格上的数值计算表明，计算所得的沿固

壁的压力可能出现非物理振荡现象！根本原因在于拉格朗日分段线性拟合函数在逼近固壁边界时只能保证0阶光滑性，在交接点处流道形状出现人为的突扩或突缩，且新生成的点 P_{k1}，P_{k2},……可能并不落在真实的物理边界上，因此需要引进光滑性和贴体性更佳的拟合函数。实践表明，对边界先进行三次样条函数拟合，然后重新离散的方法来生成初始阵面，保证了边界拟合曲线的二阶光滑性，且重新生成的离散点具有更佳的贴体性，生成的网格的质量较高。其边界重新离散过程为：

第一步．设起始点A=P1，A点处的空间尺度参数为S_A；

第二步．利用二分法在三次样条拟合曲线上找一新点B，使得A、B两点之间的距离为S_A；

第三步．在结点序列中增加点B，在线段序列及阵面序列中增加AB；

第四步．令A=B，如A、P_N之间的距离大于S_A，则转第二步；否则结束。

为了便于流场计算，对相应的周期性边界作相同的离散。

（三）新点的生成和交叉判断

假设现在考查阵面中的有向线段AB，则在AB的左侧区域内取一新点C，使得C点与A、B两点的距离均为S_1

$$S_1=\begin{cases}\alpha_2 AB, & 当 S_M<\alpha_2 AB\\ S_M, & 当 \alpha_2 AB\le S_M\le\alpha_3 AB\\ \alpha_3 AB, & 当 S_M>\alpha_3 AB\end{cases} \tag{8}$$

式中M点为AB的中点，S_M为M点的空间尺度参数，α_2、α_3为控制因子，本文分别取为0.8、1.2。这样选取的主要目的是使三角形ABC尽可能接近正三角形。

候选序列中的结点N_j能否和当前考查的有向线段AB形成可接受的三角形单元，还需要进行交叉判断，这也是阵面推进法中最繁琐复杂的工作，也是阵面推进法成败的关键，网格生成的计算时间绝大多数消耗在这里。N_j只有同时满足以下三个条件方能使用：

（1）N_j点位于AB的左侧，即：

$$(\overline{AB}\times\overline{AN_j})\bullet\overline{k}>0 \tag{9}$$

（2）三角形ABN_j中不包含候选序列中的任一除C点以外的候选点，即：

$\forall i\neq j$，满足：

$$\left|(\overline{AB}\times\overline{AN_i})\bullet\overline{k}\right|+\left|(\overline{AN_j}\times\overline{AN_i})\bullet\overline{k}\right|+\left|(\overline{BN_j}\times\overline{BN_i})\bullet\overline{k}\right|>\left|(\overline{AB}\times\overline{AN_j})\bullet\overline{k}\right| \tag{10}$$

（3）有向线段MN_j不和阵面上的任一有向线段P_iP_j交叉，即：

$$\max(-\alpha,\ \alpha-1)>0 \quad 或 \quad \max(-\beta,\ \beta-1)>0$$

$$\alpha=\frac{(\overline{P_iM}\times\overline{MN_j})\cdot\overline{k}}{(\overline{P_iP_j}\times\overline{MN_j})\cdot\overline{k}}$$

$$\beta=\frac{(\overline{P_iM}\times\overline{P_iP_j})\cdot\overline{k}}{(\overline{P_iP_j}\times\overline{MN_j})\cdot\overline{k}} \tag{11}$$

（四）优化处理

利用标准阵面推进法生成的三角形网格质量较差，有时会出现畸形的三角形，因此需要经过后处理来改善三角形网格的质量。后处理可以采用以下几种方法，也可交替进行：

(1)Laplacian光滑算子

这种方法是对网格单元的顶点几何位置作用Laplacian光滑算子，目的是将网格点尽可能地移到邻近网格点的中心，可表述为：

$$P^{m+1}=(1-\omega)P^m+\frac{\omega}{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j P_j^{m+1} \tag{12}$$

其中P表示网格的任一非边界点，m为迭代次数，n为与P点相连接顶点的个数，P_j为相邻点，α_j为相应点的权系数。方程(2-19)一般用Gauss-Seidel方法求解。

(2)优化方法

对三角形网格提出反映其质量优劣的目标函数，对所生成的网格进行优化。总体目标函数有网格的“面积比函数”和“能量函数”，第一种函数可表达成：

$$E=\sum_{i=1}^{ntr}\frac{Ac(i)}{At(i)^{\omega}}Gk(i)^{2(\omega-1)} \tag{13}$$

式中$At(i)$、$Ac(i)$、$Gk(i)$分别为三角形i的面积、三角形i的外接圆面积、三角形i的网格密度，ntr为三角形的个数，ω为调节因子。第二种函数可表达为：

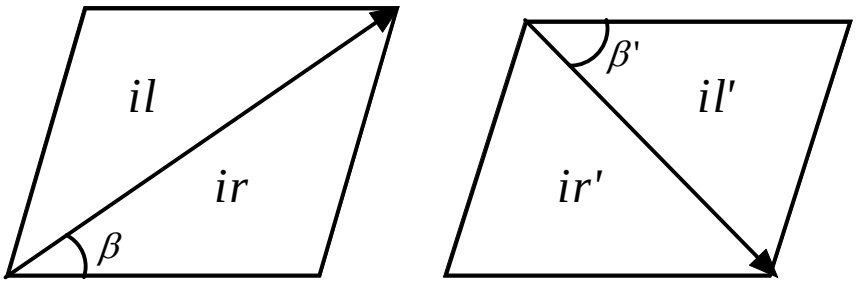
$$E=\sum_{k=1}^{nk}C_k L_k^2 \tag{14}$$

式中L_k为线段k的长度，C_k为弹性系数，nk为网格线段总数，因此E表示网格的“能量”。将目标函数(2-20)或(2-21)对单元顶点坐标(x_i, y_i), i=1, N求导：

$$\frac{\partial E}{\partial x_i}=0 \qquad \frac{\partial E}{\partial y_i}=0 \tag{15}$$

则可得到2N个代数方程组，可用逐点法求解，从而确定网格结点(x_i, y_i)新的位置。

(3)对角交换技术



(a)交换前　　(b)交换后

图2　对角交换示意图

在(1)、(2)两种方法中，都采用保持网格的拓扑结构不变，通过移动结点的位置的方法来改善网格的质量。对角交换技术则改变网格的拓扑连接结构，实现网格局部最小内角最大化，如图2-1所示。设边f的左右单元为il、ir，内角为β_{ili}, β_{iri}, i=1,3; 交换对角线后左右单元为il'、ir'，内角为β'_{ili}, β'_{iri}, i=1,3。则这种方法可表述为：

$$\beta=\max(\min(\beta_{il1},\beta_{il2},\beta_{il3}),\min(\beta_{ir1},\beta_{ir2},\beta_{ir3}))$$
$$\beta'=\max(\min(\beta'_{il1},\beta'_{il2},\beta'_{il3}),\min(\beta'_{ir1},\beta'_{ir2},\beta'_{ir3})) \tag{16}$$

若$\beta<\beta'$,则交换对角线，并修改相应的网格拓扑结构。

数值实验表明：经过(2)方法的后处理可能出现不合理的网格，如网格单元重叠等。一般采用(1)(3)两种方法改善三角形网格的质量，所得到的网格的光滑性及正交性能够令人满意。

（五）Euler不变量

当生成的三角形网格数目多、疏密程度变化大时，可以利用Euler示性数来判断网格生成过程是否正确。根据拓扑分析知：对于任一平面计算区域上的三角形网格，三角形单元总数MNE，顶点总数MNN，边总数MNL，计算区域的Euler示性数S满足：

$$MNE+MNN-MNL=S \tag{17}$$

对于平面m-连通区域，其Euler示性数S=2-m，如单连通区域S=1，双连通区域S=0，本文所生成的网格均满足上述关系式。

（六）数据结构

由于非结构化网格的结构无规律性。在生成非结构化网格时，不但需要存储网格的几

何位置，还需要存储网格的拓扑结构，而后一部分正是非结构化网格比结构化网格内存需求量大的根本原因。因此，选取合理的网格拓扑结构的存储方案对降低内存需求量，便于流动方程的离散和求解，从而减少计算时间是十分重要的。

本文采用等级数据结构来确定网格的拓扑元素：点、线、面：

$$\text{结点（点）}\begin{cases} x\text{坐标} \\ y\text{坐标} \end{cases}$$

$$\text{线段（边）}\begin{cases} \text{结点1（编号）} \\ \text{结点2（编号）} \end{cases}$$

$$\text{三角形（面）}\begin{cases} \text{线段1（编号）} \\ \text{线段2（编号）} \\ \text{线段3（编号）} \end{cases}$$

在利用阵面推进法生成网格时，阵面扮演着很重要的角色，它将整个区域分成已划分好网格的区域和未划分网格的区域。对于已划分好网格的区域，推进面将不再对其产生任何影响。在推进过程中需要频繁地访问推进面上的有向线段，在具体实现中。只需存储推进面上的有向线段编号，存储策略采用“先进先出”的环形队列存储。

当网格生成完毕后，为了便于流动的方程离散和求解，将线段和三角形存储方案改为：

$$\text{线段（边）}\begin{cases} \text{结点1（编号）} \\ \text{结点2（编号）} \\ \text{左单元（编号）} \\ \text{右单元（编号）} \end{cases}$$

$$\text{三角形（面）}\begin{cases} \text{相邻单元1（编号）} \\ \text{相邻单元2（编号）} \\ \text{相邻单元3（编号）} \end{cases}$$

当求解节点数MNN相同时，以上存储部分正是非结构化网格内存需求量大于结构化网格的部分，为(4MNL+3MNE)个变量存储单元。但节点数MNN相同时，三角形单元的个数为四边形个数的近两倍，因此，这部分额外存储量可以用增加了求解单元密度为补偿。对流动方程的数值计算表明：这样的数据结构使方程离散的过程与结构化四边形网格基本相同，离散的工作量基本相当。

2.2.3 阵面推进法算例[23]

利用上节的阵面推进法对三翼型周围的区域进行网格剖分。为了使网格稠密分布能较好地反映出流场参数变化特性，在翼型头部及尾部附近适当加密网格，而在远场应稀疏网格。本算例布置了14个源，其中在每个翼型的前缘、后缘、中心各布置一个源，在远场的四个角点处各布置一个源，另一个源布置在流道的中心。生成网格见图3，网格节点数MNN=3332，边数MNL=9803，三角形单元数MNE = 6469，流动区域为四连通区域，其欧拉示性数S=-2，满足MNN+MNE-MNL=S。

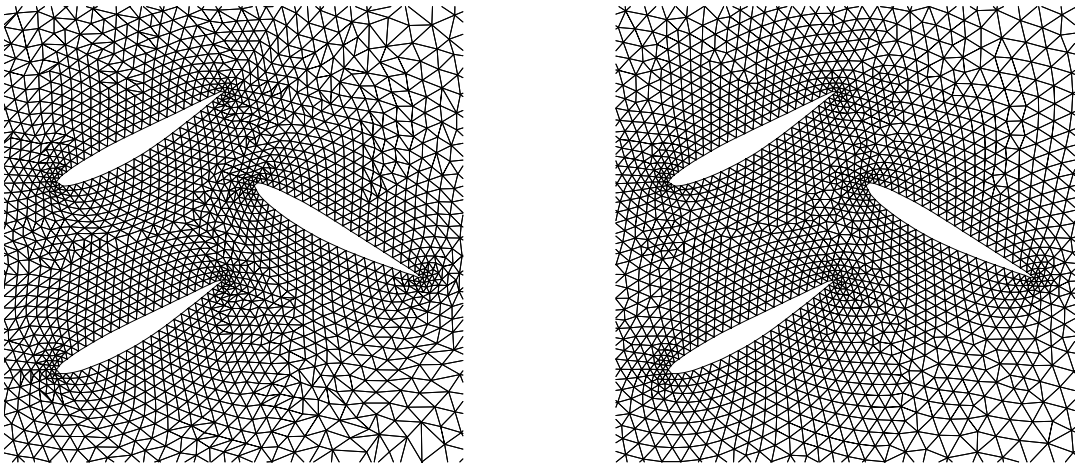


图3 三翼型流场的非结构化网格

§2.3 二维非结构化网格上的SIMPLE算法

2.3.1 直角坐标系下的控制方程及湍流模型

在定常不可压流动，湍流模型采用$k-\varepsilon$模型的假设下，平面笛卡尔坐标系中流动方程可写为通用的对流－扩散方程

$$\frac{\partial}{\partial x_m}(\rho U_m \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_m}(\Gamma^{\Phi}\frac{\partial}{\partial x_m}\Phi) + \overline{S}^{\Phi} \tag{18}$$

式中Φ为任一输运量，Γ^{Φ}为广义扩散系数，$\overline{S}^{\Phi}$为广义源项：

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 \\ U \\ V \\ k \\ \varepsilon \end{bmatrix} \qquad \Gamma^{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu+\mu_t \\ \mu+\mu_t \\ \mu+\mu_t/\sigma_k \\ \mu+\mu_t/\sigma_\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\overline{S}^{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\mu+\mu_t)\frac{\partial U}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\mu_t)\frac{\partial V}{\partial x}\right] \\ -\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\mu+\mu_t)\frac{\partial U}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\mu_t)\frac{\partial V}{\partial y}\right] \\ G-\rho\varepsilon \\ C_1\frac{\varepsilon}{k}G - C_2\rho\frac{\varepsilon^2}{k} \end{bmatrix}$$

$$G = \mu_t\left\{2\left[(\frac{\partial U}{\partial x})^2+(\frac{\partial V}{\partial y})^2\right]+(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x})^2\right\}$$

$$\mu_t = C_\mu \rho\frac{k^2}{\varepsilon}$$

其中x_m表示平面坐标(x,y)，ρ为流体的密度，U_i为沿着x_i方向的流动速度，μ为动力粘性

系数。广义源项中的P为湍流流动的有效压力，包括静压力和脉动速度所引起的压力$\frac{2}{3}\rho k$，G为湍动能生成项，μ_t为湍流粘性系数。

采用标准k-ε模型并结合壁面律求解湍流流动问题，相应的模型经验系数为：

$$C_\mu = 0.09 \quad C_1 = 1.44 \quad C_2 = 1.92 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \tag{19}$$

为了使用壁面函数法，需将靠近壁面的第一个内结点的$y^+ = \frac{C_\mu \rho k^2}{\varepsilon\mu}$布置在11.5~200之间。

2.3.2 对流扩散方程的离散

将对流扩散方程在任一控制体上积分（图4a），并利用Gauss积分定理，得到：

$$\sum_{f=1}^{n}\{(\rho\vec{V}\Phi - \Gamma_\Phi \nabla\Phi)\cdot\vec{A}\}_f = S^\Phi \Delta V \tag{20}$$

n为控制体的面数，ΔV为控制体的体积，$\vec{A}_f$为控制界面。

方程(2)左端的第一部分为对流部分：

$$(\rho\vec{V}\Phi\cdot\vec{A})_f = m_f \Phi_f \tag{21}$$

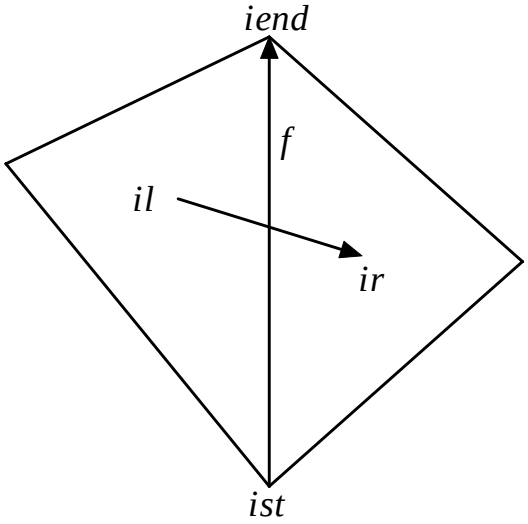
第二部分为扩散部分，出现了界面上的变量梯度$(\nabla\Phi)_f$。在图4（b）虚线包围的体积σV上积分$\nabla\Phi$，得到：

$$(\nabla\Phi)_f = \frac{1}{\sigma V}\int_{\sigma V}\nabla\Phi dV = \frac{1}{\sigma V}\int_{\sigma S}\vec{n}\Phi dS = \frac{1}{\sigma V}(\Phi_{ir}\vec{A}_f - \Phi_{il}\vec{A}_f + \Phi_{iend}\vec{A}_{iend} - \Phi_{ist}\vec{A}_{iend}) \tag{22}$$

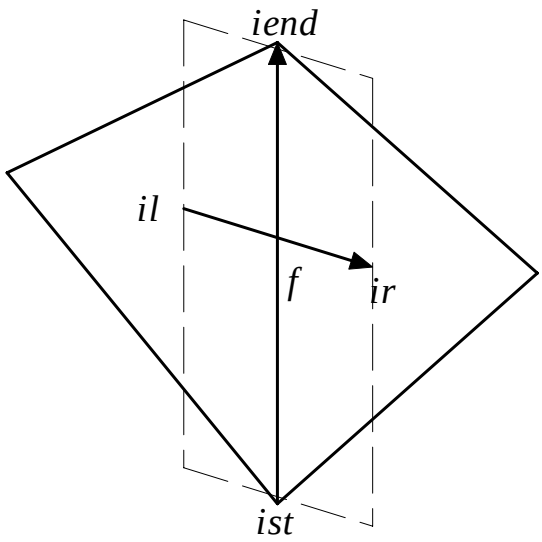
这样就可以得到扩散部分为

$$-\{\Gamma_\Phi\nabla\Phi\cdot\vec{A}\}_f = -\{\frac{\Gamma_\Phi\vec{A}_f^2}{\sigma V}(\Phi_{ir} - \Phi_{il})_f + (\frac{\Gamma_\Phi\vec{A}_f\cdot\vec{A}_{iend}}{\sigma V})_f(\Phi_{iend} - \Phi_{ist})_f\} \tag{23}$$

在方程(4)中的第一项为正交扩散项，第二项为非正交扩散项。其中在非正交项中出现了单元顶点处的变量值，*il, ir, ist, iend,*分别表示界面*f*的左单元，右单元，起点，终点。



（a）



（b）

图4 任意网格示意图。（a）单元积分体积，（b）界面积分体积

方程（3）和（4）中的系数 $m_f = (\rho\vec{V}\cdot\vec{A})_f$ 和 $D_f = \dfrac{\Gamma_\Phi \vec{A}_f^2}{\sigma V}$ 具有明确的物理意义，m_f为通过界面f的质量流量，D_f为通过界面的扩导，引入Peclet准则：$P = m_f / D_f$，则P_Δ数表示输运量Φ通过界面f的对流和扩散能力的相对大小。这与结构化网格上的研究结果是相同的，因此可以借用结构化网格的思想来进一步得出通用方程在非结构化网格上的离散形式。

在计算Φ_f时，由于非结构化网格拓扑结构的无规律性，在较粗的非结构化网格上应用简单的一阶迎风格式容易出现网格相关性问题，而一些在结构化网格上行之有效的高阶差分格式，如高阶迎风格式、QUICK格式、MUSCL格式等很难在非结构化网格上实施。这是因为在采用这些格式确定界面上的对流项时，需要知道远上游结点处的变量值，而在非结构化网格拓扑结构中，远上游结点属于“游荡结点”，无法从网格的拓扑结构中直接确定这些点的位置，只能在流场计算中，根据局部流动方向计算出远上游结点的位置，这给非结构化网格方法进一步增加了计算负担。这里给出根据线性重组建梯度限制因子方法，计算非结构化网格上计算的二阶差分格式

$$\Phi_f = \begin{cases} f_1\Phi_{il} + (1-f_1)\Phi_{ir} & \text{当}\left|\mathrm{P}_\Delta\right| \le 2 \\ \Phi_{up} + \alpha\nabla\Phi\big|_{up} \bullet \Delta\vec{r} & \text{当}\ \mathrm{P}_\Delta > 2 \end{cases} \tag{23}$$

方程(22)中非正交扩散项出现单元顶点处的变量值，这些值可由相邻节点处的变量值插值得到。常用的插值方法有面积加权插值、距离负幂次函数加权插值、最小二乘插值方法。其中前两种方法实现简单，计算速度快，但计算精度低；后一种方法具有二阶精度，但实现复杂，可能出现奇性问题，计算速度慢，数值计算表明：在每轮迭代计算中，约有一半时间花在利用最小二乘法插值各类变量在单元顶点值的计算上，本文利用关系式 $(\nabla\Phi)_f = \overline{(\nabla\Phi)_f}$，对非正交扩散项进行如下变换：

$$\begin{aligned} -\left\{\Gamma^\Phi \nabla\Phi \bullet \overline{A}\right\}_f = & -\left\{\frac{\Gamma^\Phi A}{\sigma V}\right\}_f \left\{A_f(\Phi_{ir} - \Phi_{il})\right\} \\ & + \left\{\left\{\frac{\Gamma^\Phi A}{\sigma V}\right\}_f \left\{A_f(\Phi_{ir} - \Phi_{il})\right\} - (\Gamma^\Phi \overline{\nabla\Phi} \bullet \overline{A})_f\right\} \end{aligned} \tag{24}$$

其中$\overline{()}_f$表示线性值插运算。这样在离散过程中不再出现单元顶点处的变量值，从而极大地减少了计算工作量。

将方程(21)、(23)、(24)代入方程(20)即得：

$$\sum_{f=1}^{n}(m_f\Phi_f - D_f(\Phi_{ir}-\Phi_{il})_f) = S_T^{\Phi} \tag{25}$$

对于任一单元P，可将(25)归纳为：

$$\begin{aligned}
&A_P\Phi_P = \sum A_{nb}\Phi_{nb} + S_T^{\Phi} \\
&A_{nb} = \begin{cases} D_f A(P) & \text{当P为界面}f\text{的左单元} \\ D_f B(P) & \text{当P为界面}f\text{的右单元} \end{cases} \\
&A_P = \sum A_{nb} \\
&A(P_\Delta) = A(|P_\Delta|) + [|-P_\Delta, 0|] \\
&B(P_\Delta) = A(P_\Delta) + P_\Delta \\
&A(|P_\Delta|) = [|0, 1-0.5|P_\Delta||] \\
&S_T^{\Phi} = S_0^{\Phi} + S_1^{\Phi} + S_2^{\Phi} \\
&S_0^{\Phi} = \overline{S}^{\Phi}\Delta V \\
&S_1^{\Phi} = -\left\{\left\{\frac{\Gamma^{\Phi}A}{\sigma V}\right\}_f \{A_f(\Phi_{ir}-\Phi_{il})\} - (\Gamma^{\Phi}\overline{\nabla\Phi}\bullet\vec{A})_f\right\} \\
&S_2^{\Phi} = \left[\left|\frac{0.5|P_\Delta|-1}{|0.5|P_\Delta|-1|}, 0\right|\right]\alpha([|m_f, 0|](1-f_1)(\nabla\Phi)_{il} + [|-m_f, 0|]f_1(\nabla\Phi)_{ir})\bullet\Delta\vec{r} \\
&m_f = \overline{(\rho AU)_f} - \left\{\overline{\left(\frac{\rho\vec{V}\cdot\vec{A}}{A_P}\right)_f\left(\frac{\partial P}{\partial\vec{n}}\right)_f} - \overline{\left(\frac{\rho\vec{V}\cdot\vec{A}}{A_P}\frac{\partial P}{\partial\vec{n}}\right)_f}\right\} \\
&D_f = \left(\frac{\Gamma^{\Phi}A^2}{\sigma V}\right)_f
\end{aligned} \tag{26}$$

其中$[|,|]$表示求最大值运算，$\Delta\vec{r}$为左右单元之间的长度矢量。

2.3.3 压力修正方程

采用SIMPLE算法求解压力，压力修正量P的方程形式上与方程（26）完全相同，相应的系数为：

$$\begin{aligned}
&A_{nb}^{P} = \left(\frac{\rho\Delta V}{A_P}\right)_f\frac{A_f^2}{\sigma V} \\
&S_T^{P''} = -\sum_{f=1}^{n} m_f^*
\end{aligned} \tag{27}$$

§2.4 算例分析

参考文献

1. A M Wimslow. Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a nonuniform triangular mesh. J Comp Phys, 1966, 1: 149-172
2. A Jameson, D Mavriplis. Finite volume solution of two dimensional Euler equations on a regular triangular mesh. AIAA J, 1986 24(4): 611-618
3. Dimitri J Mavriplis. Accurate multigrid solution of the Euler Equations on unstructured and adaptive meshes. J of AIAA, 1990, 28(2): 213-221
4. N T Frink. Upwind scheme for solving the Euler equations on unstructured tetrahedral meshes. AIAA J, 1992, 30(1): 70-77
5. T J Barth. Aspects of unstructured grids and finite volume solvers for the Euler and Navier Stokes equations. Special course on unstructured grid methods for advection dominated flows. AGARD Rep 787, 1992
6. Whitaker, D L, Grossman, B, Lohner, R. Two dimension Euler computations on a triangular mesh using an upwind, finite volume scheme. AIAA-89-0470
7. Mavriplis, D J. Three dimensional multigrid Reynolds-averaged Navier-Stokes solver for unstructured meshes. J of AIAA, 1995, 33(3): 445-453
8. Taniguchi, N, Kobayashi, T. Finite volume method on the unstructured grid system. Computer & Fluids, 1991, 19(3): 287-295
9. Hwang, Y H. Calculations of incompressible flow on a staggered triangular grid. Part 1: mathematical formulation. Numerical Heat Transfer, Part B, 1995, 27: 323-336
10. Michael Thomadakis, Michael Leschziner. A pressure-correction method for the solution of incompressible viscous flows on unstructured grids. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1996, 22: 581-601
11. Y Jiang, Z J Wang, A J Przekwas. Pressure based high order accuracy flow solver on adaptive, mixed type unstructured grids. AIAA-96-0417
12. L Davidson. A pressure correction method for unstructured meshes with arbitrary control volumes. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1996, 22: 265-281
13. S R Mathur, J Y Murthy. Pressure based method for unstructured meshes. Numerical Heat Transfer, Part B, 1997, 31: 195-216
14. A Soria, F Ruel. Assessment of some iterative methods for non-symmetric linear systems arising in computational fluid dynamics. International Journal for Numerical Methods in luids, 1995, 21: 1171-1200
15. Thompson, J F, Warsi, Z U A and Martin, C W. Numerical grid generation, Foundation and application. New York: North-Holland, 1985
16. Bowyer, A. Computing Dirichlet Tessellations. Computer J, 1981,24(2):162-166
17. Watson, D F. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. Computer J, 1981, 24(2): 167-172
18. Weatherill, N P. A method for generating irregular computational grids in multiply connected planar domains. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1988, 8: 181-197
19. S H Lo. A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985, 21:1403-1426
20. R Lohner, P Parikh. Generation of three dimensional unstructured grids by the advancing front method. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1988, 8: 1135-1149
21. S Pirzaeh. Structured background grids for generation of unstructured grids by advancing front method. AIAA J, 1993, 31(2): 257-265
22. Hassan, O, Morgan, K, Probert, E J, Peraire, J. Unstructured tetrahedral mesh generation for three dimensional viscous flows. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, 39: 549-567
23. 张楚华，三维湍流流动的非结构化网格数值解法及其在离心风机中的应用研究，西安交通大学学位论文，1999

西安交通大学研究生课程“流体力学近代进展”CFD部分
第三章 高精度紧致差分格式

张 楚 华
西安交通大学流体机械研究所，710049
电子信箱：chzhang@mail.xjtu.edu.cn

§3.1 概述

流体力学中的许多问题需要采用高精度的数值方法求解，如：湍流的直接数值模拟，大涡模拟；声波传播；流动的稳定性分析等。

采用高精度的数值方法可以降低数值误差，保证真实的物理细节不被数值误差湮没，使数值结果更逼近于真实物理解。如直接数值模拟的一个很重要的应用是通过小涡的脉动，重新计算湍流模式中出现的雷诺应力、湍动能及湍动能耗散率，然后验证及改进现有的湍流模式。如果在直接数值模拟中使用低阶的计算格式，小涡的运动与演变就可能被数值误差抹平。同样在涡噪声计算中，小涡的脉动强度与频率对声波的传播过程直接相关，需要采用高精度方法计算。

谱方法具有很高的精度，但只能适用于简单的流动区域和简单的边界条件。实际上湍流的直接数值模拟方法与大涡模拟方法多采用谱元方法和高精度的差分格式。其中高精度紧致差分格式具有谱元方法和有限差分法的优点：适合于比较复杂的流动区域；使用较短的紧凑的差分格式模板（Scheme Stencil）就能得到较高的格式精度；通过代数方程组将各个节点上的差分格式联系起来；

§3.2 微分方程及差分方程的耗散与频散

3.2.1微分方程的耗散与频散

考察 3 种微分模型方程解的特性：

Euler 方程 $u_t + au_x = 0$ （1a）

NS 方程 $u_t + au_x = \nu u_{xx}$ （1b）

KdV 方程 $u_t + au_x = \varepsilon u_{xxx}$ （1c）

a,ν 为正的常数，ε 可正可负。这些模型方程均为线性方程，其解满足线性叠加法则，可用分立波来表示：

$$u = \sum_k A_k e^{i(kx-\omega t)} \qquad (2)$$

其中 A_k 为分立波的振幅，k 为波数，$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$，$\lambda$ 为波长，ω 为角频率，$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$，T 为周期。

每个分立波分量也是模型方程的解。将任一波数为 k 的分量代入模型方程，得到波数与角频率之间关系：

$$-i\omega + iak = 0\text{，即 } \omega = ak \qquad (3a)$$

$$-i\omega + iak = -\nu k^2\text{，即 } \omega = ak - i\nu k^2 \qquad (3b)$$

$$-i\omega + iak = -i\varepsilon k^3\text{，即 } \omega = ak + \varepsilon k^3 \qquad (3c)$$

将上述关系式分别代入（2），得到 Euler 方程，NS 方程和 KdV 方程的解分别为

$$u = \sum_k A_k e^{ik(x-at)} \qquad (4a)$$

$$u = \sum_k (A_k e^{-\nu k^2 t}) e^{ik(x-at)} \qquad (4b)$$

$$u=\sum_k A_k e^{ik(x-(a+\varepsilon k^2)t)} \tag{4c}$$

Euler 方程解的振幅 A_k 不随时间衰减，即无耗散现象，各个分立波的传播速度均为 a，即无频散现象。

NS 方程解的各分量的振幅 $A_k e^{-\nu k^2 t}$ 按时间的指数规律衰减，当 $t\to\infty$ 时，各分立波的振幅也趋于 0，即方程的解有耗散现象。但每个分立波的传播速度均为 a，方程的解并无频散现象。

KdV 方程的解的各分量的振幅不随时间变化，这个解没有耗散现象，但各个分量的传播速度 $(a+\varepsilon k^2)$ 随波数的不同而有差异，解具有频散现象。

推广上述结论，有耗散但无频散解的微分方程的形式为：

$$u_t+au_x=\sum_n(-1)^n\nu_n u_{2(n-1)x} \tag{5a}$$

无耗散但有频散解的微分方程的形式为：

$$u_t+au_x=\sum_n\varepsilon_n u_{(2n-1)x} \tag{5b}$$

3.2.2 差分方程的耗散与频散

上面指出，Euler 方程的解无耗散无频散。下面从解的放大系数解释这一现象。模型方程在 t 时刻的解为

$$u=\sum_k B_k e^{ik(x-at)} \tag{6a}$$

在 $t+\Delta t$ 时刻的解为

$$u=\sum_k B_k e^{ik(x-a(t+\Delta t))}=\sum_k B_k e^{-ika\Delta t}e^{ik(x-at)} \tag{6b}$$

任一波数 k 的分量解在这两个时刻的放大系数为

$$\gamma_E=\frac{B_k e^{-ika\Delta t}}{B_k}=e^{-ika\Delta t}=\cos ka\Delta t-i\sin ka\Delta t=\gamma_{Er}+i\gamma_{Ei} \tag{7a}$$

$$\left|\gamma_E\right|=(\gamma_{Er}^2+\gamma_{Ei}^2)^{0.5}=1 \tag{7b}$$

放大系数为 1 的解没有耗散，即振幅并不随时间和波数的不同而变化。

从（6b）可以看出，在 t 和 $t+\Delta t$ 两个时刻的解存在相位差，即相移 $\Phi_E=-ka\Delta t$。实际上，相移的正切刚好是放大系数 γ 的虚部与实部之比：

$$\tan\Phi_E=\frac{\gamma_{Ei}}{\gamma_{Er}}=\frac{-\sin ka\Delta t}{\cos ka\Delta t}=\tan(-ka\Delta t) \tag{8}$$

故有 $\Phi_E=-ka\Delta t$。

如用差分方法求解 Euler 模型方程，不同的差分格式会给数值解带来不同的耗散和频散。

把差分数值解与微分方程精确解的放大系数之差称为差分解的耗散，它反映了数值误差使分立波振幅增大或减小的程度。把差分数值解的相移与微分方程解的相移之差称为差分解的频散，它反映了数值误差使分立波相位改变的程度。

例 1．Euler 模型方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 的全隐式中心差分格式为：

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}=0, \tag{9}$$

求出该差分格式数值解的耗散和频散。

解：上面已经知道了模型方程的放大系数 γ_E，下面求差分格式的放大系数 γ。

t 和 $t+\Delta t$ 两个时刻分立波解表示为 $u_j^{n+1}=\sum_k B_k^{n+1}e^{ikj\Delta x}$ 和 $u_{j\pm1}^n=\sum_k B_k^n e^{ik(j\pm1)\Delta x}$，将任

一波数 k 的解代入差分方程得到

$$\frac{B_k^{n+1}-B_k^n}{\Delta t}+a\frac{B_k^{n+1}(e^{ik\Delta x}-e^{-ik\Delta x})}{2\Delta x}=0$$

方程两边同时除以 B_k^n，可以得到放大系数 $\gamma=\frac{B_k^{n+1}}{B_k^n}$ 满足的方程为

$$\gamma-1+\lambda\gamma i\sin k\Delta x=1$$

即

$$\gamma=\frac{1}{1+i\lambda\sin k\Delta x} \tag{10}$$

其中 $\lambda=\frac{a\Delta t}{\Delta x}$ 为 CFL 条件数。

可以发现对于任意的波数 k 和 CFL 条件数 λ，

$|\gamma|=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2\sin^2 k\Delta x}}$ 恒小于等于 1，所以该差分格式绝对稳定。

利用泰勒级数展开，得到放大系数为：

$$|\gamma|=1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2 k\Delta x+\cdots=1-\frac{1}{2}\lambda^2(k\Delta x)^2+\cdots$$

上式表示，差分格式的放大系数 $|\gamma|$ 与微分方程放大系数 1 之差，即差分解的耗散为：

$$|\gamma|-|\gamma_E|=-\frac{1}{2}\lambda^2(k\Delta x)^2+\cdots \tag{11}$$

则称该差分格式具有二阶耗散

差分格式的相移为

$$\Phi=\tan^{-1}(-\lambda\sin k\Delta x)=-\tan^{-1}(\lambda k\Delta x-\frac{1}{6}(k\Delta x)^3+\cdots)$$

$$=-\lambda k\Delta x+\frac{\lambda}{6}(k\Delta x)^3+\frac{\lambda^3}{3}(k\Delta x)^3=-\lambda k\Delta x+\frac{1}{6}(1+2\lambda^2)\lambda(k\Delta x)^3+\cdots$$

这样差分解的相移与微分解的相移之差，即差分解的频散为：

$$\Phi-\Phi_E=\frac{1}{6}(1+2\lambda^2)\lambda(k\Delta x)^3+\cdots \tag{12}$$

则称该差分格式具有 3 阶频散。

为了降低数值解的耗散和频散，需要采用高阶精度的差分格式。

§3.3 一阶导数的高阶紧致差分格式

采用外节点法均匀划分网格，$x_i=h(i-1),1\le i\le N$，自变量区间为$[0,L]$，$L=Nh$，f_i 为变量 f 在节点 x_i 上的值，$f_i^{'}$ 是一阶导数 $(df/dx)(x_i)$ 在节点 x_i 处的差分，$f_i^{''}$ 是二阶导数 $(d^2f/dx^2)(x_i)$ 在节点 x_i 处的差分。差分格式就是利用变量值 f_i 计算各阶导数 $f_i^{'}$，$f_i^{''}$ 的近似方法。

对于普通的差分格式，如二阶中心格式和四阶中心格式，$f_i^{'}$ 分别为：

$$f_i^{'}=\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h},O(h^2), \tag{13}$$

$$f_i^{'}=\frac{f_{i-2}-8f_{i-1}+8f_{i+1}-f_{i+2}}{12h},O(h^4) \tag{14}$$

二阶中心差分仅依赖于 (f_{i+1},f_{i-1})，变量的模板长度为 3，四阶中心差分依赖于

$(f_{i-2}, f_{i-1}, f_{i+1}, f_{i+2})$，变量的模板长度为 5。模板长度指差分格式中出现的变量或者差分所在节点的个数。显然，普通的差分格式（13）和（14）的差分模板长度为 1。为了提高普通差分格式的精度，需要增大变量的模板长度。而在谱方法中，$f_i^{'}$ 通过型函数依赖于所有的变量$(f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots, f_{N-1}, f_N, f_{N+1})$，变量的模板长度为 N+1。高阶紧致差分格式模拟谱方法的全局依赖性的特点，其中的一种 5 参数格式为：

$$\beta f_{i-2}^{'} + \alpha f_{i-1}^{'} + f_i^{'} + \alpha f_{i+1}^{'} + \beta f_{i+2}^{'} = c\frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b\frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (15)$$

该格式的变量模板长度为 7，从 f_{i-3} 到 f_{i+3}，差分模板长度为 5，从 $f_{i-2}^{'}$ 到 $f_{i+2}^{'}$，共出现 5 个待定参数α, β, a, b, c。5 个待定系数的不同组合，决定不同的差分格式及其精度。当这 5 个参数被完全确定以后，通过求解 $f_i^{'}, 1 \le i \le N$ 的 5 对角线性代数方程组就可以得出差分值，这样任意节点处的差分值隐式地依赖于整个区间上的变量值。

采用泰勒级数，将(15)式中的各项在 i 节点展开：

$$f_{i+1}^{'} = f_i^{'} + f_i^{''}h + \frac{1}{2!}f_i^{'''}h^2 + \frac{1}{3!}f_i^{(4)}h^3 + \frac{1}{4!}f_i^{(5)}h^4 + \frac{1}{5!}f_i^{(6)}h^5 + \frac{1}{6!}f_i^{(7)}h^6 + \frac{1}{7!}f_i^{(8)}h^7$$
$$+\frac{1}{8!}f_i^{(9)}h^8 + \frac{1}{9!}f_i^{(10)}h^9 + \frac{1}{10!}f_i^{(11)}h^{10} + \ldots\ldots$$
$$f_{i+1} = f_i + f_i^{'}h + \frac{1}{2!}f_i^{''}h^2 + \frac{1}{3!}f_i^{'''}h^3 + \frac{1}{4!}f_i^{(4)}h^4 + \frac{1}{5!}f_i^{(5)}h^5 + \frac{1}{6!}f_i^{(6)}h^6 + \frac{1}{7!}f_i^{(7)}h^7$$
$$+\frac{1}{8!}f_i^{(8)}h^8 + \frac{1}{9!}f_i^{(9)}h^9 + \frac{1}{10!}f_i^{(10)}h^{10} + \ldots\ldots$$

类似地，也可以写出 $f_{i-2}^{'}, f_{i-1}^{'}, f_{i+2}^{'}, f_{i-2}, f_{i-1}, f_{i+2}$ 在 i 点处的泰勒级数展开式。将这些展开式全部代入（15），整理合并成关于 h^n 的幂次形式，就可以得到高精度紧致差分格式（15）的截断误差。令相应的系数为 0，得到各阶精度差分格式的参数满足的条件：

$$a + b + c = 1 + 2\alpha + 2\beta, \quad \text{2 阶格式} \quad (16.1)$$

$$a + 2^2 b + 3^2 c = 1 + 2\frac{3!}{2!}(\alpha + 2^2\beta), \quad \text{4 阶格式} \quad (16.2)$$

$$a + 2^4 b + 3^4 c = 1 + 2\frac{5!}{4!}(\alpha + 2^4\beta), \quad \text{6 阶格式} \quad (16.3)$$

$$a + 2^6 b + 3^6 c = 1 + 2\frac{7!}{6!}(\alpha + 2^6\beta), \quad \text{8 阶格式} \quad (16.4)$$

$$a + 2^8 b + 3^8 c = 1 + 2\frac{9!}{8!}(\alpha + 2^8\beta), \quad \text{10 阶格式} \quad (16.5)$$

下面讨论几种常见的差分格式。需要指出的是在上述参数方程组中，高阶格式必须同时满足低阶格式条件，如满足 10 阶格式的参数方程组包括（16.1）－(16.5)。

3.3.1 4 阶差分格式

4 阶差分格式的参数满足两个约束方程（16.1）和(16.2)，这样（15）中的 5 个参数简化为 3 个参数，另外 2 个参数为：

$$a = \frac{1}{3}(4 + 2\alpha - 16\beta + 5c)$$
$$b = \frac{1}{3}(-1 + 4\alpha + 22\beta - 8c) \quad (17)$$

进一步的简化令$\alpha = 0, c = 0$,得到单参数的 4 阶精度紧致差分格式：

$$\beta=0,a=\frac{2}{3}(\alpha+2),b=\frac{1}{3}(4\alpha-1),c=0 \qquad (17a)$$

常见的两种 4 阶精度差分格式为：

（1）$\alpha=0$

此时 5 个参数及差分格式分别为：

$$\alpha=0,\beta=0,a=\frac{4}{3},b=-\frac{1}{3},c=0 \qquad (17b)$$

$$f_i^{'}=-\frac{1}{3}\frac{f_{i+2}-f_{i-2}}{4h}+\frac{4}{3}\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}=\frac{f_{i-2}-8f_{i-1}+8f_{i+1}-f_{i+2}}{12h}$$

该式就是标准的四阶中心差分格式。差分模板长度为 1，变量模板长度为 5，见表 1。

（2）$\alpha=\frac{1}{4}$

此时 5 个参数及差分格式分别为：

$$\alpha=\frac{1}{4},\beta=0,a=\frac{3}{2},b=0,c=0 \qquad (17c)$$

$$\frac{1}{4}f_{i-1}^{'}+f_i^{'}+\frac{1}{4}f_{i+1}^{'}=\frac{3}{2}\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}$$

该式就是标准的四阶 Pade 差分格式。差分模板长度为 3，变量模板长度为 3。需要求解一个 3 对角矩阵代数方程组得到差分值。

3.3.2　6 阶差分格式

6 阶差分格式需要满足三个约束方程（16.1），(16.2)和(16.3)，具有（15）形式的 6 阶精度紧致差分格式为 2 参数差分格式：

$$a=\frac{1}{6}(9+\alpha-20\beta),b=\frac{1}{15}(-9+32\alpha+62\beta),c=\frac{1}{10}(1-3\alpha+12\beta) \qquad (18)$$

三种常见的 6 阶精度差分格式为：

（1）$\beta=0,c\neq 0$

此时 5 个参数只有一个待定参数α：

$$\beta=0,a=\frac{1}{6}(9+\alpha),b=\frac{1}{15}(32\alpha-9),c=\frac{1}{10}(1-3\alpha) \qquad (18a)$$

该格式的差分模板长度为 3，变量模板长度为 7，为 3 对角 6 阶紧致差分格式。

（2）$\beta\neq 0,c=0$

此时 5 个参数也只有一个待定参数α：

$$\beta=\frac{1}{12}(-1+3\alpha),a=\frac{2}{9}(8-3\alpha),b=\frac{1}{18}(57\alpha-17),c=0 \qquad (18b)$$

该格式的差分模板长度为 5，变量模板长度为 5，为 5 对角 6 阶紧致差分格式。

（3）$\beta=0,c=0$

此时 5 个参数全部被确定为：

$$\alpha=\frac{1}{3},\beta=0,a=\frac{14}{9},b=\frac{1}{9},c=0 \qquad (18c)$$

$$\frac{1}{3}f_{i-1}^{'}+f_i^{'}+\frac{1}{3}f_{i+1}^{'}=\frac{1}{9}\frac{f_{i+2}-f_{i-2}}{4h}+\frac{14}{9}\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}$$

该格式的差分模板长度为 3，变量模板长度为 5，为 3 对角 6 阶紧致差分格式。

3.3.3　8 阶差分格式

8 阶差分格式需要满足四个约束方程（16.1）－(16.4)，为单参数 8 阶精度紧致差分格式。

将方程(18)代入(16.4)，就可以得到α,β之间的关系为$\beta=\frac{1}{20}(-3+8\alpha)$。这样 5 个参数为：

$$\beta=\frac{1}{20}(-3+8\alpha),a=\frac{1}{6}(12-7\alpha),b=\frac{1}{150}(568\alpha-183),c=\frac{1}{50}(9\alpha-4) \quad (19)$$

两种常见的 8 阶精度差分格式为$\beta=0$或$c=0$，此时 5 个参数被完全确定。

$$\alpha=\frac{3}{8},\beta=0,a=\frac{25}{16},b=\frac{1}{5},c=-\frac{1}{80} \quad (19a)$$

$$\alpha=\frac{4}{9},\beta=\frac{1}{36},a=\frac{40}{27},b=\frac{25}{54},c=0 \quad (19b)$$

3.3.4　10 阶差分格式

10 阶差分格式的 5 个参数需要满足五个约束方程组（16.1）－(16.5)，5 个参数被完全确定，10 阶精度也是差分格式（15）所能得到的最高精度。将方程(19)代入(16.5)，得到：

$$\alpha=\frac{1}{2},\beta=\frac{1}{20},a=\frac{17}{12},b=\frac{101}{150},c=\frac{1}{100} \quad (20)$$

§3.4 二阶导数的高阶紧致差分格式

二阶导数的差分格式的推导过程过程与一阶导数基本相同。首先，写出二阶导数差分格式的通用形式：

$$\beta f''_{i-2}+\alpha f''_{i-1}+f''_i+\alpha f''_{i+1}+\beta f''_{i+2}=c\frac{f_{i+3}-2f_i+f_{i-3}}{9h^2}+b\frac{f_{i+2}-2f_i+f_{i-2}}{4h^2}+a\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2} \quad (21)$$

其次将上式中出现的二阶导数差分值及变量值均在节点 i 处写出泰勒级数展开式，代入并整理合并同类项，得到差分格式（21）的截断误差。最后令相应的系数为 0，得到不同精度差分格式的参数满足的条件：

$$a+b+c=1+2\alpha+2\beta, \quad \text{2 阶格式} \quad (22.1)$$

$$a+2^2b+3^2c=\frac{4!}{2!}(\alpha+2^2\beta), \quad \text{4 阶格式} \quad (22.2)$$

$$a+2^4b+3^4c=\frac{6!}{4!}(\alpha+2^4\beta), \quad \text{6 阶格式} \quad (22.3)$$

$$a+2^6b+3^6c=\frac{8!}{6!}(\alpha+2^6\beta), \quad \text{8 阶格式} \quad (22.4)$$

$$a+2^8b+3^8c=\frac{10!}{8!}(\alpha+2^8\beta), \quad \text{10 阶格式} \quad (22.5)$$

与一阶导数的差分格式的参数方程组(16.1)－(16.5)相比，方程左边的系数完全相同，仅是方程右边的系数有所差异。下面讨论二阶导数的各阶差分格式。

3.4.1　4 阶差分格式

4 阶差分格式的参数满足两个约束方程（22.1）和(22.2)，这样 5 个格式参数有 2 个被确定，为 3 参数差分格式：

$$a=\frac{1}{3}(4-4\alpha-40\beta+5c),b=\frac{1}{3}(-1+10\alpha+46\beta-8c) \quad (23)$$

进一步的简化令$\beta=0,c=0$,得到单参数的 4 阶精度紧致差分格式：

$$\beta=0,a=\frac{4}{3}(1-\alpha),b=\frac{1}{3}(-1+10\alpha),c=0 \quad (23a)$$

两种常见的 4 阶精度差分格式为标准的 4 阶中心差分格式和 4 阶 Pade 差分格式：

（1）4 阶中心差分格式

当$\alpha=0$，(23a)的系数被确定为：

$$\alpha=0,\beta=0,a=\frac{4}{3},b=-\frac{1}{3},c=0 \tag{23b}$$

$$f_i''=-\frac{1}{3}\frac{f_{i+2}-2f_i+f_{i-2}}{4h^2}+\frac{4}{3}\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2}=\frac{-f_{i-2}+16f_{i-1}-30f_i+16f_{i+1}-f_{i+2}}{12h^2}$$

该式就是标准的四阶中心差分格式。差分模板长度为 1，变量模板长度为 5，见表 2。

（2）4 阶 Pade 差分格式

当$\alpha=\frac{1}{10}$时，(23b)中的参数被确定为：

$$\alpha=\frac{1}{10},\beta=0,a=\frac{6}{5},b=0,c=0 \tag{23c}$$

$$\frac{1}{10}f_{i-1}''+f_i''+\frac{1}{10}f_{i+1}''=\frac{6}{5}\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2}$$

该式就是标准的四阶 Pade 差分格式。差分模板长度为 3，变量模板长度为 3。需要求解 3 对角矩阵代数方程组得到差分值。

3.4.2　6 阶差分格式

6 阶差分格式需要满足三个约束方程（22.1）－(22.3)，具有（21）形式的 6 阶精度紧致差分格式为 2 参数格式。将(23)代入方程(22.3)，得到 5 个参数的表达式为

$$a=\frac{1}{4}(6-9\alpha-12\beta),b=\frac{1}{5}(-3+24\alpha-6\beta),c=\frac{1}{20}(2-11\alpha+124\beta) \tag{24}$$

一种常见的 6 阶精度差分格式是 3 对角 6 阶紧致差分格式：

$$\alpha=\frac{2}{11},\beta=0,a=\frac{12}{11},b=\frac{3}{11},c=0 \tag{24a}$$

该格式的差分模板长度为 3，变量模板长度为 5。

3.4.3　8 阶差分格式

8 阶差分格式需要满足四个约束方程（22.1）－(22.4)，为单参数 8 阶精度紧致差分格式。将方程(24)代入(22.4)，可以确定 5 个参数之间的关系为：

$$\beta=\frac{1}{214}(-9+38\alpha),a=\frac{1}{428}(696-1191\alpha),b=\frac{1}{535}(2454\alpha-294),c=\frac{1}{2140}(1179\alpha-344) \tag{25}$$

3.4.4　10 阶差分格式

10 阶差分格式的 5 个参数满足五个约束方程组（22.1）－(22.5)，这样 5 个参数被完全确定，这也是差分格式（22）所能表示的最高精度。将方程(25)代入(22.5)，得到：

$$\alpha=\frac{334}{899},\beta=\frac{43}{1798},a=\frac{1065}{1798},b=\frac{1038}{899},c=\frac{79}{1798} \tag{26}$$

§3.5 边界处理

上两节给出了内节点上的一阶及二阶导数的高阶紧致差分格式。对于周期性边界，格式(15)和(21)在边界点上的差分格式可以利用周期性边界条件写出，左端的系数矩阵为 5 对角循环矩阵，可利用一般数值方法教课书上介绍了方法求解。

这节讨论在一般边界上的高精度紧致差分格式。不失一般性，这里给出边界节点$i=1$处的计算格式。读者可用类似的方法推导出另外一个边界节点$i=N$处的计算格式。

3.5.1 一阶导数在边界上的差分格式

一阶导数的 3 对角差分格式在 $i=1$ 节点处可写成：

$$f_1^{'}+\alpha f_2^{'}=\frac{1}{h}(af_1+bf_2+cf_3+df_4) \tag{27}$$

上述格式为单侧差分格式，方程中出现 5 个参数，需要加以确定。同样地，写出各项在 $i=1$ 边界节点处的泰勒级数展开式，代入（27）并整理合并同类项，得到(27)的截断误差。令相应的系数为 0，得到各阶精度的差分格式满足的参数方程组：

$$a+b+c+d=0 \quad \text{0 阶精度} \tag{28.1}$$

$$a+2c+3d=1+\alpha \quad \text{1 阶精度} \tag{28.2}$$

$$b+2^2c+3^2d=2!\alpha \quad \text{2 阶精度} \tag{28.3}$$

$$b+2^3c+3^3d=\frac{3!}{2!}\alpha \quad \text{3 阶精度} \tag{28.4}$$

$$b+2^4c+3^4d=\frac{4!}{3!}\alpha \quad \text{4 阶精度} \tag{28.5}$$

这里直接写出各阶精度的参数表达式：

$$a=-\frac{1}{2}(3+\alpha+2d),b=2+3d,c=-\frac{1}{2}(1-\alpha+6d)\text{，} \quad \text{2 阶精度} \tag{29}$$

$$a=-\frac{1}{6}(11+2\alpha),b=\frac{1}{2}(6-\alpha),c=\frac{1}{2}(2\alpha-3),d=\frac{1}{6}(2-\alpha)\text{，} \quad \text{3 阶精度} \tag{30}$$

$$\alpha=3,a=-\frac{17}{6},b=\frac{3}{2},c=\frac{3}{2},d=-\frac{1}{6}\text{，} \quad \text{4 阶精度} \tag{31}$$

边界上的差分格式(29)－(31)的截断误差分别为：2 阶精度 $\frac{1}{3!}(2-\alpha-6d)f^{(3)}h^2$，3 阶精度 $\frac{2}{4!}(\alpha-3)f^{(4)}h^3$ 和 4 阶精度 $\frac{6}{5!}f^{(5)}h^4$。可见(27)表示的边界上一阶导数的差分格式最高阶精度为 4。

3.5.2 二阶导数在边界上的差分格式

二阶导数的 3 对角差分格式在 $i=1$ 节点处可写成：

$$f_1^{''}+\alpha f_2^{''}=\frac{1}{h^2}(af_1+bf_2+cf_3+df_4+ef_5) \tag{32}$$

上式出现 6 个参数。同样地，将上式中的各项在 $i=1$ 边界节点处展开成泰勒级数展开式，整理合并同类项，得到(32)的各阶截断误差。令相应的系数为 0，得到各阶精度的差分格式满足的参数方程组：

$$a+b+c+d+e=0 \quad \text{-1 阶精度} \tag{33.1}$$

$$a+2c+3d+4e=0 \quad \text{0 阶精度} \tag{33.2}$$

$$b+2^2c+3^2d+4^2e=1+\alpha \quad \text{1 阶精度} \tag{33.3}$$

$$b+2^3c+3^3d+4^3e=3!\alpha \quad \text{2 阶精度} \tag{33.4}$$

$$b+2^4c+3^4d+4^4e=\frac{4!}{2!}\alpha \quad \text{3 阶精度} \tag{33.5}$$

$$b+2^5c+3^5d+4^5e=\frac{5!}{3!}\alpha \quad \text{4 阶精度} \tag{33.6}$$

这里直接写出系数关系式：

$$a=2+\alpha+e,b=-(5+2\alpha+4e),c=4+\alpha+6e,d=-(1+4e)\text{，} \quad \text{2 阶精度} \tag{34}$$

$$a=\frac{1}{12}(35+11\alpha),b=-\frac{1}{3}(26+5\alpha),c=\frac{1}{2}(19+\alpha),d=\frac{1}{3}(-14+\alpha),e=\frac{1}{12}(11-\alpha)\text{，} \quad \text{3 阶精度} \tag{35}$$

$$\alpha = \frac{145}{12}, b = -\frac{76}{3}, c = \frac{29}{2}, d = -\frac{4}{3}, e = \frac{1}{12}, \qquad \text{4 阶精度} \qquad (36)$$

§3.6 算例分析

参考文献

1. 马铁犹，计算流体动力学，北京航空学院出版社，1986。第一章到第三章
2. 苏铭德，黄素逸，计算流体力学基础，清华大学出版社，1997。B 篇的第一章和第二章
3. Sanjiva K. Lele, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, Journal of Computational Physics, 103:16-42, 1992.过刊闭架

西安交通大学研究生课程“流体力学近代进展”CFD 部分
第四章 三维流体诱发振动的数值方法及应用

张 楚 华
西安交通大学流体机械研究所，710049
电子信箱：chzhang@mail.xjtu.edu.cn

§4.1 引言

流体与结构，只要它们之间存在相对运动，就会出现气动作用。一个典型的作用情形是流体诱发振动：当流体或结构由于自身运动的不稳定性或者人为地激励某种非定常扰动，流体就会给与它接触的物体施加一个非定常气动力，诱发结构振动，反过来又会影响流体的流动及气动力。流体诱发振动现象大量地出现在航空工业及民用工程中，如机翼及航空发动机叶片的颤振与疲劳，深海原油输送管道振动与撕裂，高楼大厦相互干扰与摆振等，对结构安全、机械性能及气动特性等构成重大威胁。研究流体诱发振动对改进结构、机械及气动设计等具有重要意义[1-3]。

早期流体诱发振动模型通常采用很简化的流体模型：如振辐与气动力经验模型；非定常尾迹振动模型及线性势流模型等。最近，欧盟的 UNSI 计划对流体结构相互作用，尤其是机翼颤振的非定常粘性模型与计算方法进行了系统的研究 [4],该计划有英法德意等 15 个欧盟航空工业界及科研院校参加,涉及计算结构力学和计算流体动力学等领域，如结构响应模型，非定常分离流，网格运动与变形，耦合策略，以及更复杂的湍流模型等。本文建立了一种三维流体结构相互作用的理论模型及计算方法，并对圆柱体的三维涡诱导振动进行了分析。

横向流中的圆柱涡诱发振动是一个典型流体诱发振动问题。当来流的 Re 超过 40 以后，尾迹流变得不稳定，涡交替地从圆柱的上下两表面脱落。如果圆柱本身是弹性的，或是弹性支持的刚性圆柱，非定常气动力就会诱发圆柱沿纵向和横向自由振动。当涡脱落频率接近圆柱固有频率时发生共振现象，此时流体与结构强烈耦合，导致流体和结构整个系统产生大幅度的振动。

最早对圆柱涡诱发振动进行系统的研究是从 Feng（1968）开始。Griffin（1992）总结了前人的实验数据，并在一张图中绘制了横向振幅与质量阻尼系数的关系，发现在任何试验中，振幅从来没有超过 1.5 倍直径。Williamson(1996)及 Triantafyllou（1998）的实验也验证了这一结论，并认为这种极限环振动模式与气动力和结构位移间的相位差有关[7,8]。在数值模拟方面，圆柱的结构特性被普遍简化为一个质量－弹簧－阻尼器模型,而流体流动通过求解二维非定常粘性流动方程组得到，如文献[9]。这些模型没有考虑圆柱及流动的的三维特性，如：圆柱的变形和弯曲，三维尾迹以及沿轴向不均匀气动力分布等。Newman 和 Karniadakis (1997)最早对圆柱体的三维流体诱发振动进行了数值研究，他们在横截面上采用谱元方法，而在轴向采用 Fourior 级数展开法计算。这种处理方法大大减轻了三维非定常计算的负荷，但在轴向方向强加了周期性边界条件且波长需预先给定，这就意味着他们的模型只能适合于无限长圆柱的中间一段区域，或圆柱具有周期性支撑。

文中首先给出了一个流体诱发振动模型，然后介绍了非结构化网格数值方法。最后计算了圆柱体的三维流体诱发振动，验证本文方法的有效性和可行性。

§4.2 流体诱发振动模型

4.2.1 流动控制方程组

流动方程是 ALE 框架下三维不可压非定常 Navier Stokes 方程和连续性方程：

$$\nabla \bullet \mathbf{u} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{D_m\mathbf{u}}{Dt}+\nabla\bullet(\mathbf{u}-\mathbf{u_m})\mathbf{u}=-\nabla p+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\mathbf{u} \tag{2}$$

其中u(u, v, w)和$\mathbf{u_m}$ 是流体质点及ALE单元相对于惯性直角坐标系统(x, y, z)的速度。p是压力，Re 是雷诺数，$\frac{D_m}{Dt}$是包含在ALE单元中的传输物理量的时间导数，t是时间，x, y, z轴分别沿纵向，横向和轴向。惯性坐标系的原点固定在圆柱静止时的几何中心。

4.2.2 振动控制方程组

结构振动位移由二阶线性波动方程描述：

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\delta}}{\partial t^2}=\left(2\pi a f_0\right)^2\frac{\partial^2\boldsymbol{\delta}}{\partial z^2}+\frac{\mathbf{C_F}}{2m} \tag{3}$$

对于柱体振动，$\boldsymbol{\delta}(z,t)=(\delta x,\delta y)$是柱体相对于$z$ 轴的纵向和横向位移，$a = L/D$ 是圆柱轴线长度与直径比，$f_0=\sqrt{T/m_c}D/(2LU_{in})$是圆柱的无量纲固有频率，$m=m_c/\rho D^2$是质量比，$m_c$ 是圆柱单位长度质量，T 是圆柱中的张力。$\mathbf{C_F}$是气动力系数：$\mathbf{C_F}(z,t)=(C_D,C_L)$。方程(1)－(3)中的所有变量都用圆柱直径$D$，流体密度$\rho$,， 动力粘性系数$\mu$ 和来流速度U_{in}进行了规范化。文中用Strouhal数St = fD/U_{in}表示刚性圆柱的无量纲涡脱落频率，用 f_s 和 f_v 表示弹性圆柱的无量纲涡脱落频率和振动频率。

4.2.3 流体－结构耦合

流体与结构相互作用通过方程(3)中的$\mathbf{C_F}$和方程(2)中的$\mathbf{u_m}$ 联系的。圆柱截面上的升阻力系数：

$$\mathbf{C_F}(z,t)=(C_D(z,t),C_L(z,t))=2\oint\left(-p\mathbf{n}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\nabla\mathrm{u}+\nabla\mathrm{u}^{\mathrm{T}}\right)\bullet\mathbf{n}\right)ds \tag{4}$$

其中ds 和n是圆柱周长的微元线段及其单位外法向矢量。网格移动速度$\mathbf{u_m}$由Laplacian方程组描述：

$$\nabla^2\mathbf{u_m}=0 \tag{5}$$

其中$\mathbf{u_m}$在圆柱表面的边界条件为圆柱振动速度，在其它边界上为 0。

4.2.4 定解条件

自由振动的柱体两端用平板约束（如图 1a），流动边界条件为：进口处来流均匀；出口处为 Newman 边界条件并满足总体质量守恒；y 轴端面采用对称条件；z 轴端面为平板，采用无滑移边界条件。初始流场假设均匀，从进口流场开始计算。结构振动方程为二阶波动方程，边界条件为柱体与平板相接处位移为 0；初始条件为振动位移及速度均为 0。

§4.3 数值方法

控制方程组(1)－(3)是非定常非线性耦合偏微分方程组。这里采用“迭代耦合算法”实现流体与结构的时间耦合：在每一个时间层上迭代求解方程(1)－(3)，直至控制方程同时满足收敛标准，然后进入下一时间层。流场变量及结构位移保存在同一时间上。为了叙述方便，采用上标 n-1, n, n+1 表示(n-1)Δt, $n\Delta t$, (n+1)Δt 时间层上的变量，用* 来表示在迭代过程中的临时变量。

4.3.1 流体流动的有限体积法

方程(1)－(2)写成通用对流-扩散方程：

$$\frac{D_m\rho\Phi}{Dt}+\nabla\cdot\left(\rho(\mathbf{u}-\mathbf{u_m})\Phi-\Gamma^{\Phi}\nabla\Phi\right)=\bar{S}^{\Phi} \tag{6}$$

使用非结构化网格上的有限体积法，对任一 ALE 单元 P 在 n + 1 时间层上离散方程（6）：

$$\frac{1}{\Delta t}\sum_{q=0}^{n_q}\alpha_q(\rho\Delta V\Phi)^{n+1-q}+\sum_f\left[(\rho(\mathbf{u}-\mathbf{u_m})\Phi-\Gamma^{\Phi}\nabla\Phi)\cdot\mathbf{A}\right]_f^{n+1}=\bar{S}^{\Phi}\Delta V \tag{7}$$

其中方程左边第一项为时间导数的n_q阶向后隐式离散项。这里采用二阶格式： n_q = 2， α_0 = 1.5， α_1 = -2.0， α_2 = 0.5，对流项采用三阶QUICK格式，扩散项及压力梯度项采用二阶中心格式，得到离散代数方程为：

$$A_P^{\Phi}\Phi_P=\sum A_{nb}^{\Phi}\Phi_{nb}+S_T^{\Phi} \tag{8}$$

$$A_P^{\Phi}=\sum A_{nb}^{\Phi}+1.5\frac{\rho\Delta V^{n+1}}{\Delta t}$$

$$S_T^{\Phi}=S_P^{\Phi}-2.0\frac{\rho\Delta V^{n}}{\Delta t}\Phi^{n}+0.5\frac{\rho\Delta V^{n-1}}{\Delta t}\Phi^{n-1}$$

其中 A_{nb} 是周围控制体对单元 p 的影响系数， S_P^{Φ} 包括源项的离散项、高阶对流项及非正交扩散项。压力场通过 SIMPLER 算法更新，得到 $\mathbf{u}_P^*$ 和 p_P^* 。关于 SIMPLER 算法和方程(8)中的系数的具体公式可参见[11，12]。

4.3.2 圆柱运动的有限体积法

使用二阶向后隐式格式离散二阶时间导数项，二阶中心格式离散空间导数项。得到波动方程的离散三对角代数方程组：

$$a_i\boldsymbol{\delta}_i^{n+1}=a_{i-1}\boldsymbol{\delta}_{i-1}^{n+1}+a_{i+1}\boldsymbol{\delta}_{i+1}^{n+1}+\mathbf{b} \tag{9}$$

$$a_{i-1}=\frac{(2af_0)^2}{0.5(z_{i+1}-z_{i-1})(z_i-z_{i-1})}\quad a_{i-1}=\frac{(2af_0)^2}{0.5(z_{i+1}-z_{i-1})(z_{i+1}-z_i)}$$

$$a_i=a_{i-1}+a_{i+1}+\frac{1}{\Delta t^2}$$

$$\mathbf{b}=\frac{\mathbf{C_F}}{2m}-\frac{1}{\Delta t^2}(\boldsymbol{\delta}_i^{n-2}-2\boldsymbol{\delta}_i^{n-1})$$

4.3.3 流体诱发振动的数值求解基本步骤

假设已经得到了前 n 时间层上的参数。

(1) 求解流动方程组的离散代数方程组（8）得到流场的速度和压力（$\mathbf{u}_P^*$，p_P^*）；

(2) 积分方程（4）得到升阻力系数C_F；

(3) 求解离散振动方程组（9）得到结构振动位移$\boldsymbol{\delta}_i^*$；

(4) 求解方程（5）得到网格运动速度$\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^*$；

(5) 在（n+1）时间层上重复步骤（1）—（4），直到满足收敛标准，然后进入下一时间层计算。

本文在每个时间层的收敛标准是所有控制体积中的剩余质量流量绝对值总和下降到0.001 倍的总进口质量流量。计算表明，在统计收敛的时间层上，迭代耦合次数一般为 2—3 次。

§4.4 算例分析

本节对横向流中单圆柱体的涡诱发振动进行计算。流动区域从坐标原点沿 x 轴向上游沿伸-12.5D，向下游沿伸 22.5D，沿 y 轴向两端延伸-8D 和 8D，沿 z 轴向两端延伸 - 0.5L 和 0.5L 至平板；见图 1a。采用非结构化网格对流动区域进行空间离散：首先在 x—y 平面上将流动区域离散成 6500 个四边形，其中在圆柱周围使用 O 型网格，而在其它区域使用 H 型网格。然后在 z 方向非均匀积叠 64 层形成空间网格。最终得到的网格共包含 416，000 个六面体单元。无量纲时间步长 $\Delta t=0.01$。40000 个时间步，即 400 个单位时间在配置为 2.6G CPU

和 1G RDRAM 内存的 Dell 微机上运行约 21 天。将网格在 z 轴方向上细化为 96 层的计算表明横向振辐的误差在 5%以内。

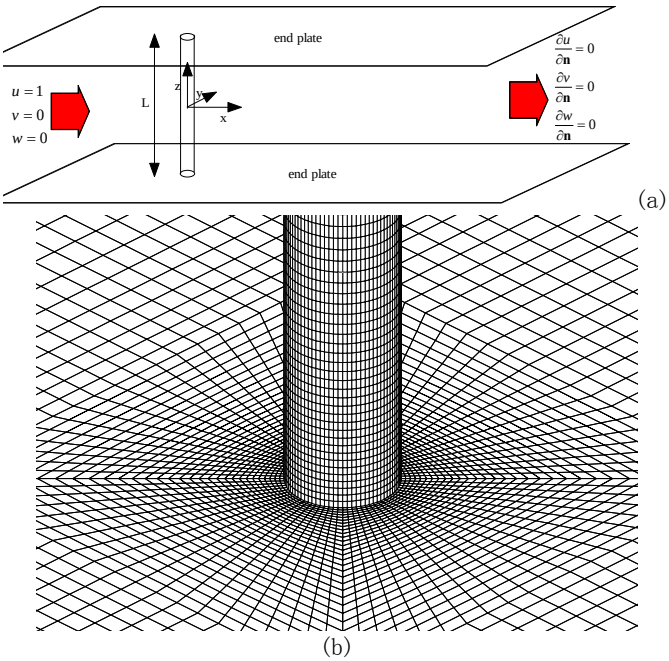


图 1 问题描述。(a)流体—结构系统，(b)局部网格

Fig. 1 Problem description. (a) Fluid-structure system, (b) Local mesh

4.4.1 刚性圆柱体

流体诱发振动分析的关键在于准确获取气动力。因此首先对刚性圆柱体的三维非定常绕流进行计算。流动条件为 $a = 16$，Re＝100 层流状态。图 2 给出了本文的有限体积法（FVM）计算与文献[12]中的 Lattice Boltzman 法（LBM）计算的比较情况。$C_L^{'}$ 表示均方根脉动升力系数。两种计算方法得到 $C_L^{'}$ 符合很好。图 3 为中间截面上的 C_D 和 C_L 随时间的变化历程。FVM 计算得到的 St 为 0.142，与 LBM 法[15]计算得到的 0.145 和[13]的实验测量值 0.140 相比，相对误差均在 4%以内。验证了所使用的计算方法对非定常流预测合理性。

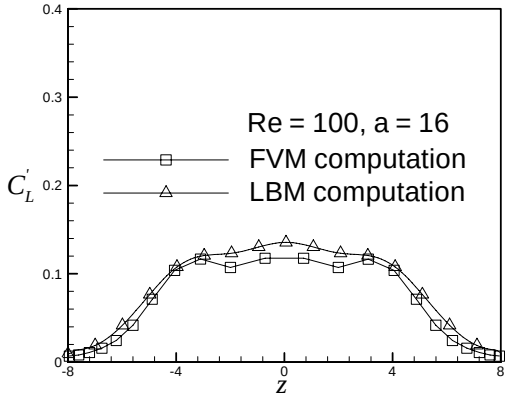


图 2 沿刚性圆柱轴向分布的气动力

Fig. 2 The fluid force along rigid cylinder span

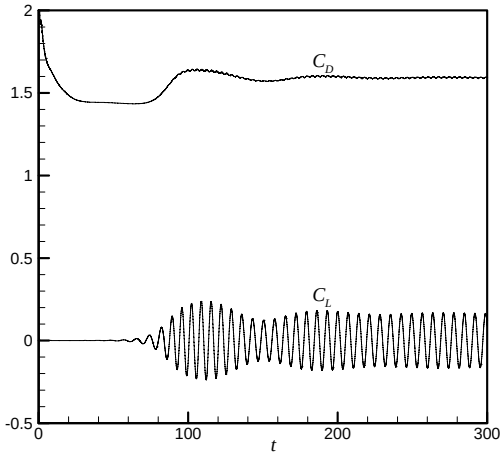


图 3 刚性圆柱体中间截面上的气动力随时间变化历程

Fig. 3 Time histories of fluid force at mid-span of rigid cylinder

4.4.2 受限振动圆柱体

由于横向振幅一般比纵向振幅大，这里首先介绍弹性圆柱只沿横向运动，而无纵向运动的受限振动情况。流动条件与刚性圆柱体绕流相同，结构条件为 $f_0 = St = 0.142$，$m = 10$，即涡激振与结构形成一阶共振情况。

图 4 给出中间截面的气动力随时间变化过程。相对于刚性圆柱，圆柱的振动使阻力发生明显的变化，平均阻力系数增大约 1.6 倍，而脉动阻力系数增加了两个数量级以上。这主要是圆柱振动使上游来流速度大小及方向相对于运动圆柱在不停变化所致。

图 5 给出了升力系数及振动位移的频谱。在受限振动情况下，涡脱落频率 f_s 及横向振动频率 f_v 均为 0.177。除了基频以外，在频谱图上发现了一系列高频分量，但基频的强度比高频分量大得多。这说明气动力及振动位移随时间主要呈简谐波动规律变化。这也可以从图 6 升力系数及横向振动位移的变化过程看出。在 $z = 4.62$ 圆柱截面及 $z = 0$ 圆柱中间截面处的振幅分别为 0.33 和 0.54。

流体流动在诱导结构振动的同时，还对结构振动具有约束作用。这里用流体与结构之间的相互做功过程来分析流体－结构的自我约束机理。

设在任一圆柱截面 z 处的气动力落后于振动位移的相位为 $\theta(z)$：

$$C_L(z,t) = C_{L,\max}(z)\sin(2\pi ft) \tag{10}$$

$$\delta y(z,t) = \delta y_{\max}(z)\sin(2\pi ft - \theta(z)) \tag{11}$$

则流体对结构的功率 W 为：

$$\begin{aligned} W(z) &= C_L(z)\cdot\frac{d\delta y(z,t)}{dt} \\ &= \pi f C_{L,\max}(z)\delta y_{\max}(z) \\ &\times(\sin(4\pi ft + \theta(z)) + \sin(\theta(z))) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\overline{W}(z) = \pi f C_{L,\max}(z)\delta y_{\max}(z)\sin(\theta(z)) \tag{13}$$

$$W'(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi f C_{L,\max}(z)\delta y_{\max}(z) \tag{14}$$

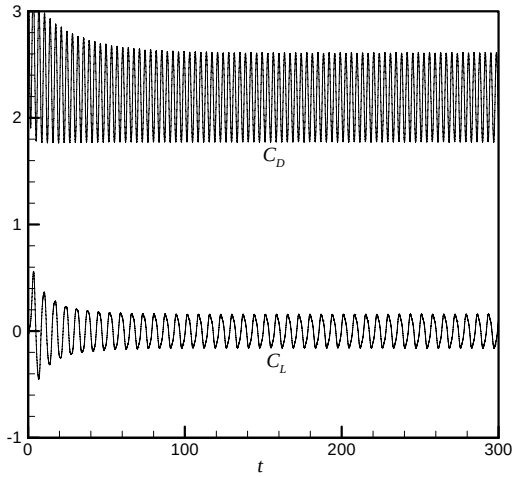
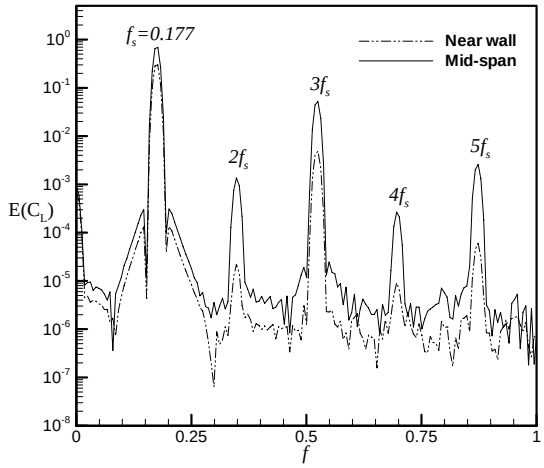
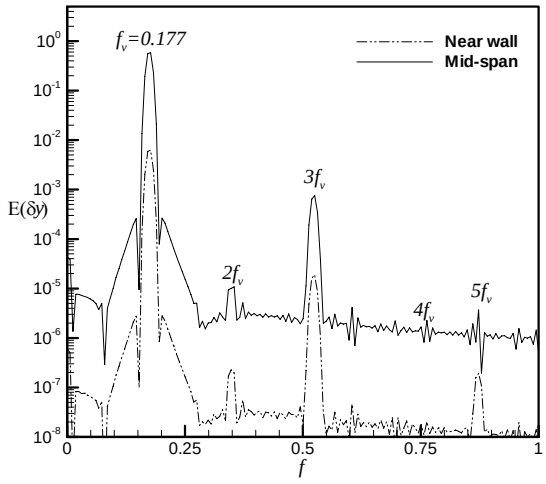


图 4 受限振动圆柱中间截面的气动力随时间变化过程

Fig. 4 Time histories of fluid force at mid-span of constrained vibrating cylinder



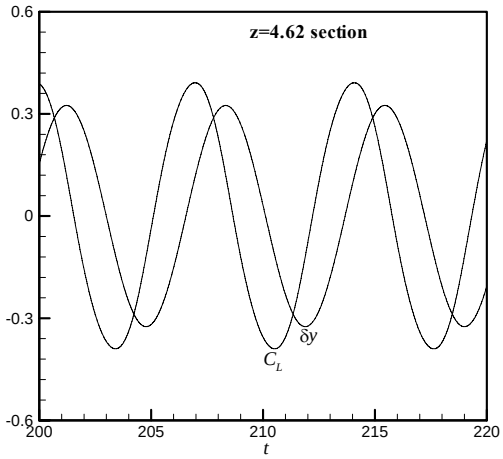
(a)



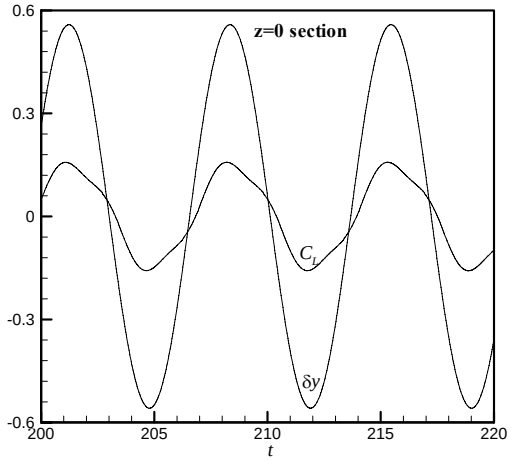
(b)

图 5 受限振动圆柱频谱。(a)升力系数，(b)横向位移

Fig. 5 Spectra of constrained vibrating cylinder. (a) lift coefficient,(b)transverse displacement.



(a)



(b)

图 6 受限振动圆柱的气动力及振动位移的时间历程。(a) z = 4.62 截面，(b) z = 0 中间截面

Fig. 6 Time histories of fluid force and vibration displacement of constrained vibrating cylinder. (a) at z = 4.62 section, (b) at z = 0 mid-span section

图 7 给出 W 的平均值与脉动值沿轴线的变化曲线。由公式（13），平均功率即每个振动周期内流体作用在结构上的功率与气动力和位移间的相位差直接相关。在圆柱中间截面处，振幅虽然很大，但升力与结构振动相位差很小，流体对结构的做功为负，起阻尼作用；相反，在远离中间截面区域，升力落后于结构振动约 45°相位，每个周期内流体对结构的功率为正，流体流动对结构振动形成激振作用。

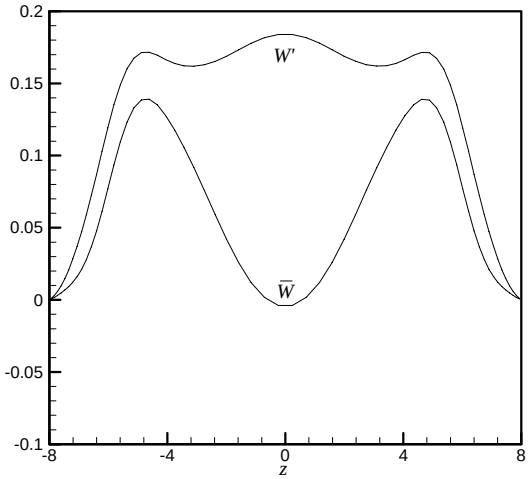


图 7 流体对受限振动圆柱体结构的功率平均值与脉动值沿轴线关系。

Fig. 7 The mean and fluctuation power exerted on constrained cylinder by fluid along span

4.4.3 自由振动圆柱体

现在介绍圆柱自由振动的计算结果。流动及结构条件与受限振动圆柱体相同，但圆柱在横向及纵向都可以进行自由振动，使圆柱发生三维扭曲变形。

图 8 给出半个振动周期内圆柱中心线的横向位移变化过程。横向振辐的最大值发生在圆柱中间截面处，约为 0.68。图 9 为相平面$(\delta x, \delta y)$上圆柱在 5 个振动周期内的运动轨迹，是典型的 Strouhal 型激振模式，纵向振频是横向振频的 2 倍，沿“8”字轨迹振动。在圆柱中心截面处，流动阻力使平衡位置向下游漂移 0.178，纵向振幅的脉动值约为 0.01,远小于横向脉动振幅。

图 10 为自由振动圆柱的升力与横向位移的频谱。此时涡脱落频率和振动频率，即流体－结构系统的振动频率为 0.140，与圆柱的固有频率非常接近，形成了一阶共振现象。$f_v = 0.140$ 振动频率对应的强度远大于其它高频的强度。但在中间截面上，$f_s = 0.140$ 对应的气动力强度与$3f_s$对应的强度相当，反映在气动力随时间变化历程上（图 11b），升力变化曲线明显由一个基频 f_v 和一个高频$3f_s$脉动合成。这说明在中间截面附近，流体对结构振动的约束主要表现为$3f_s$高频气动力对基频 f_v 振动的阻尼作用，而在远离中间截面的区域，升力相位落后于振动相位，每个周期内流体对结构的功率为正，流体流动对结构振动形成激振作用。

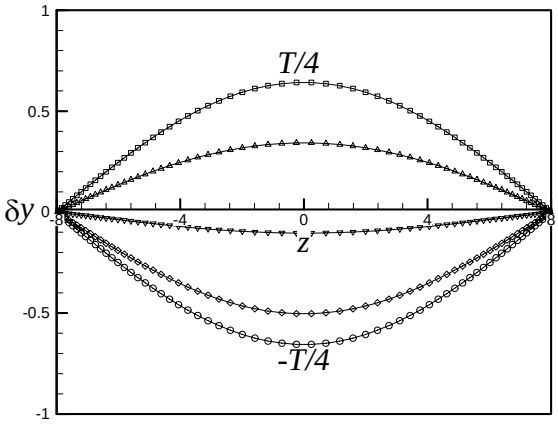


图 8 自由振动圆柱在半个振动周期内横向振动位移。

Fig. 8 *y*-component of freely vibrating cable profile within half a vibration period.

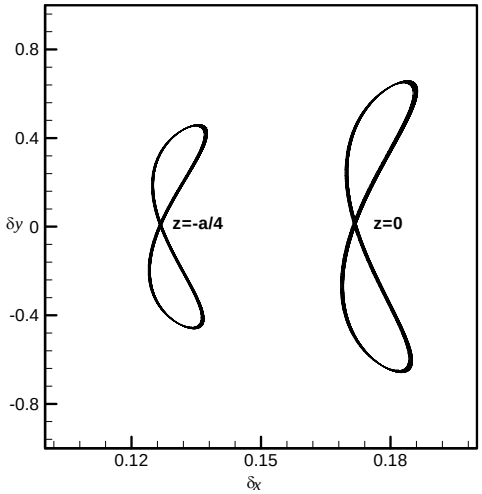
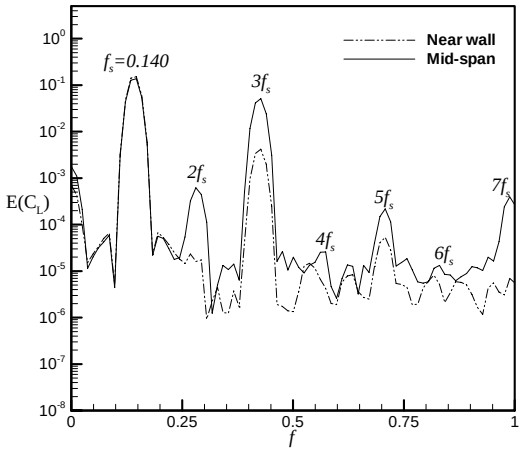
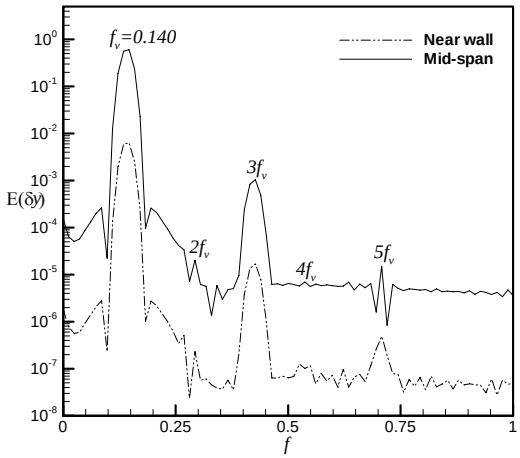


图 9 自由振动圆柱在相平面上的运动轨迹。

Fig. 9 Trajectory of freely vibrating cylinder at phase plane.



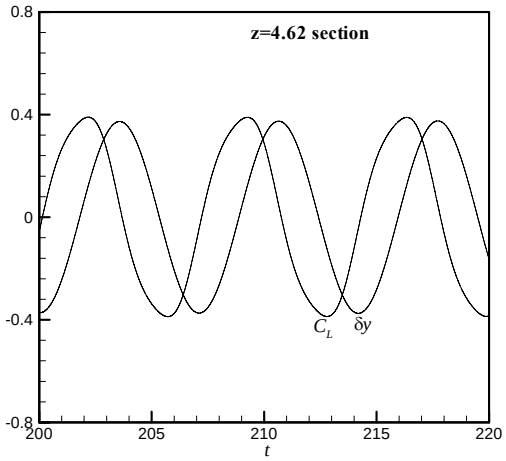
(a)



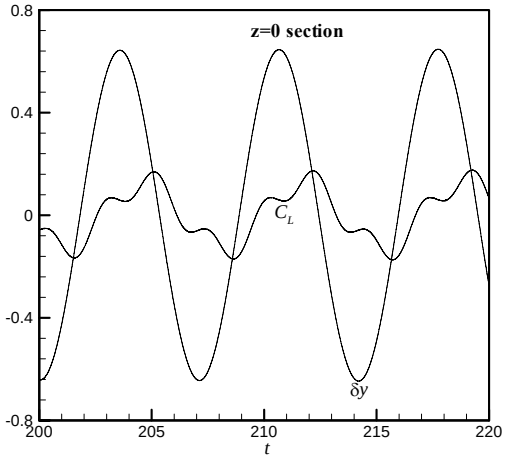
(b)

图 10 自由振动圆柱频谱。(a)升力系数，(b)横向位移

Fig 10. Spectra of freely vibrating cylinder. (a) lift coefficient,(b)transverse displacement.



(a)



(b)

图 11 自由振动圆柱的气动力及振动位移的时间历程。(a) z = 4.62 截面，(b) z = 0 中间截面

Fig 11. Time histories of fluid force and vibration displacement of freely vibrating cylinder. (a) at z = 4.62 section, (b) at z = 0 mid-span section

§4.5 结论

建立了流体诱发振动的力学及数值模型。对刚性圆柱体三维非定常绕流、受限及自由振动圆柱体在共振气动激励力下的流体诱发振动进行了数值计算。计算结果表明：

（1）计算结果与已有的计算及实验结果吻合较好，验证了计算方法对非定常流动预测能力。

（2）圆柱体的流体－结构相互作用增大了气动力负荷，尤其是脉动阻力系数比刚性圆柱体增加了 2 个数量级。

（3）横向流中弹性圆柱体的流体诱发振动表现为 Strouhal 型振动模式，纵向振频是横向振频的两倍，纵向振辐比横向振辐小得多。

（4）利用气动力对结构做功过程揭示了流体诱发振动的自我约束机制。在远离圆柱中间截面的区域，气动力通过稳定的相位差激励圆柱振动，而在中间截面最大振幅区域附近，流体通过高频气动力对结构振动形成阻尼作用，使气动力做功为负。

参考文献

1. Bearman PW. Vortex shedding from oscillating buff bodies. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1984, **16**:195-222
2. Blevins RD. *Flow induced vibrations*. NY, USA: Van Nostrand Reinhold,1990
3. Dowell EH, Hall KC. Modeling of fluid structure interaction. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2001, **33**:445-490
4. Haase W, Selmin V, Winzell B. *Progress in computational flow structure interaction: Results of the project UNSI, supported by the European Union 1998-2000*. Berlin: Springer, 2002
5. Feng CC. The measurement of vortex induced effects in flow past stationary and oscillating circular and D-section cylinders. M. A. Sc. thesis, University of British Columbia, Canada, 1968
6. Griffin OM. Vortex induced vibrations of marine structures in uniform and sheared currents. *NSF Workshop on Riser Dynamics*, University of Michigan, 1992
7. Khalak A, Williamson CHK. Dynamics of a hydroelastic cylinder with very low mass and damping. *J. Fluids Struct*, 1996,**10**:455-472
8. Hover FS, Techet AH, Triantafyllou MS. Forces on oscillating uniform and tapered cylinders in cross flow. *J. Fluid Mech*. 1998, **363**: 97-114

9. So RMC, Liu Y, Chan ST, Lam K. Numerical studies of a freely vibrating cylinder in a cross flow. *J. Fluids Struct.* 2001,15: 845-866
10. Newman D, Karniadakis GE. A direct numerical simulation study of flow past a freely vibrating cable. *J. Fluid Mech.* 1997,344:95-136
11. Zhang CH, Zhao XY, Miao YM, Gu CG. Application of an unstructured grid method for three dimensional turbulent flows in a backswept fan impeller. *ASME 2000 FED Summer Meeting*, *ASME-FEDSM2000-11061*, Boston, USA, June 11-15, 2000
12. Zhang CH, Liu Y, So RMC. Three Dimensional Wake Interactions for Cylinders Array in a Cross Flow. in: E. de Langre and F.Axisa (eds.). Flow-Induced Vibration, Vol.1: 313-318, Imprime en France,2004
13. Norberg C. An experimental investigation of the flow around a circular cylinder: influence of aspect ratio. *J. Fluid Mech.* 1994,258:287-316

致　谢

本讲义主要取材于西安交通大学研究生课程“流体力学近代进展”CFD部分的教学内容，共16学时。部分内容曾在研究生课程“张量分析及其工程应用”，“张量分析及其在叶轮机械内流理论应用”，及本科生课程“流体机械内流数值方法基础”讲授过，参加过课程学习的研究生、本科生提出了许多很好的建议与切身感受，使作者能不断完善该讲义的编写，在此深表感谢。

由于作者水平有限，时间仓卒，漏洞错误难免，敬请您使用后提出宝贵意见及批评。作者不甚感激！