第一章 集类与测度

§1 集合运算与集类

1.10 (1) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$,
(2) $(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$,
(3) $(A_1\cup A_2)\Delta(B_1\cup B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$.

证明

$$\begin{aligned}
(A\Delta B)\Delta C &= ([AB^c\cup A^cB]\cap C^c)\cup([AB^c\cup A^cB]^c\cap C)\\
&= (AB^cC^c)\cup(A^cBC^c)\cup[(A^cB^c\cup AB)\cap C]\\
&= A(B^cC^c\cup BC)\cup A^c(BC^c\cup B^cC)\\
&= A[(B\cup C)\cap(B^c\cup C^c)]^c\cup A^c(B\Delta C)\\
&= A[BC^c\cup CB^c]^c\cup A^c(B\Delta C)\\
&= A(B\Delta C)^c\cup A^c(B\Delta C)\\
&= A\Delta(B\Delta C).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A\cap C)\Delta(B\cap C) &= ([AC\cap(BC)^c]\cup[(AC)^c\cap BC]\\
&= [AC\cap(B^c\cup C^c)]\cup[(A^c\cup C^c)\cap BC]\\
&= AB^cC\cup A^cBC\\
&= (AB^c\cup A^cB)\cap C\\
&= (A\Delta B)\Delta C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_1\cup A_2)\Delta(B_1\cup B_2) &= [(A_1\cup A_2)\cap(B_1\cup B_2)^c]\cup[(A_1\cup A_2)^c\cap(B_1\cup B_2)]\\
&= A_1B_1^cB_2^c\cup A_2B_1^cB_2^c\cup A_1^cA_2^cB_1\cup A_1^cA_2^cB_2\subset A_1B_1^c\cup A_2B_2^c\cup A_1^cB_1\cup A_2^cB_2\\
&= (A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2).
\end{aligned}$$

1.11 $(\liminf\limits_{n\to\infty}A_n)\cap(\limsup\limits_{n\to\infty}B_n)\subset\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n\cap B_n)$.

证明

$$\begin{aligned}
(\liminf_{n\to\infty}A_n)\cap(\limsup_{n\to\infty}B_n) &\subset (\limsup_{n\to\infty}A_n)\cap(\limsup_{n\to\infty}B_n)\\
&= (\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)\bigcap(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}B_k)\\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(A_k\cap B_k)\\
&= \limsup_{n\to\infty}(A_n\cap B_n).
\end{aligned}$$

1.12 对可列不交并封闭的代数为 σ- 代数.

证明 设代数 $\mathcal{C}$ 对可列不交并封闭，并设 $\forall n\geq 1$, $A_n\in\mathcal{C}$. 由题设知

$$A_n^c\in\mathcal{C},\quad \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c = A_1^c+\sum_{n=2}^{\infty}(A_n^c-A_{n-1}^c)\in\mathcal{C}$$

又 $\mathcal{C}$ 为代数，故

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}.$$

即 $\mathcal{C}$ 对可列交及取余运算封闭．从而有 $\mathcal{C}$ 为 σ- 代数.

1.13 若 $\mathcal{C}$ 同时为代数和单调类或同时为 π- 类和 λ- 类，则 $\mathcal{C}$ 为 σ- 代数.

证明 (1) 设 $\mathcal{C}$ 同时为代数和单调类.

要证 $\mathcal{C}$ 为 σ- 代数，只需证 $\mathcal{C}$ 对可列交运算封闭．于是设 $\forall n \geq 1,\ A_n \in \mathcal{C}$. 记 $B_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$, 则 $B_n \downarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 因 $\mathcal{C}$ 为代数，故 $B_n \in \mathcal{C}$. 又 $\mathcal{C}$ 为单调类，从而有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$.

(2) 设 $\mathcal{C}$ 同时为 π- 类和 λ- 类.

方法一：一方面，因 $\mathcal{C}$ 为 λ- 类，故 $\mathcal{C}$ 对取余运算封闭．又 $\mathcal{C}$ 为 π- 类，故 $\mathcal{C}$ 对有限交运算封闭，即 $\mathcal{C}$ 为代数．另一方面， $\mathcal{C}$ 是 λ- 类蕴含着 $\mathcal{C}$ 是单调类，从而由 (1) 得 $\mathcal{C}$ 为 σ- 代数.

方法二：要证 $\mathcal{C}$ 为 σ- 代数，只需证 $\mathcal{C}$ 对可列交封闭.

设 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1$, 则 $A_n^c \in \mathcal{C}$. 记 $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k^c$, 则 $B_n \in \mathcal{C}$(因 $\mathcal{C}$ 为代数), 又 $\mathcal{C}$ 为 λ- 类且 $B_n \uparrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c$, 故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{C}$, 即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{C}.$$

1.14 设 $\mathcal{C}$ 为半代数，则 $\mathcal{C}_{\sum f}$ 为代数.

证明 (1) 由 $\mathcal{C}$ 为半代数知 $\mathcal{C}$ 对有限交运算封闭．于是据命题 1.7(2) 有 $\mathcal{C}_{\sum f}$ 对有限交运算封闭.

(2)$\forall A \in \mathcal{C}_{\sum f}$, 存在 $\{A_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathcal{C}, A_i A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,\cdots,n$ 使得 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$. 且由 $\mathcal{C}$ 是半代数知 $\Omega \backslash A_i \in \mathcal{C}_{\sum f}$. 于是

$$A^c = \Omega \backslash \sum_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c = \bigcap_{i=1}^{n} (\Omega \backslash A_i) \in \mathcal{C}_{\sum f}.$$

综合 (1),(2) 得 $\mathcal{C}_{\sum f}$ 为代数.

1.15 λ- 类定义中的条件 (i) 和 (ii) 等价于如下二条件：

(i)$'$ $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$;

(ii)$'$ $A, B \in \mathcal{C},\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$.

证明 (i),(ii)$\Rightarrow$(i)$'$,(ii)$'$.

首先，由 $\Omega \in \mathcal{C}$ 知 $\forall A \in \mathcal{C}$ 有 $A \subset \Omega$, 故 $A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{C}$. 即 (i)$'$ 成立.

其次， $\forall A, B \in \mathcal{C}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \subset A^c$且$A^c \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \backslash B \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \cap B^c \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$, 即 (ii)$'$ 成立.

(i)$'$,(ii)$'$$\Rightarrow$(i),(ii).

首先， $\forall A \in \mathcal{C}$ 有 $A^c \in \mathcal{C},\ A \cap A^c = \emptyset$, 故 $A \cup A^c \in \mathcal{C}$, 即 $\Omega \in \mathcal{C}$, 从而 (i) 成立.

其次，若 $A,B\in\mathcal{C}$, $B\subset A$, 则 $A^c\in\mathcal{C}$, $B\in\mathcal{C}, A^c\cap B=\emptyset$, 故 $A^c\cup B\in\mathcal{C}$, 于是 $A\cap B^c\in\mathcal{C}$, 即 $A\backslash B\in\mathcal{C}$, 从而 (ii) 成立.

1.16 设 $\mathcal{C}$ 为一集类，且 $\emptyset\in\mathcal{C}$, 令

$$\mathcal{G}=\left\{\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m}B_j^c\right):n,m\geq 1,A_i,B_j\in\mathcal{C},1\leq i\leq n,1\leq j\leq m\right\},$$

则 $\mathcal{G}\supset\mathcal{C}$, 且 $\mathcal{G}$ 为半环. 特别若 $\mathcal{C}$ 对有限并及有限交封闭，则 $\{A\cap B^c\mid A,B\in\mathcal{C}\}$ 为半环.

证明 $\forall A\in\mathcal{C}$, 令 $m=n=1$, $B=\emptyset$, 则由 $\mathcal{G}$ 定义知 $A=A\cap\Omega\in\mathcal{G}$. 故 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}$. $\forall A,B\in\mathcal{G}$, 则 $\exists n_0,m_0,n_1,m_1$, 使得

$$A=\left(\bigcap_{i=1}^{n_0}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m_0}B_j^c\right),\quad B=\left(\bigcap_{l=1}^{n_1}A_l\right)\cap\left(\bigcap_{k=1}^{m_1}B_k^c\right),A_i,A_l,B_j,B_k\in\mathcal{C}.$$

于是

$$A\cap B=\left(\bigcap_{i=1}^{n_0}A_i\cap\bigcap_{l=1}^{n_1}A_l\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m_0}B_j^c\cap\bigcap_{k=1}^{m_1}B_k^c\right),$$

即 $A\cap B\in\mathcal{G}$. 又

$$\begin{aligned}A\backslash B&=\left(\bigcap_{i=1}^{n_0}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m_0}B_j^c\right)\cap\left[\left(\bigcap_{l=1}^{n_1}A_l\right)\cap\left(\bigcap_{k=1}^{m_1}B_k^c\right)\right]^c\\&=\left(\bigcap_{i=1}^{n_0}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m_0}B_j^c\right)\cap\left[(\bigcup_{l=1}^{n_1}A_l^c)\cup(\bigcup_{k=1}^{m_1}B_k)\right]\\&=\bigcup_{l=1}^{n_1}\bigcup_{k=1}^{m_1}(A_l^c\cup B_k)\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n_0}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m_0}B_j^c\right).\end{aligned}$$

且任一可列并都可表示为可列不交并，故 $A\backslash B\in\mathcal{G}_{\sum f}$, 即 $\mathcal{G}$ 为半环.

特别地，记 $\overline{\mathcal{G}}=\{A\cap B^c\mid A,B\in\mathcal{C}\}$. 于是 $\forall A,B\in\overline{\mathcal{G}}$, 存在 $C,D,E,F\in\mathcal{C}$ 使得 $A=C\cap E^c$, $B=D\cap F^c$. 因 $\mathcal{C}$ 对有限并及有限交封闭，故

$$A\cap B=C\cap D\cap E^c\cap F^c=C\cap D\cap(E\cup F)^c\in\overline{\mathcal{G}},$$

$$\begin{aligned}A\backslash B=&C\cap E^c\cap(D\cap F^c)^c=C\cap(D\cup E)^c\cup(C\cap F)\cap E^c\\=&C\cap(D\cup E)^c\cap(C\cap F\cap E^c)^c\cup(C\cap(D\cup E)^c)^c\cap(C\cap F)\cap E^c\\&\cup C\cap D^c\cap E^c\cap C\cap F\cap E^c\\=&C\cap D^c\cap E^c\cap(C^c\cup F^c\cup E)\cup(C^c\cup D\cup E)\cap C\cap F\cap E^c\cup C\cap D^c\cap E^c\cap F\\=&C\cap(D\cup E\cup F)^c\cup D\cap C\cap F\cap E^c\cup C\cap F\cap(D\cup E)^c\in\overline{\mathcal{G}}_{\sum f},\end{aligned}$$

即 $\overline{\mathcal{G}}$ 为半环.

§2 单调类定理 (集合形式)

2.9 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一集类，$A \subset \Omega$. 令 $A \cap \mathcal{C} = \{A \cap B:\ B \in \mathcal{C}\}$, (这一记号以后常用到), 并用 $\sigma_A(A \cap \mathcal{C})$ 表示 $A \cap \mathcal{C}$(视为 A 上集类) 在 A 上生成的 σ- 代数，则有 $\sigma_A(A \cap \mathcal{C}) = A \cap \sigma(\mathcal{C})$. 对 $m(\mathcal{C}), \lambda(\mathcal{C})$ 亦有类似结果.

证明 先证 $\sigma_A(A \cap \mathcal{C}) \subset A \cap \sigma(\mathcal{C})$.

显然 $A \cap \mathcal{C} \subset A \cap \sigma(\mathcal{C})$. 下证 $A \cap \sigma(\mathcal{C})$ 为 σ- 代数.

(1) $A \cap \sigma(\mathcal{C})$ 对余运算封闭. $\forall B \in A \cap \sigma(\mathcal{C})$, 则 $\exists C \in \sigma(\mathcal{C}), s.t.\ B = A \cap C$. 于是有 $B_A^c = A \backslash B = A \cap C^c \in A \cap \sigma(\mathcal{C})$, 即 $B^c \in A \cap \sigma(\mathcal{C})$.

(2) $A \cap \sigma(\mathcal{C})$ 对可列交运算封闭. $\forall B_n \in A \cap \sigma(\mathcal{C}),\ n \geq 1$. 则 $\exists C_n \in \sigma(\mathcal{C}), s.t.\ B_n = A \cap C_n$, 于是有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n \in \sigma(\mathcal{C})$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (A \cap C_n) = A \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n\right) \in A \cap \sigma(\mathcal{C})$, 即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in A \cap \sigma(\mathcal{C})$. 故 $A \cap \sigma(\mathcal{C})$ 为 σ- 代数. 由单调类定理得 $\sigma_A(A \cap \mathcal{C}) \subset A \cap \sigma(\mathcal{C})$.

再证 $\sigma_A(A \cap \mathcal{C}) \supset A \cap \sigma(\mathcal{C})$.

令 $\mathcal{G} = \{B \in \sigma(\mathcal{C}) : A \cap B \in \sigma_A(A \cap \mathcal{C})\}$. 显然有 $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$. 下证 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数.

(1) $\mathcal{G}$ 对可列交运算封闭. 设 $B_n \in \mathcal{G},\ n \geq 1$, 则 $A \cap B_n \in \sigma_A(A \cap \mathcal{C}), B_n \in \sigma(\mathcal{C})$. 于是

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \sigma(\mathcal{C}),\quad A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n) \in \sigma_A(A \cap \mathcal{C}).$$

即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n) \in \mathcal{G}$.

(2) $\mathcal{G}$ 对余运算封闭. 设 $B \in \mathcal{G}$, 则 $A \cap B \in \sigma_A(A \cap \mathcal{C}), B \in \sigma(\mathcal{C})$. 于是有 $B^c \in \sigma(\mathcal{C})$, $A \cap B^c \in \sigma_A(A \cap \mathcal{C})$, 即 $B^c \in \mathcal{G}$. 故 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数. 由单调类定理知 $\sigma_A(A \cap \mathcal{C}) \supset A \cap \sigma(\mathcal{C})$.

2.10 设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ- 代数，$\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \cdots\}$ 为 Ω 的一个可数划分 (即 $A_n \cap A_m = \emptyset,\ n \neq m,\ \sum_n A_n = \Omega$), 则对任何 $B \in \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{C})$, 存在 $B_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, \cdots$, 使得

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A_n).$$

证明 令 $\mathcal{G} = \left\{B \in \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{C}):\ \exists B_n \in \mathcal{F},\ n \geq 1,\ s.t.\ B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \cap A_n\right\}$.

先证 $\mathcal{F} \cup \mathcal{C} \subset \mathcal{G}$.

$\forall B \in \mathcal{F}$, 显然 $B = B \cap \Omega = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B \cap A_n$. 即 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. 又 $\forall C \in \mathcal{C}, \exists n_0 \in \mathbf{N},\ s.t.\ C = A_{n_0}$, 于是 $C = A_{n_0} \cap \Omega + \sum\limits_{n=1, n \neq n_0}^{\infty} (A_n \cap \emptyset)$. 即 $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$. 从而 $\mathcal{F} \cup \mathcal{C} \subset \mathcal{G}$.

再证 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数.

(1) $\mathcal{G}$ 对可列交运算封闭. 设 $M_k \in \mathcal{G},\ k \geq 1$. 则 $\exists B_n^k \in \mathcal{F},\ n \geq 1,\ s.t.\ M_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n^k \cap A_n$. 故 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} M_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (B_n^k \cap A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_n^k\right) \cap A_n$. 又 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_n^k \in \mathcal{F}$, 故 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} M_k \in \mathcal{G}$.

(2) $\mathcal{G}$ 对余运算封闭. 设 $B \in \mathcal{G}$, 则 $\exists B_n \in \mathcal{F},\ n \geq 1,\ s.t.\ B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \cap A_n$. 于是有 $B^c = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A_n)_{A_n}^c = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n^c \cap A_n$, 即 $B^c \in \mathcal{G}$.

由 (1),(2) 得 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数. 因此 $\sigma(\mathcal{F}\cup\mathcal{C})=\mathcal{G}$, 即对任何 $B\in\sigma(\mathcal{F}\cup\mathcal{C})$, 存在 $B_n\in\mathcal{F}$, $n=1,2,\cdots$, 使得 $B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A_n)$.

2.11 设 $\mathcal{C}$ 为一集类. 则对任何 $A\in\sigma(\mathcal{C})$, 存在 $\mathcal{C}$ 的可数子类 $\mathcal{D}$, 使得 $A\in\sigma(\mathcal{D})$.

证明 令 $\mathcal{G}=\{A\in\sigma(\mathcal{C}):$ 存在$\mathcal{C}$的可数子类$\mathcal{D}$, 使得$A\in\sigma(\mathcal{D})\}$.

显然 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}$(事实上, $\forall A\in\mathcal{C}$, 取 $\mathcal{D}=\{A\}$, 则有 $A\in\sigma(\mathcal{D})$).

下证 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数.

先证 $\mathcal{G}$ 对可列交运算封闭. 设 $A_n\in\mathcal{G}$, $n\geq 1$, 则存在 $\mathcal{C}$ 的可数子类 $\mathcal{D}_n$, 使得 $A_n\in\sigma(\mathcal{D}_n)$. 令 $\mathcal{D}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}_n$, 则 $\mathcal{D}\subset\mathcal{C}$ 且可数. 于是有 $A_n\in\sigma(\mathcal{D}_n)\subset\sigma(\mathcal{D})$, 即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\sigma(\mathcal{D})$. 故 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{G}$.

再证 $\mathcal{G}$ 对余运算封闭. 设 $A\in\mathcal{G}$, 则存在 $\mathcal{C}$ 的可数子类 $\mathcal{D}$, 使得 $A\in\sigma(\mathcal{D})$. 显然有 $A^c\in\sigma(\mathcal{D})$. 故 $A^c\in\mathcal{G}$. 由 (1),(2) 得 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数.

从而有 $\mathcal{G}=\sigma(\mathcal{C})$. 即 $\forall A\in\sigma(\mathcal{C})$, 存在 $\mathcal{C}$ 的可数子类 $\mathcal{D}$, 使得 $A\in\sigma(\mathcal{D})$.

2.12 设 $\mathcal{C}$ 为一集类, 则对任何 $A\in m(\mathcal{C})$, 存在 $B\in\mathcal{C}_\sigma$, 使得 $B\supset A$.

证明 令 $\mathcal{G}=\{A\in m(\mathcal{C}):\ \exists B\in\mathcal{C}_\sigma$,使得$A\subset B\}$.

显然 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}\subset m(\mathcal{C})$. 下证 $\mathcal{G}$ 为单调类.

设 $\forall n\geq 1,\ A_n\in\mathcal{G}$, 则存在 $B_n\in\mathcal{C}_\sigma$, 使得 $A_n\subset B_n$.

(1) 若 $A_n\uparrow$, 则有 $A_n\uparrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathcal{C}_\sigma$, 即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{G}$.

(2) 若 $A_n\downarrow$, 则有 $A_n\downarrow\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 从而有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subset A_1\subset B_1\in\mathcal{C}_\sigma$, 即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{G}$.

故 $\mathcal{G}$ 为单调类. 因此 $\mathcal{G}=m(\mathcal{C})$, 即 $\forall A\in m(\mathcal{C}),\exists B\in\mathcal{C}_\sigma$, 使得 $B\supset A$.

2.13 设 $\mathcal{C}$ 为一集类, 则下列二条件等价:

(1)$\lambda(\mathcal{C})=m(\mathcal{C})$;

(2)$A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in m(\mathcal{C})$; $A,B\in\mathcal{C},\ A\cap B=\emptyset\Rightarrow A\cup B\in m(\mathcal{C})$.

证明 (1)⇒(2).

$A\in\mathcal{C}\subset\lambda(\mathcal{C})\Rightarrow A^c=\Omega\backslash A\in\lambda(\mathcal{C})=m(\mathcal{C})$;

$A,B\in\mathcal{C},\ A\cap B=\emptyset\Rightarrow A,B\in\lambda(\mathcal{C}),A\subset B^c\Rightarrow B^c\backslash A\in\lambda(\mathcal{C})\Rightarrow B^c\cap A^c\in\lambda(\mathcal{C})\Rightarrow A\cup B\in\lambda(\mathcal{C})=m(\mathcal{C})$.

(2)⇒(1). 显然有 $\lambda(\mathcal{C})\supset m(\mathcal{C})$. 下证 $m(\mathcal{C})$ 为 λ- 类. 由习题 1.15 知只需证

(i)$A\in m(\mathcal{C})\Rightarrow A^c\in m(\mathcal{C})$;

(ii)$A,B\in m(\mathcal{C}),\ A\cap B=\emptyset\Rightarrow A\cup B\in m(\mathcal{C})$.

令 $\mathcal{G}_1=\{A\in m(\mathcal{C}):\ A^c\in m(\mathcal{C}),\ \forall B\in\mathcal{C},\ A\cap B=\emptyset,\ A\cup B\in m(\mathcal{C})\}$.

显然 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}_1$. 下证 $\mathcal{G}_1$ 为单调类.

设 $A_n\in\mathcal{G}_1,\ A_n\uparrow A\in m(\mathcal{C})$, 则有 $A_n^c\in m(\mathcal{C}),\ \forall B\in\mathcal{C},\ A_n\cap B=\emptyset,\ A_n\cup B\in m(\mathcal{C})$. 于是

$$A^c=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c\in m(\mathcal{C}),\ \ \forall B\in\mathcal{C},\ A\cap B=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B)=\emptyset,$$

$$A_n\cup B\uparrow A\cup B=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup B.$$

故 $A\cup B\in m(\mathcal{C})\Rightarrow A\in\mathcal{G}_1$. 同理可证 $A_n\in\mathcal{G}_1,A_n\downarrow A$ 有 $A\in\mathcal{G}_1$, 即 $\mathcal{G}_1$ 为单调类. 于是 $\mathcal{G}_1=m(\mathcal{C})$.

令 $\mathcal{G}_2=\{A\in m(\mathcal{C}):A\cap B=\emptyset,\ A\cup B\in m(\mathcal{C}),\ \forall B\in m(\mathcal{C})\}$. 由 $\mathcal{G}_1=m(\mathcal{C})$ 得 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}_2$. 同上可证得 $\mathcal{G}_2$ 为单调类. 故 $\mathcal{G}_2=m(\mathcal{C})$, 即 $m(\mathcal{C})$ 为 λ 类. 从而有 $m(\mathcal{C})=\lambda(\mathcal{C})$.

2.14 设 $\mathcal{C}$ 为一集类. 如果 $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}_{\sum\sigma}$, 则有 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

证明 由定理 2.4(2) 知要证 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, 只需证 $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \lambda(\mathcal{C})$. 于是只需证 $\mathcal{C}_{\sum\sigma} \subset \lambda(\mathcal{C})$.

$\forall A \in \mathcal{C}_{\sum\sigma}$, 则有 $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \cap A_m = \emptyset,\ n \neq m,\ A_n \in \mathcal{C},\ n \geq 1$. 令 $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq n$. 由习题 1.15 知 $B_n \in \lambda(\mathcal{C})$. 而 $B_n \uparrow A$, 故 $A \in \lambda(\mathcal{C})$, 即 $\mathcal{C}_{\sum\sigma} \subset \lambda(\mathcal{C})$.

§3 测度与非负集函数

3.6 设 μ 为半环 $\mathcal{C}$ 上的一有限可加非负函数, 则 μ 有单调性及可减性. 此外, 设 $A_n \in \mathcal{C},\ n \geq 1,\ A \in \mathcal{C}$, 且 $\sum_n A_n \subset A$, 则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A)$.

证明 设 $A, B \in \mathcal{C},\ A \subset B$, 则有 $B = A \cup (B \backslash A),\ A \cap (B \backslash A) = \emptyset$, 由 $\mathcal{C}$ 为半环知 $B \backslash A \in \mathcal{C}_{\sum f}$, 即存在 $A_i \in \mathcal{C},\ i = 1, 2, \cdots, m,\ s.t.\ B \backslash A = \sum\limits_{i=1}^{m} A_i$, 亦即 $B = A + \sum\limits_{i=1}^{m} A_i$. 于是由 μ 的有限可加性有

$$\mu(B) = \mu(A) + \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)$$

即 $\mu(A) \leq \mu(B)$.

若 $\mu(B) < \infty$, 则上式变形为 $\mu(B \backslash A) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(A_i) = \mu(B) - \mu(A)$.

设 $A_n \in \mathcal{C},\ n \geq 1,\ A \in \mathcal{C}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$. 则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A)$. 因 $\mathcal{C}$ 为半环, 故 $A_n \cap A \in \mathcal{C}$ 且 $A_n \cap A = A_n$. 从而有

$$\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) \leq \mu(A).$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{m} \mu(A_n \cap A) = \mu\left(\sum\limits_{n=1}^{m} (A_n \cap A)\right) \leq \mu(A)$. 对上式两边取极限有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A).$$

3.7 设 $(I, \prec)$ 为一定向集, $(\mu_i,\ i \in I)$ 为 σ- 代数 $\mathcal{F}$ 上的一族测度, 满足 $i \prec j \Rightarrow \mu_i \leq \mu_j$. 令 $\mu(A) = \sup\limits_i \mu_i(A),\ A \in \mathcal{F}$, 则 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度.

证明 $\mu(\emptyset) = \sup\limits_n \mu_i(\emptyset) = 0$. 设 $A_n \in \mathcal{F},\ \forall n \geq 1$, 且 $A_n \cap A_m = \emptyset,\ n \neq m$. 则

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup_i \mu_i\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_i(A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sup_i \mu_i(A_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

往证 $\mu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

由 $\mu(A_n) = \sup\limits_i \mu_i(A_n)$ 知, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists i_n \in I,\ s.t.\ \mu_{i_n}(A_n) \geq \mu(A_n) - \varepsilon/2^n$. $\forall N \in \mathbf{N}$, 取 $J_N =$

$\max\{i_1, i_2, \cdots, i_N\}$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\mu(A_n) \le \sum_{n=1}^{N}\mu_{i_n}(A_n)+\varepsilon \le \sum_{n=1}^{N}\mu_{J_N}(A_n)+\varepsilon \\ =\mu_{J_N}\left(\sum_{n=1}^{N}A_n\right)+\varepsilon \le \mu_{J_N}\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)+\varepsilon \le \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)+\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) \le \mu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)+\varepsilon$. 由 ε 的任意性知， $\mu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right) \ge \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$. 故 $\mu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$, 即 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度.

3.8 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间， $\mu(\Omega) < \infty$, $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的一个代数，则对任何 $A \in \mathcal{F}$, 我们有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B):\ B \in \mathcal{C}_\delta,\ B \subset A\} = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{C}_\sigma,\ B \supset A\}.$$

证明 令 $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F}:\ \mu(A) = \sup\{\mu(B):\ B \in \mathcal{C}_\delta,\ B \subset A\}\}$.

显然 $\mathcal{C} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$. 下证 $\mathcal{G}$ 为单调类.

设 $C_n \in \mathcal{G}$, $C_n \uparrow C$. 因 μ 为测度，故 $\mu(C) = \lim\limits_{n\to\infty}\mu(C_n)$. 则 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$, 当 $n \ge N$ 时

$$\mu(C) - \mu(C_n) \le \varepsilon/2. \tag{1}$$

因 $C_n \in \mathcal{G}$, 故 $\exists B_n \in \mathcal{C}_\delta$, $B_n \subset C_n$, 使得

$$\mu(C_n) \le \mu(B_n) + \varepsilon/2. \tag{2}$$

由 (1),(2) 得

$$\mu(C) \le \mu(B_n) + \varepsilon,\ B_n \in \mathcal{C}_\delta,\ B_n \subset C_n \subset C.$$

故 $\mu(C) = \sup\{\mu(B):\ B \in \mathcal{C}_\delta,\ B \subset C\}$, 即 $C \in \mathcal{G}$.

设 $C_n \in \mathcal{G}$, $C_n \downarrow C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. 则 $\forall\varepsilon > 0$, $n \ge 1$, $\exists B_n \in \mathcal{C}_\delta,$, $B_n \subset C_n$, $s.t.$ $\mu(C_n) \le \mu(B_n) + \varepsilon/2^n$. 令 $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}_\delta$, 则 $B \subset C$, 且

$$\begin{aligned}\mu(C) - \mu(B) = \mu(C\backslash B) = \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n\right)\backslash\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)\right) \\ \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(C_n\backslash B_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\mu(C_n) - \mu(B_n)) \le \varepsilon.\end{aligned}$$

故 $C \in \mathcal{G}$, 即 $\mathcal{G}$ 为单调类. 又 $\mathcal{C}$ 为代数，故 $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$.

同理可证得 $\mu(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{C}_\sigma,\ B \supset A\}$.

3.9 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一有限测度空间， $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的一个代数. 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $B \in \mathcal{C}$, 使得 $\mu(A\Delta B) < \varepsilon$.

证明 由习题 3.8 得， $\forall A \in \mathcal{F}$ 有 $\mu(A) = \sup\{\mu(B):\ B \in \mathcal{C}_\delta,\ B \subset A\}$. 由上确界定义知 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists B \in \mathcal{C}_\delta$, $B \subset A$, 使得

$$\mu(A) < \mu(B) + \varepsilon/2. \tag{1}$$

又 $B \in \mathcal{C}_\delta$, 故 $\exists B_n \in \mathcal{C},\ n \geq 1$, 使得 $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset A$. 令 $C_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k$, 则 $C_n \downarrow B$. 因 $\mathcal{C}$ 为代数，故 $C_n \in \mathcal{C}$. 再由 $C_n \downarrow B$ 知， $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n \geq n_0$ 时

$$\mu(C_n) - \mu(B) < \varepsilon/2,\ B \subset C_n,\ B \subset A. \tag{2}$$

由 (1),(2) 得

$$\mu(A\Delta C_n) = \mu(A\backslash C_n) + \mu(C_n\backslash A) \leq \mu(A\backslash B) + \mu(C_n\backslash B) \leq \varepsilon.$$

从而有结论成立.

§4 外测度与测度的扩张

4.9(测度的限制) **设** $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ **为一有限测度空间，** $\Omega_0 \subset \Omega$, **且** $\mu^*(\Omega_0) = \mu(\Omega)$. **则** $\forall A \in \mathcal{F}$ **有** $\mu^*(A \cap \Omega_0) = \mu(A)$, **并且** μ^* **限于** $\Omega_0 \cap \mathcal{F}$ **为一测度. 称** μ^* **为** μ **到** $(\Omega_0, \Omega_0 \cap \mathcal{F})$ **上的限制.**

证明 1^0 先证 $\forall A \in \mathcal{F}$ 有 $\mu^*(A \cap \Omega_0) = \mu(A)$.

$2^0 \mu^*$ 限于 $\Omega_0 \cap \mathcal{F}$ 为一测度.

(1)$\Omega_0 \cap \mathcal{F}$ 为 σ- 代数，由习题 2.9 立得.

(2)μ^* 定义的合理性.

设 $A = A_1 \cap \Omega_0 = A_2 \cap \Omega_0 \in \Omega_0 \cap \mathcal{F}$, 则 $A_1 \cap \Omega_0 \cap A_2^c = \emptyset$, 即 $\Omega_0 \subset (A_1\backslash A_2)^c$. 又 $\mu^*(\Omega_0) = \mu(\Omega)$, 故 $\mu(A_1\backslash A_2) = 0$. 同理可得 $\mu(A_2\backslash A_1) = 0$, 即 $\mu(A_1 \Delta A_2) = 0$. 故 $A_1 = A_2,\ a.s.$

(3)μ^* 为 $\Omega_0 \cap \mathcal{F}$ 上的测度.

显然 $\mu^*(\emptyset) = \mu^*(\emptyset \cap \Omega_0) = \mu(\emptyset) = 0$. 设 $A_n \in \mathcal{F},\ n \geq 1,\ A_n \cap A_m = \emptyset,\ n \neq m$, 则有

$$A_n \cap \Omega_0 \in \mathcal{F},\ n \geq 1,\ (A_n \cap \Omega_0) \cap (A_m \cap \Omega_0) = \emptyset,\ n \neq m.$$

且

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap \Omega_0)\right) &= \mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \Omega_0\right)\\ =\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n \cap \Omega_0).\end{aligned}$$

故 μ^* 为 $\Omega_0 \cap \mathcal{F}$ 上的测度.

4.10 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ **为一有限测度空间，** $\Omega_0 \subset \Omega$. **令** $\mathcal{F}_0 = \Omega_0 \cap \mathcal{F}$,

$$\nu(A) = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{F},\ G \cap \Omega_0 = A\}, A \in \mathcal{F}_0,$$

则 ν **为** $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ **上一测度，令**

$$\tilde{\mu}(B) = \nu(B \cap \Omega_0),\ \forall B \in \mathcal{F},$$

则 $\tilde{\mu}$ **为** $(\Omega, \mathcal{F})$ **上一测度，且** $\tilde{\mu} \leq \mu$.

证明 显然 $\Omega_0 \cap \mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ 为 σ- 代数，且 $\nu(\emptyset) = 0$. 于是要证 ν 为 $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ 上一测度，只需证 ν 有 σ- 可加性. 设 $A_n \in \mathcal{F}_0,\ n \geq 1,\ A_n \cap A_m = \emptyset,\ n \neq m$.

1^0 先证 $\nu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$.

$\forall n \geq 1$ 由 $\nu(A_n) = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{F},\ G \cap \Omega_0 = A_n\}$ 知， $\forall \varepsilon > 0,\ \exists G_n \in \mathcal{F},\ G_n \cap \Omega_0 = A_n,\ s.t.$

$$\mu(G_n) \leq \nu(A_n) + \varepsilon/2^n,$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(G_n)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)+\varepsilon$. 因 μ 为测度,故 $\mu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}G_n\right)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)+\varepsilon$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}G_n\in\mathcal{F}$, $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}G_n\right)\cap\Omega_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(G_n\cap\Omega_0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 又由 ε 的任意性知, $\nu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)$.

2^0 再证 $\nu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\ge\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)$.

由 $\nu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\inf\{\mu(G):G\in\mathcal{F},\ G\cap\Omega_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}_0$ 知, $\forall\varepsilon>0,\ \exists B\in\mathcal{F},\ B\cap\Omega_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n,\ s.t.$

$$\mu(B)\le\nu\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)+\varepsilon. \tag{1}$$

设 $A_n=\Omega_0\cap B_n,\ \forall n\ge1,\ B_n\in\mathcal{F}$. 令

$$B_1'=B\cap B_1\cap\left(\bigcup_{i=2}^{\infty}B_i\right)^c\in\mathcal{F},\ B_n'=B\cap B_n\cap\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}B_i\right)^c\in\mathcal{F}.$$

则

$$B_n'\subset B,\ n\ge1,\ B_n'\cap B_m'=\emptyset,\ n\ne m. \tag{2}$$

且

$$B_n'\cap\Omega_0=A_n. \tag{3}$$

事实上, (i)$B_n'\cap\Omega_0\subset B_n\cap\Omega_0=A_n$;

(ii) 因 $B\cap\Omega_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, $B_n\cap\Omega_0=A_n$ 以及 $\{A_n\}$ 互不相交, 故 $\{B_n\cap\Omega_0\}$ 互不相交. 从而有 $B_n\cap\Omega_0\subset\left(\bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty}B_i\right)^c\cap\Omega_0$, 即

$$A_n=B_n\cap\Omega_0\subset\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}B_i\right)^c\cap\Omega_0=B\cap B_n\cap\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}B_i\right)^c\cap\Omega_0=B_n'\cap\Omega_0.$$

由 (1),(2),(3) 式得

$$\nu\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)+\varepsilon\ge\mu(B)\ge\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n'\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n')\ge\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n).$$

由 ε 的任意性得 $\nu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\ge\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)$. 综合上述 1^0,2^0 得 ν 是 $(\Omega_0,\mathcal{F}_0)$ 上的测度.

3^0 往证 $\widetilde{\mu}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一测度, 且 $\widetilde{\mu}\le\mu$. 显然 $\widetilde{\mu}$ 非负且 $\widetilde{\mu}(\emptyset)=\nu(\emptyset)=0$. 下证 $\widetilde{\mu}$ 有 σ- 可加性.

设 $\{B_n\}\subset\mathcal{F},\ B_n\cap B_m=\emptyset,\ n\ne m$. 则

$$\widetilde{\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\nu\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)\cap\Omega_0\right)=\nu\left(\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cap\Omega_0)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(B_n\cap\Omega_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\nu}(B_n).$$

故 $\widetilde{\mu}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一测度. 由 ν 的定义知, $\widetilde{\mu}(B)=\nu(B\cap\Omega_0)\le\mu(B),\ \forall B\in\mathcal{F}$.

4.11 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间. 令

$$\mathcal{N}=\{N\subset\Omega:\exists A\in\mathcal{F},\ \mu(A)=0,\text{使}A\supset N\},$$

$$\overline{\mathcal{F}}=\{A\cup N:\ A\in\mathcal{F},\ N\in\mathcal{N}\},$$

则 $\overline{\mathcal{F}}$ 为 σ- 代数， μ 可以唯一扩张成为 $\overline{\mathcal{F}}$ 上的测度 $\overline{\mu}$, 且 $(\Omega,\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 的完备化.

第二章 可测映射

§1 定义及基本性质

1.12 设 $(E,\mathcal{E})$ 为一可测空间， $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{E}$ 的一集类. 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 到 E 中的一族映射, $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{H}$ 在 Ω 上诱导的 σ- 代数，则

$$\mathcal{F}=\sigma\left\{\bigcup_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}.$$

设 φ 为 $\mathcal{F}$- 可测函数，则存在 $\mathcal{H}$ 的可数子族 $\mathcal{H}_0=\{f_1,f_2,\cdots\}$, 使得 φ 为 $\mathcal{F}_0$- 可测，其中 $\mathcal{F}_0$ 为 $\mathcal{H}_0$ 在 Ω 上诱导的 σ- 代数.

证明 (1) 显然有 $\sigma\left\{\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}\subset\mathcal{F}$. 记 $\mathcal{G}=\left\{A\in\mathcal{E}:\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(A)\in\sigma\left\{\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}\right\}$. 显然 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}$, 且 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数. 事实上

$1^0\forall A\in\mathcal{G}$ 有 $A\in\mathcal{E}$, $\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(A)\in\sigma\left\{\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}$. 则 $A^c\in\mathcal{E}$, $\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(A^c)=\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}\left(f^{-1}(A)\right)^c=\left(\bigcap\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(A)\right)^c\subset\sigma\left\{\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}$. 即 $A^c\in\mathcal{G}$.

$2^0\forall A_n\in\mathcal{G},\ n\geq1$, 即 $A_n\in\mathcal{E}$, $\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(A_n)\in\sigma\left\{\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}$. 于是有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{E}$ ，且

$$\bigcup_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\bigcup_{f\in\mathcal{H}}\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(A_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(A_n)\in\sigma\left\{\bigcup_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}.$$

即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{G}$. 故 $\mathcal{G}=\sigma(\mathcal{C})$, 即 $\mathcal{F}=\sigma\left\{\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}$.

(2)

1.13 设 $(\Omega,\mathcal{F}),(E,\mathcal{E})$ 及 $(G,\mathcal{G})$ 为可测空间， f 为 Ω 到 E 中的 $\mathcal{F}$- 可测映射， h 为 E 到 G 中的 $\mathcal{E}$- 可测映射. 令 $\varphi=h\circ f$, 则 φ 为 Ω 到 G 中的 $\mathcal{F}$- 可测映射.

证明 因 $\varphi^{-1}(\mathcal{G})=(h\circ f)^{-1}(\mathcal{G})=f^{-1}\left(h^{-1}(\mathcal{G})\right)\subset f^{-1}(\mathcal{E})\subset\mathcal{F}$. 故 φ 为 Ω 到 G 中的 $\mathcal{F}$- 可测映射.

1.14 设 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一有界可测函数，则存在简单可测函数序列 $(f_n,n\geq1)$, 使得 $|f_n|\leq|f|$, $n\geq1$, 且 f_n 一致收敛于 f.

证明 (1) 设 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一非负有界可测函数，令

$$f_n(\omega)=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{\{k/2^n\le f<(k+1)/2^n\}}+nI_{\{f\ge n\}}.$$

显然 $f_n\le f$, 且 f_n 为非负简单可测函数. 由题设知，$C\triangleq\sup\{f(\omega),\omega\in\Omega\}<\infty$. 于是 $\exists n_1\in\mathbf{N}$, 当 $n\ge n_1$ 时， $I_{\{f\ge n\}}=0$. 从而 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{n_1,\ \log_2 1/\varepsilon\}$. 则当 $n\ge N$ 时,

$$|f_n(\omega)-f(\omega)|\le 1/2^n<\varepsilon,$$

即 f_n 一致收敛于 f.
(2) 一般地有 $f=f^+-f^-$. 对于 f^+,f^- 由 (1) 得， $\exists f_n\le f^+$, f_n 一致收敛于 f^+,$g_n\le f^-$, g_n 一致收敛于 f^-. 令 $h_n=f_n-g_n$ 则 $|f-h_n|\le\max\{|f^+-f_n|,\ |f^--g_n|\}$. 于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}$, $s.t.$ 当 $n>N$ 时

$$|f^+-f_n|<\varepsilon,\quad |f^--g_n|<\varepsilon.$$

从而有 $|f-h_n|<\varepsilon$, 即 h_n 一致收敛于 f, 且 $|h_n|=|f_n-g_n|\le f^++f^-=|f|$. 综合上述 (1),(2) 有结论成立.
1.15 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间， $\mathcal{C}=\{A_1,A_2,\cdots\}$ 为 Ω 的一个可数划分 (即 $A_i\cap A_j=\emptyset$, $i\ne j,\sum_i A_i=\Omega$). 令 $\mathcal{T}=\sigma\{\mathcal{F}\cup\mathcal{C}\}$, 则
(1)$\mathcal{T}=\{\sum_{i=1}^{\infty}(A_i\cap B_i):\ B_i\in\mathcal{F},\ i\ge 1\}$,
(2) 设 g 为 Ω 上一 $\mathcal{T}$- 可测实值函数，则存在一列 $\mathcal{F}$- 可测实函数 $(f_n,n\ge 1)$, 使得 $g=\sum_{i=1}^{\infty}f_iI_{A_i}$.
证明 (1) 令 $\mathcal{H}=\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\cap B_i),\ B_i\in\mathcal{F},\ i\ge 1\right\}$. 显然有 $\mathcal{H}\subset\mathcal{T}$, $\mathcal{F}\cup\mathcal{C}\subset\mathcal{H}$. 事实上, $\forall A\in\mathcal{F}$, $A\cap\Omega=\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_iA$; $\forall B\in\mathcal{C}$, $\exists n_0$, $s.t.$ $B=A_{n_0}=A_{n_0}\Omega+\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne n_0}}^{\infty}A_i\emptyset$. 由 P_8 习题 2.10 知 $\mathcal{T}\subset\mathcal{H}$, 即 $\mathcal{T}=\mathcal{H}$.
(2) 示性函数 $\to$ 简单函数 $\to$ 非负函数 $\to$ 一般地.
$1^0\forall A\in\mathcal{T}$, 由 (1) 知 $\exists B_i\in\mathcal{F}$, $i\ge 1$, $s.t.$ $A=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\cap B_i)$, 即 $I_A=\sum\limits_{i=1}^{\infty}I_{A_i\cap B_i}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}I_{A_i}I_{B_i}$. 令 $f_i=I_{B_i}$, 则有 $I_A=\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_iI_{B_i}$, 且 $f_i\in\mathcal{F}$.
2^0 令 $0\le g=\sum\limits_{i=1}^{n}a_iI_{C_i}$, $C_i\in\mathcal{T}$. 由 (1) 知对于每个 $C_i\in\mathcal{T}$, $\exists B_{ij}\in\mathcal{F}$, $j\ge 1$ 使得 $C_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}A_j\cap B_{ij}$. 于是

$$g=\sum_{i=1}^{n}a_iI_{\sum\limits_{j=1}^{\infty}A_j\cap B_{ij}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_iI_{A_j}I_{B_{ij}}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}a_iI_{B_{ij}}\right)I_{A_j}.$$

令 $0\le f_j=\sum\limits_{i=1}^{n}a_iI_{B_{ij}}\in\mathcal{F}$, 则有 $g=\sum\limits_{j=1}^{\infty}f_jI_{A_j}$.
3^0g 为非负 $\mathcal{T}$- 可测实值函数. 由定理 1.8 知存在非负简单可测实函数的增序列 g_n, 使得 $g_n\uparrow g$. 对每个 g_n, 由 2^0 知存在一列 $\mathcal{F}$- 可测实函数 $\{f_{nm},\ m\ge 1\}$, 使得 $g_n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}f_{nm}I_{A_m}$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=g$, 故 $\exists f_m$, $s.t.$ $\lim\limits_{n\to\infty}f_{nm}=f_m$. 于是有 $g=\sum\limits_{m=1}^{\infty}f_mI_{A_m}$, 且 $f_m\in\mathcal{F}$.

4^0 一般地，令 $g=g^+-g^-$. 由 3^0 得 $\exists g_m,h_m\in\mathcal{F}$, $s.t.$ $g^+=\sum\limits_{m=1}^{\infty}h_mI_{A_m}$, $g^-=\sum\limits_{m=1}^{\infty}g_mI_{A_m}$. 设 $f_m=h_m-g_m\in\mathcal{F}$, 则有 $g=g^+-g^-=\sum\limits_{m=1}^{\infty}(h_m-g_m)I_{A_m}=\sum\limits_{m=1}^{\infty}f_mI_{A_m}$.

综合上述 1^0,2^0,3^0,4^0 有结论成立.

1.16 设 Ω 为一距离空间， $\mathcal{B}(\Omega)$ 为 Ω 上的 Borel σ- 代数. 令 $\mathcal{C}_b(\Omega)$ 表示 Ω 上有界连续函数全体，则 $\mathcal{B}(\Omega)=\sigma(f:f\in\mathcal{C}_b(\Omega))$.

1^0 先证 $\mathcal{B}(\Omega)\subset\sigma(f:f\in\mathcal{C}_b(\Omega))$.

$\forall F\subset\Omega$ 为闭集，令 $f(x)=e^{-\rho(x,F)}$, $x\in\Omega$, 其中 $\rho(x,F)=\inf\limits_{y\in F}d(x,y)$, d 为 Ω 上的距离. 则有 f 为 Ω 上的连续函数，且 $0\le f(x)\le 1$. 必有 $F=\{x:f(x)=1\}\subset\sigma\{f:f\in\mathcal{C}_b(\Omega)\}$, 且 $\mathcal{B}(\Omega)$ 可由 Ω 中所有闭集生成. 故 $\mathcal{B}(\Omega)\subset\sigma\{f:f\in\mathcal{C}_b(\Omega)\}$.

2^0 再证 $\sigma\{f:f\in\mathcal{C}_b(\Omega)\}\subset\mathcal{B}(\Omega)$.

$\forall O\subset\mathbf{R}$ 为开集， $f\in\mathcal{C}_b(\Omega)$, 则有 $f^{-1}(O)$ 为 Ω 中开集. 故 $f^{-1}(O)\in\mathcal{B}(\Omega)$.

令 $\mathcal{G}=\{A\in\mathcal{B}(\mathbf{R}):f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(\Omega)\}$. 则 $O\in\mathcal{G}$, 且 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数. 事实上,

(1)$\forall A\in\mathcal{G}$ 有， $A\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$, $f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(\Omega)$. 则有

$$A^c\in\mathcal{B}(\mathbf{R}),\ f^{-1}(A^c)=(f^{-1}(A))^c\in\mathcal{B}(\Omega),$$

即 $A^c\in\mathcal{G}$; (2)$\forall A_n\in\mathcal{G}$, $n\ge 1$ 有， $A_n\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$, $f^{-1}(A_n)\in\mathcal{B}(\Omega)$. 则有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{B}(\mathbf{R}),\ f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(A_n)\in\mathcal{B}(\Omega),$$

即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{G}$.

又 $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ 可由 $\mathbf{R}$ 中所有开集生成. 故 $\mathcal{G}=\mathcal{B}(\mathbf{R})$. 从而有

$$\sigma\{f:f\in\mathcal{C}_b(\Omega)\}=\sigma\left\{\bigcup_{f\in\mathcal{C}_b(\Omega)}f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbf{R}))\right\}\subset\mathcal{B}(\Omega).$$

综合上述 1^0,2^0 有结论成立.

1.17 设 $\{f_i,\ 1\le i\le m\}$ 为 $\mathbf{R}$ 上实值 Borel 函数，则 $(f_1,\cdots,f_m)$ 为 $(\mathbf{R}^m,\mathcal{B}(\mathbf{R}^m))$ 到自身的可测映射.

证明 记 $\mathcal{C}=\left\{\prod\limits_{i=1}^{m}(a_i,b_i]:\ a_i,b_i\in\mathbf{R},\ a_i\le b_i\right\}$, $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$. $\forall C\in\mathcal{C}$, 则有 $C=\prod\limits_{i=1}^{m}(a_i,b_i]$. 于是 $f^{-1}(C)=\prod\limits_{i=1}^{m}f_i^{-1}(a_i,b_i]\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$, 即 $f^{-1}(\mathcal{C})\subset\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$. 由命题 1.3 及 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)=\sigma(\mathcal{C})$ 得， f 为 $(\mathbf{R}^m,\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ 到自身的可测映射.

1.18 $f:\Omega\to\mathcal{C}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的复值可测函数，当且仅当 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(\mathbf{C},\mathcal{B}(\mathbf{C})$ 中的可测映射.

证明 $(\Rightarrow)$ 因 $\mathbf{C}\cong\mathbf{R}^2$, 故令其同构映射为 $g:\mathbf{C}\to\mathbf{R}^2$, 则 $g\circ f(\Omega)=(Ref,Imf)\triangleq\overline{g}$. 由习题 1.17 知， $\overline{g}:\Omega\to\mathbf{R}^2$ 上的可测映射. 故由习题 1.13 得 $f=g^{-1}\circ\overline{g}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(\mathbf{C},\mathcal{B}(\mathbf{C}))$ 中的可测映射.

($\Leftarrow$) 设 O 为 $\mathbf{R}$ 中的任一开集. $\overline{O} \triangleq \{a+bi : a \in O,\ b \in \mathbf{R}\} \in \mathcal{B}(\mathbf{C})$.

$$f^{-1}(\overline{O}) = \{\omega \in \Omega :\ Ref(\omega) \in O\} = (Ref)^{-1}(O) \in \mathcal{F}.$$

故由命题 1.3 知 Ref 可测. 同理可得 Imf 可测, 即 f 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的复值可测函数.

§2 单调类定理 (函数形式)

2.9 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一有界函数族, 若 $\mathcal{C}$ 为线性空间, 则 $M(\mathcal{C})$ 亦为线性空间.

证明 令 $\mathcal{H}_1 = \{f \in M(\mathcal{C}) :\ \forall \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha f \in M(\mathcal{C}),\ \forall g \in \mathcal{C},\ f+g \in M(\mathcal{C})\}$. 因 $\mathcal{C}$ 为线性空间, 故 $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}_1$. 往证 $\mathcal{H}_1$ 为单调类.

设 $f_n \in \mathcal{H}_1,\ n \geq 1$, 且 $f_n \uparrow (\downarrow) f$. 故 $\{f_n\}$ 一致有界, 从而有 $f \in M(\mathcal{C}),\ |f| \leq m$. 又 $\alpha f_n \uparrow (\downarrow) \alpha f$ 或 $\alpha f_n \downarrow (\uparrow) f \in M(\mathcal{C})$, 且 $\forall g \in \mathcal{C},\ f_n + g \uparrow (\downarrow) f + g \in M(\mathcal{C})$. 设 $|g| \leq l$, 则 $|f+g| \leq m+l$. 故 $f \in \mathcal{H}_1$, 即 $\mathcal{H}_1$ 为单调类, 且 $\mathcal{H}_1 = M(\mathcal{C})$.

令 $\mathcal{H}_2 = \{f \in M(\mathcal{C}) :\ \forall g \in M(\mathcal{C}),\ f+g \in M(\mathcal{C})\}$. 由 $M(\mathcal{C}) = \mathcal{H}_1$ 知 $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}_2$, 同理可证 $\mathcal{H}_2$ 为单调类, 于是有 $\mathcal{H}_2 = M(\mathcal{C})$, 即 $M(\mathcal{C})$ 为线性空间.

2.20 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一非负有界函数族, 则下列二条件等价:

(1)$M(\mathcal{C}) = \mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$;

(2)$f, g \in \mathcal{C} \Rightarrow f \wedge g \in M(\mathcal{C})$; $f \in \mathcal{C}, a \in \mathbf{R}_+ \Rightarrow af, a - f \wedge a \in M(\mathcal{C})$.

证明 ((1) $\Rightarrow$ (2)) 设 $f, g \in \mathcal{C}, a \in \mathbf{R}_+$, 显然有 $f \wedge g,\ af, a - f \wedge a \in \mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$, 即 $f \wedge g,\ af, a - f \wedge a \in M(\mathcal{C})$.

((2) $\Rightarrow$ (1)) 1^0 令
$\mathcal{G}_1 = \{f \in M(\mathcal{C});\ \forall g \in \mathcal{C},\ f \wedge g \in M(\mathcal{C}),\ \forall a \in \mathbf{R}_+,\ af \in M(\mathcal{C}),\ a - f \wedge a \in M(\mathcal{C})\}$.
显然有 $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_1$. 下证 $\mathcal{G}_1$ 为单调类.

设 $f_n \in \mathcal{G}_1,\ n \geq 1$, 且 $f_n \downarrow (\uparrow) f$, 则有 $\{f_n\}$ 一致有界, 即 $\exists m > 0,\ |f_n| \leq m$, 且 $\forall n \geq 1,\ f_n \in M(\mathcal{C}),\ \forall g \in \mathcal{C},\ f_n \wedge g \in M(\mathcal{C}),\ \forall a \in \mathbf{R}_+,\ af_n \in M(\mathcal{C}),\ a - f_n \wedge a \in M(\mathcal{C})$. 从而有 $f \in M(\mathcal{C}),\ |f_n \wedge g| \leq m,\ \forall g \in \mathcal{C},\ f_n \wedge g \downarrow (\uparrow) f \wedge g \in M(\mathcal{C}),\ |af_n| \leq am,\ af_n \downarrow (\uparrow) af \in M(\mathcal{C}),\ |a - f_n \wedge a| \leq a,\ a - f_n \wedge a \downarrow (\uparrow) a - f \wedge a \in M(\mathcal{C})$, 即 $f \in \mathcal{G}_1$, 故有 $\mathcal{G}_1 = M(\mathcal{C})$.

令 $\mathcal{G}_2 = \{f \in M(\mathcal{C}) :\ \forall g \in M(\mathcal{C}),\ f \wedge g \in M(\mathcal{C}),\ \forall a \in \mathbf{R}_+,\ af, a - f \wedge a \in M(\mathcal{C})\}$. 则显然有 $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_2$. 同上可证得 $\mathcal{G}_2$ 为单调类, 故 $\mathcal{G}_2 = M(\mathcal{C})$.

2^0 令 $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega :\ I_A \in M(\mathcal{C})\}$, $\forall f \in \mathcal{C}$ 有 $\frac{1}{n} f \downarrow 0 \in M(\mathcal{C}) \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$. 因 $0 \in M(\mathcal{C})$, 故 $1 = 1 - 1 \wedge 0 \in M(\mathcal{C})$, 即 $\Omega \in M(\mathcal{C})$. 显然 $\mathcal{F}$ 为单调类, 再证 $\mathcal{F}$ 为代数.

$$\forall A \in \mathcal{F},\ I_{A^c} = 1 - I_A = 1 - I_A \wedge 1 \in M(\mathcal{C}) \Rightarrow A^c \in \mathcal{F};$$

$$\forall A, B \in \mathcal{F}, \qquad I_{AB} = I_A \wedge I_B \in M(\mathcal{C}) \Rightarrow AB \in \mathcal{F}.$$

故 $\mathcal{F}$ 为 σ- 代数.

3^0 往证 $\mathcal{C}$ 中的每个元为 $\mathcal{F}$- 可测. $\forall f \in \mathcal{C},\ a \in \mathbf{R}_+$, 令 $f_n = n(a - f \wedge a) \wedge 1$, 则 $f_n \in M(\mathcal{C})$, 且 $f_n \uparrow I_{[f>a]}$. 故 $I_{[f>a]} \in M(\mathcal{C})$, 即 $[f > a] \in \mathcal{F}$. 这表明 $f \in \mathcal{F}$, 于是有 $\sigma(f : f \in \mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

4^0 最后设 $f \in \mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$, 令 $M = \sup\limits_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty$, $f_n = \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} I_{\{(kM)/2^n \leq f < ((k+1)M)/2^n\}}$. 由 3^0 知 $I_{\{(kM)/2^n \leq f < ((k+1)M)/2^n\}} \in M(\mathcal{C})$. 因 $\mathcal{C}$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上为线性空间, 由习题 2.9 知 $M(\mathcal{C})$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上为线性空间. 故 $f_n \in M(\mathcal{C})$, 且 $f_n \uparrow f,\ f_n \leq M$, 即 $f \in M(\mathcal{C})$. 从而有 $\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C}) \subset M(\mathcal{C})$. 显然有 $M(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})(\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$ 为单调类, 且 $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$, 故 $M(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}_b^+(\mathcal{C}))$. 故 $\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C}) = M(\mathcal{C})$.

2.11(定理 2.1 的另一种形式) 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一 π- 类， $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一非负实值函数族. 如果下列条件被满足：

(1)$1 \in \mathcal{H}$;

(2)$f \in \mathcal{H},\ a \in \mathbf{R}_+ \Rightarrow af \in \mathcal{H};\ f, g \in \mathcal{H},\ f \geq g \Rightarrow f - g \in \mathcal{H}$;

(3)$f_n \in \mathcal{H},\ n \geq 1,\ 0 \leq f_n \uparrow f$, 且 f 有限 (相应地，有界)$\Rightarrow f \in \mathcal{H}$;

(4)$\forall A \in \mathcal{C},\ I_A \in \mathcal{H}$,

则 $\mathcal{H}$ 包含 Ω 上的所有非负 $\sigma(\mathcal{C})$- 可测实值 (相应地，有界) 函数.

证明 (1) 令 $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega:\ I_A \in \mathcal{H}\}$. 则有 $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. 下证 $\mathcal{F}$ 为 λ- 类.

$1^0 1 \in \mathcal{H} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{F}$;

$2^0 A, B \in \mathcal{F},\ A \subset B \Rightarrow I_A, I_B \in \mathcal{H},\ I_A \leq I_B \Rightarrow I_B - I_A \in \mathcal{H} \Rightarrow I_{B \backslash A} \in \mathcal{H} \Rightarrow B \backslash A \in \mathcal{F}$;

$3^0 A_n \in \mathcal{F},\ n \geq 1,\ A_n \uparrow A \Rightarrow I_{A_n} \in \mathcal{H},\ I_{A_n} \uparrow I_A$ 有界 $\Rightarrow I_A \in \mathcal{H} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.

由 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的 π- 类得 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

(2) 对 $f, g \in \mathcal{H}$, 取常数 $C \geq f + g$. 则 $f + g = C - [C - (F + g)] \in \mathcal{H}$, 即和运算封闭.

(3) 对 Ω 上的任意非负 $\sigma(\mathcal{C})$- 可测实值 (有界) 函数 f. 令

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} I_{[k/2^n \leq f < (k+1)/2^n]} + n I_{[f \geq n]}.$$

故 $f_n \in \mathcal{H}$, 且 $f_n \uparrow f$. 由 (3) 得 $f \in \mathcal{H}$.

§3 可测函数序列的几种收敛

3.8 设 (f_n) 为一实值可测函数序列，则为要 (f_n)a.e.(相应地，几乎一致或依测度 μ) 收敛于某 f, 必须且只需 (f_n) 为相应的收敛基本列.

证明 只证 a.e. 的情形，其它类似可证.

($\Rightarrow$) 设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则 $\exists N,\ \mu(N) = 0,\ \forall \omega \in N^c$ 有 $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$. 于是有 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M$, 当 $n > M$ 时， $|f_n(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon/2$. 从而有 $\forall \omega \in N^c,\ n, m > M$

$$|f_n(\omega) - f_m(\omega)| \leq |f_n(\omega) - f(\omega)| + |f_m(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon.$$

这表明 $(f_n - f_m) \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$, 即 (f_n) 为 a.e. 收敛基本列.

($\Leftarrow$) 设 (f_n) 为 a.e. 收敛基本列，即 $\exists N,\ \mu(N) = 0,\ \forall \omega \in N^c$ 有 $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} (f_n(\omega) - f_m(\omega)) = 0$. 由数列极限的柯西收敛准则得 $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(\omega)$ 存在，即 (f_n),a.e. 收敛.

3.9 举例说明：若 $\mu(\Omega) = \infty$, 则 μ 几乎处处收敛的序列不一定依测度收敛.

证明 取 $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu)$ 其中 μ 为 Lebesgue 测度. 则 $\mu(\mathbf{R}) = \infty$. 设

$$f_n(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq n, \\ 1, & |\omega| > n. \end{cases}$$

$f(\omega) = 0,\ \forall \omega \in \mathbf{R}$. 于是有 $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$, 即 (f_n)a.e. 收敛. 但

$$\mu(|f_n - f| > 1/2) = \mu((-\infty, -n]) + \mu([n, \infty)) = +\infty.$$

3.10 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则有 $\liminf\limits_{n \to \infty} f_n \leq f \leq \limsup\limits_{n \to \infty} f_n$, a.e..

证明 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则存在子列 (f_{n_k}) 使得 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 从而有 $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n \le \liminf\limits_{k\to\infty} f_{n_k} = f = \limsup\limits_{n\to\infty} f_{n_k} \le \limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, a.e.

3.11 设 μ 为有限测度，则

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow \frac{f_n}{1+|f_n|} \xrightarrow{\mu} \frac{f}{1+|f|}.$$

证明 $(\Rightarrow)$ 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则由 3.6 注知对 (f_n) 的任一子列 $(f_{n'})$, 存在其子列 $(f_{n'_k})$, 使得 $f_{n'_k} \xrightarrow{\mu} f$. 于是要证 $\frac{f_n}{1+|f_n|} \xrightarrow{\mu} \frac{f}{1+|f|}$. 由 3.6 注知只需证 $f_n \to f \Rightarrow \frac{f_n}{1+|f_n|} \to \frac{f}{1+|f|}$. 显然由 $f_n \to f \Rightarrow |f_n| \to |f|$. 从而有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f_n}{1+|f_n|} - \frac{f}{1+|f|}\right| = \frac{|f_n - f + f_n|f| - f|f_n|\,|}{(1+|f_n|)(1+|f|)} \\
&\le \frac{|f_n - f|}{(1+|f_n|)(1+|f|)} + \frac{|f|\,|f_n - f|}{(1+|f_n|)(1+|f|)} + \frac{|f|\;\,|\,|f| - |f_n|\,|}{(1+|f_n|)(1+|f|)} \\
&\le |f_n - f| + |f_n - f| + |\,|f| - |f_n|\,| \to 0 \ (n \to \infty).
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \le \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\int_\Omega \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu$. 由 3.6 注及控制收敛定理有

$$\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0,\ n \to \infty.$$

即 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

第三章 积分

§1 定义及基本性质

1.10 举例说明命题 1.8(2) 中关于 μ 的 σ- 有限性条件不能去掉.

解 令 $\Omega = \mathbf{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ +\infty, & A = \Omega. \end{cases}$$

μ 不是 Ω 上的 σ- 有限测度，对 $f \equiv 2$, $g \equiv 1$, 有 $\mu(fI_A) \le \mu(gI_A)$, $\forall A \in \mathcal{F}$. 但 $f > g$, $\forall x \in \Omega$.

1.11 证明系 1.7(3), 即设 f, g 积分存在，且 $\mu(f) + \mu(g)$ 有意义，则 $f + g$ a.e. 有意义.

证明 由积分的线性性知， $\mu(f) + \mu(g) = \mu(f^+ + g^+) - \mu(f^- + g^-)$. 又 $\mu(f) + \mu(g)$ 有意义，故 $\mu(f^+ + g^+) < \infty$, 或 $\mu(f^- + g^-) < \infty$. 由定理 1.6(7) 知， $f^+ + g^+ < \infty$ 或 $f^- + g^- < \infty$, a.e. 从而有 $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$ a.e. 有意义.

1.12 设 (f_n) 为一列可测函数. 若 (f_n) a.e. 单调增 (即 $\forall n$, $f_n \le f_{n+1}$ a.e.), 则存在一处处单调增序列 (g_n), 使得 $\forall n$, $f_n = g_n$ a.e. .

证明 由 $\forall n$, $f_n \le f_{n+1}$ a.e. 知， $\exists N$, $\mu(N) = 0$, $\forall \omega \in N^c$ 有 $f_n(\omega) \le f_{n+1}(\omega)$, 取

$$g_n(\omega) = \begin{cases} f_n(\omega), & \omega \in N^c, \\ 0, & \omega \in N. \end{cases}$$

则有 $g_n(\omega) \le g_{n+1}(\omega)$ 且 $f_n = g_n$ a.e. .

1.13 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一有限测度空间， $A_i \in \mathcal{F}$, $1 \le i \le n$. 令 I 为 $\{1, \cdots, n\}$ 的非空子集，我

们用 $|I|$ 表示 I 中元素的个数，则

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}}(-1)^{|I|-1}\mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

证明 先证

$$\bigvee_{k=1}^{n} I_{A_k}=\sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}}(-1)^{|I|-1}\bigwedge_{i\in I} I_{A_i}. \tag{$*$}$$

当 $n=1$ 时显然成立．假设对 n 成立，下证对 $n+1$ 也成立．

$$\begin{aligned}
f &\triangleq \sum_{I\subset\{1,\cdots,n+1\}}(-1)^{|I|-1}\bigwedge_{i\in I} I_{A_i}\\
&=\sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}}(-1)^{|I|-1}\bigwedge_{i\in I} I_{A_i}+I_{A_n+1}+\sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}}(-1)^{|I|}\left(\bigwedge_{i\in I} I_{A_i}\right)\bigwedge I_{A_{n+1}}\\
&=\bigvee_{k=1}^{n} I_{A_k}+I_{A_{n+!}}-\left(\bigvee_{k=1}^{n} I_{A_k}\right)\bigwedge I_{A_{n+1}}.
\end{aligned}$$

往证 $f=\bigvee\limits_{k=1}^{n+1} I_{A_k}$. 又

$$\Omega=\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\backslash A_{n+1}+A_{n+1}\backslash\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)+\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\cap A_{n+1}+\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right)^c.$$

故 (1)$\omega\in\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)\backslash A_{n+1}$, $f=1+0-0=1$, $\bigvee\limits_{k=1}^{n+1} I_{A_k}=1$;
(2)$\omega\in A_{n+1}\backslash\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$, $f=0+1-0=1$, $\bigvee\limits_{k=1}^{n+1} I_{A_k}=1$;
(3)$\omega\in\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)\cap A_{n+1}$, $f=1+1-1=1$, $\bigvee\limits_{k=1}^{n+1} I_{A_k}=1$;
(4)$\omega\in\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n+1} A_k\right)^c$, $f=0$, $\bigvee\limits_{k=1}^{n+1} I_{A_k}=0$.
从而有 $f=\bigvee\limits_{k=1}^{n+1} I_{A_k}$, 即 $(*)$ 式对 $n+1$ 成立．注意到 $\bigvee\limits_{k=1}^{n} I_{A_k}=I_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}$, $\bigwedge\limits_{i\in I} I_{A_i}=I_{\bigcap\limits_{i\in I} A_i}$, 且 $(*)$ 式两边均可测，故对其求关于 μ 的积分有

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}}(-1)^{|I|-1}\mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

1.14 设 E 为一距离空间， $\mathcal{B}(E)$ 为其 Borel σ- 代数， μ 与 ν 为 $(E,\mathcal{B}(E))$ 上的两个有限测度．若对 E 上一切有界连续函数 f 有 $\mu(f)=\nu(f)$, 则 $\mu=\nu$.

证明 证法一：显然 $1\in\mathcal{C}_b(E)$, 故 $\mu(1)=\nu(1)$.
令 $\mathcal{H}=\{f\in\mathcal{B}(E):\ \mu(f)=\nu(f)\}\subset\mathcal{B}(E)$. 由题设有 $\mathcal{C}_b(E)\subset\mathcal{H}$. 由积分的线性性知 $\mathcal{H}$ 为线性空间，且 $1\in\mathcal{H}$. 又 $\mathcal{C}_b(E)$ 对乘积运算封闭．故由第二章定理 2.8 知 $\mathcal{L}_b(\mathcal{C}_b(E))\subset\mathcal{H}$. 再由 P_{29} 习

题 1.16 $\mathcal{B}(E)=\sigma(f:f\in\mathcal{C}_b(E))$ 知 $\mathcal{B}(E)=\mathcal{H}$, 即 $\mu=\nu$.
证法二：令 $\mathcal{F}=\{A\subset E:\ \mu(A)=\nu(A)\}$.
(1) 由 $1\in\mathcal{C}_b(E)$, 故 $\Omega\in\mathcal{F}$;
(2)$A,B\in\mathcal{F},\ A\subset B\Rightarrow\mu(B\backslash A)=\mu(B)-\mu(A)=\nu(B)-\nu(A)=\nu(B\backslash A)\Rightarrow B\backslash A\in\mathcal{F}$;
(3) 令 $A_n\uparrow A$, 由测度的从下连续性 $\Rightarrow A\in\mathcal{F}$, 即 $\mathcal{F}$ 为 λ- 类.
令 $\mathcal{C}=\{F\subset E:\ F\text{为}E\text{中闭集}\}$. 则 $\mathcal{C}$ 为 π- 类. $\forall F\in\mathcal{C}$, 令 $f_n(x)=\left(\frac{1}{1+\rho(x,F)}\right)^n\in\mathcal{C}_b(E),\ f_n(x)\to I_F$. 由题设有 $\mu(f_n)=\nu(f_n)$. 再由控制收敛定理有 $\mu(I_F)=\nu(I_F)$. 故 $F\in\mathcal{F}$, 即 $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$. 从而有 $\mathcal{F}\supset\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{B}(E)$.

1.15 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 及 $(E,\mathcal{E})$ 为两个可测空间， f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 中的可测映射， μ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一测度.

(1) 令 $\mu f^{-1}(A)=\mu(f^{-1}(A)),\ A\in\mathcal{E}$. 则 μf^{-1} 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度 (通常称为由 f 在 $(E,\mathcal{E})$ 上**导出的测度** 或 f 的 **象测度**).

(2) 设 g 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的可测函数，则为要 g 关于测度 μf^{-1} 的积分存在 (相应地，可积), 必须且只需 $g\circ f$ 关于 μ 的积分存在 (相应地，可积). 此外，这时有

$$\int_\Omega g\circ f d\mu=\int_E g d(uf^{-1}).$$

证明 (1)$\mu f^{-1}(\emptyset)=\mu(\emptyset)=0$, 设 $A_n\in\mathcal{E},\ A_n\cap A_m=\emptyset,\ n\neq m$ 有

$$\begin{aligned}&\mu f^{-1}\left(\sum_{n=1}^\infty A_n\right)=\mu\left(f^{-1}\left(\sum_{n=1}^\infty A_n\right)\right)\\=&\mu\left(\sum_{n=1}^\infty f^{-1}(A_n)\right)=\sum_{n=1}^\infty\mu(f^{-1}(A_n))\\=&\sum_{n=1}^\infty\mu f^{-1}(A_n).\end{aligned}$$

故 μf^{-1} 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度.

(2) 令 $g=I_A,\ A\in\mathcal{E}$, 则

$$\int_E I_A d(\mu f^{-1})=\mu f^{-1}(A)=\int_\Omega I_{f^{-1}(A)}d\mu=\int_\Omega I_A(f)d\mu=\int_\Omega I_A\circ f d\mu,$$

即

$$\int_\Omega g\circ f d\mu=\int_E g d(uf^{-1}). \tag{$*$}$$

对 I_A 成立. 由积分的线性性质知 $(*)$ 式当 g 为非负 $\mathcal{E}$- 简单函数时成立. 若 g 为非负 $\mathcal{E}$- 可测函数，则存在 $\{g_n:\ n\in\mathbf{N}\}$ 为非负 $\mathcal{E}$- 简单函数序列，且 $0\le g_n\uparrow g$. 于是 $\{g_n\circ f:\ n\in\mathbf{N}\}$ 为非负 $\mathcal{F}$- 简单函数序列，且 $0\le g_n\circ f\uparrow g\circ f$, 因此由单调收敛定理知 $(*)$ 式对非负 $\mathcal{E}$- 可测函数成立.

若 g 为实 $\mathcal{E}$- 可测函数，则

$$\int_\Omega g^+\circ f d\mu=\int_E g^+ d(\mu f^{-1}), \tag{1}$$

$$\int_\Omega g^- \circ f d\mu = \int_E g^- d(\mu f^{-1}). \tag{2}$$

而 $g^\pm \circ f = (g \circ f)^\pm$, 故 $\int_E g d(\mu f^{-1})$ 存在 (可积) 等价于 (1),(2) 式的右边至少有一有限 (都有限), 因而也等价于 (1),(2) 式的左边至少有一有限 (都有限), 即 $\int_\Omega g \circ f d\mu$ 存在 (可积). 再由 (1),(2) 及积分定义知 $(*)$ 式对实值 $\mathcal{E}$- 可测函数成立. 对于复值 $\mathcal{E}$- 可测函数可对其实部与虚部分别应用 $\mathcal{E}$- 可测函数的结果，即得 $(*)$ 式成立.

§2 积分号下取极限

2.10 设 $f_n, h_n, g_n, f, h, g \in \mathcal{L}, h_n \le f_n \le g_n$,a.e.,$\forall n \ge 1$. 又设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$ 或 $g_n \xrightarrow{\mu} g$, $h_n \xrightarrow{\text{a.e.}} h$ 或 $h_n \xrightarrow{\mu} h$. 如果 h, g, h_n, g_n 都可积，且 $\mu(h_n) \to \mu(h)$, $\mu(g_n) \to \mu(g)$, 则 f 可积，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$.

证明 不妨设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, $g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$, $h_n \xrightarrow{\text{a.e.}} h$. 由题设有 $f_n - h_n \ge 0$, $f_n - g_n \le 0$, 且 $f_n - h_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f - h$, $f_n - g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f - g$. 又 g_n, h_n 可积，且 $h_n \le f_n \le g_n$, a.e. ,$\forall n \ge 1$ 则 f_n 可积. 对 $f_n - h_n$ 应用 Fatou 引理有

$$\mu(\liminf_{n\to\infty}(f_n - h_n)) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n - h_n) = \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n) - \mu(h),$$

即 $\mu(f - h) \le \liminf\limits_{n\to\infty} \mu(f_n) - \mu(h)$. 从而有 $\mu(f) \le \liminf\limits_{n\to\infty} \mu(f_n)$.

再对 $f_n - g_n$ 应用 Fatou 引理有 $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu(f_n - g_n) \le \mu(\limsup\limits_{n\to\infty}(f_n - g_n))$, 即 $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu(f_n) - \mu(g) \le \mu(f) - \mu(g)$. 从而有 $\mu(f) \ge \limsup\limits_{n\to\infty} \mu(f_n)$. 于是 f 可积，且 $\mu(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_n)$.

若是依测度收敛，则可选子列 a.e. 收敛.

2.11 若在 2.10 中有 $h_n \le 0 \le g_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|) = 0$.

证明 由 $h_n \le f_n \le g_n$, a.e. 知 $h \le f \le g$, $h_n - g \le f_n - f \le g_n - h$. 再由 $h_n \le 0 \le g_n$ 知，$|f_n - f| \le g_n - h + g - h_n$. 取 $F_n = g_n - h_n + g - h \ge 0$, $F_n \in \mathcal{L}^+$, 且 $F_n \xrightarrow{\text{a.e.}} 2g - 2h \ge 0$, a.e. F_n 及 $2g - 2h$ 可积，故 $\mu(F_n) \to 2\mu(g) - 2\mu(h)$. 由定理 2.7 得 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|) = 0$.

2.12 设 (f_n) 为一可测函数列. 若 $\sum_{n=1}^\infty \mu(f_n^+) < \infty$ 或 $\sum_{n=1}^\infty \mu(f_n^-) < \infty$, 则 $\sum_{n=1}^\infty f_n$, a.e. 有意义， $\sum_{n=1}^\infty f_n$ 的积分存在，且有 $\mu(\sum_{n=1}^\infty f_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(f_n)$.

证明 因 $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n = \sum\limits_{n=1}^\infty f_n^+ - \sum\limits_{n=1}^\infty f_n^-$, 由系 2.2 得

$$\mu\left(\sum_{n=1}^\infty f_n^+\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(f_n^+), \qquad \mu\left(\sum_{n=1}^\infty f_n^-\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(f_n^-).$$

再由 $\sum\limits_{n=1}^\infty \mu(f_n^+) < \infty$ 或 $\sum\limits_{n=1}^\infty \mu(f_n^-) < \infty$ 得 $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n^+ < \infty$, a.e. 或 $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n^- < \infty$, a.e. 故 $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n$ a.e. 有意义，且 $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n$ 积分存在.

$$\mu\left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) = \mu\left(\sum_{n=1}^\infty f_n^+\right) - \mu\left(\sum_{n=1}^\infty f_n^-\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(f_n^+) - \sum_{n=1}^\infty \mu(f_n^-) = \sum_{n=1}^\infty \mu(f_n).$$

§3 不定积分与符号测度

3.17 设 ν 为一符号测度， f 关于 ν 的积分存在 (见注 3.5(3)). 则对一切 $A\in\mathcal{F}$, fI_A 关于 ν 的积分存在，且 $A\mapsto\nu(fI_A)$ 定义了 $\mathcal{F}$ 上的一符号测度.

证明 $\int_\Omega fd\nu=\int_\Omega f^+d\nu-\int_\Omega f^-d\nu=\int_\Omega f^+d\nu^++\int_\Omega f^-d\nu^--\int_\Omega f^+d\nu^--\int_\Omega f^-d\nu^+$.
因 f 关于 ν 的积分存在，故有

$$\int_\Omega f^+d\nu^++\int_\Omega f^-d\nu^-<\infty,\ \text{或}\ \int_\Omega f^+d\nu^-+\int_\Omega f^-d\nu^+<\infty.$$

又 $\int_\Omega fI_Ad\nu=\int_\Omega f^+I_Ad\nu^++\int_\Omega f^-I_Ad\nu^--\int_\Omega f^+I_Ad\nu^--\int_\Omega f^-I_Ad\nu^+$, 且

$$\int_\Omega f^+I_Ad\nu^++\int_\Omega f^-I_Ad\nu^-\le\int_\Omega f^+d\nu^++\int_\Omega f^-d\nu^-,$$

$$\int_\Omega f^+I_Ad\nu^-+\int_\Omega f^-I_Ad\nu^+\le\int_\Omega f^+d\nu^-+\int_\Omega f^-d\nu^+.$$

从而有 $\int_\Omega f^+I_Ad\nu^++\int_\Omega f^-I_Ad\nu^-<\infty$, 或 $\int_\Omega f^+I_Ad\nu^-+\int_\Omega f^-I_Ad\nu^+<\infty$. 故 fI_A 关于 ν 的积分存在. 令 $\varphi:A\mapsto\nu(fI_A)$, 则有

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^\infty A_n\right)=\int_\Omega fI_{\sum\limits_{n=1}^\infty A_n}d\nu=\sum_{n=1}^\infty\int_\Omega fI_{A_n}d\nu=\sum_{n=1}^\infty\varphi(A_n),$$

即 φ 定义了 $\mathcal{F}$ 上的一符号测度.

3.18 设 ν 及 μ 为两个符号测度，f 关于 ν 的积分存在. 若 $\nu\ll\mu$(相应地 $\nu\perp\mu$), 则 $f.\nu\ll\mu$(相应地， $f.\nu\perp\mu$).

证明 (1) 设 $\nu\ll\mu$, 因

$$|f.\nu|(A)=\int_A f^+d\nu^++\int_A f^-d\nu^-+\int_A f^+d\nu^-+\int_A f^-d\nu^+.$$

$$|\mu|(A)=0\Rightarrow|\nu|(A)=0\Rightarrow\nu^+(A)=0,\text{且}\ \nu^-(A)=0\Rightarrow|f.\nu|(A)=0\Rightarrow f.\nu\ll\mu.$$

(2) 设 $\nu\perp\mu$, 则 $\exists N\in\mathcal{F}$, 使得

$$|\mu|(N)=0,\quad|\nu|(N^c)=0.$$

$$\begin{aligned}|f.\nu|(N^c)&=f^+.\nu^+(N^c)+f^-.\nu^-(N^c)+f^+.\nu^-(N^c)+f^-.\nu^+(N^c)\\&=f^+.|\nu|(N^c)+f^-.|\nu|(N^c)=0\Rightarrow f.\nu\perp\mu.\end{aligned}$$

3.19 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间， ν 为 $\mathcal{F}$ 上的一有限符号测度. 则下列二断言等价：

(1)$\nu\ll\mu$;

(2)$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得 $A\in\mathcal{F},\mu(A)<\delta\Rightarrow|\nu|(A)<\varepsilon$.

证明 (2)⇒(1) 令 $\mu(A)=0$, $\forall A\in\mathcal{F}$. 由 (2) 得 $\forall\varepsilon>0$, $|\nu|(A)<\varepsilon$.
由 ε 的任意性得 $|\nu|(A)=0$, 即 $\nu\ll\mu$.

(1)⇒(2) 反证法.
$\exists\varepsilon_0>0$, 取 $\delta=1/2^n>0$, $\exists A_n\in\mathcal{F}$, $\mu(A_n)<1/2^n$, 但 $|\nu|(A_n)\geq\varepsilon_0>0$.
取 $A=\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$ 有,

$$\mu(A)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\leq\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\leq\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k)=\frac{1}{2^{n-1}},\ \forall n\Rightarrow\mu(A)=0.$$

但 $|\nu|(A)\geq|\nu|(A_n)\geq\varepsilon_0>0$. 这与 $\nu\ll\mu$ 矛盾. 故 (2) 成立.
3.20 举例说明定理 3.11 中 μ 的 σ- 有限性假定不能去掉.

解 $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}=\{A\subset[0,1],\ A\text{或}A^c\text{为至多可数集}\}$. 令 $\mu(A)=|A|(|A|$ 为 A 的个数).

$$\nu(A)=\begin{cases}0, & A\text{可数},\\ 1, & A^c\text{可数}.\end{cases}$$

则 $\nu\ll\mu$, 且 μ 不是 σ- 有限测度. 假设存在一关于 μ 积分存在的可测函数 g, 使得

$$\nu(A)=\int_A gd\mu.$$

取 $A=\{\omega_0\}$, 则有

$$0=\nu(A)=g(\omega_0)\mu(A)=g(\omega_0),$$

即 $g(\omega_0)=0$. 又由 ω_0 的任意性有 $g\equiv0$. 则 $\nu\equiv0$, 这与 ν 的定义矛盾. 故定理 3.11 中 μ 的 σ- 有限性不能去掉.
3.21 设 μ 及 ν 为两个 σ- 有限测度, 则为要 $\nu\sim\mu$, 必须且只需存在可测函数 g:$0<g(\omega)<\infty$, $\forall\omega\in\Omega$, 使得 $\nu=g.\mu$.

证明 (⇒) 由 Radon-Nikodym 定理知, 存在一关于 μ 积分存在的可测函数 g, 使得 $\nu=g.\mu$. 此外, g 在 μ- 等价意义下是唯一的, 且 g 为 μ-a.e. 有限.

$$\nu([g\leq0])=\nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}[g\leq\frac{1}{n}]\right)=\lim_{n\to\infty}\nu([g\leq\frac{1}{n}])=\lim_{n\to\infty}\int_{[g\leq\frac{1}{n}]}gd\mu\leq\frac{1}{n}\mu([g\leq\frac{1}{n}])=0.$$

但 $\forall A\in\mathcal{F}$, $\nu(A)=\int_A gd\mu\geq0\Rightarrow g\geq0$, μ-a.e. 故 $\mu([g\leq0])=0$, $\nu([g\leq0])=0$, 即 $0<g(\omega)<\infty$, a.e. (μ 或 ν) , 再在零测集上定义 $g(\omega)=1$, 即得满足条件的 g.

(⇐) 因 $\nu=g.\mu$ 得 $\nu\ll\mu$. 若 $\nu(A)=\int_A gd\mu=0$, 则

$$0=\int_A gd\mu\geq\int_{A\cap[g>1/n]}gd\mu\geq\frac{1}{n}\mu(A\cap[g>1/n]),\ \forall n\geq1,$$

即 $\mu(A)=0$. 故 $\mu\ll\nu$, 即 $\nu\sim\mu$.
3.22 设 μ_1,μ_2 为可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的有限符号测度, 令

$$\mu_1\vee\mu_2=\mu_1+(\mu_2-\mu_1)^+,\quad \mu_1\wedge\mu_2=\mu_1-(\mu_1-\mu_2)^+,$$

则 $\mu_1\vee\mu_2$ 为满足 $\nu\geq\mu_1$ 且 $\nu\geq\mu_2$ 的最小符号测度 ν; $\mu_1\wedge\mu_2$ 为满足 $\nu\leq\mu_1$ 且 $\nu\leq\mu_2$ 的最大符号测度 ν.

证明 $\forall A\in\mathcal{F}$, 若 $\mu_1(A)\geq\mu_2(A)$, 则 $\mu_1\vee\mu_2(A)=\mu_1(A)+0=\mu_1(A)\geq\mu_2(A)$; 若 $\mu_2(A)\geq\mu_1(A)$, 则 $\mu_1\vee\mu_2(A)=\mu_1(A)+\mu_2(A)-\mu_1(A)=\mu_2(A)\geq\mu_1(A)$. 故

$$\mu_1\vee\mu_2\geq\mu_1,\qquad 且\ \mu_1\vee\mu_2\geq\mu_2.$$

假设存在一符号测度 ν, $\nu\geq\mu_1$, $\nu\geq\mu_2$, 但 $\exists A\in\mathcal{F}$, $s.t.$ $\nu(A)<\mu_1\vee\mu_2(A)$. 则当 $\mu_1(A)\geq\mu_2(A)(\mu_1(A)\leq\mu_2(A))$ 时, $\mu_1\vee\mu_2(A)=\mu_1(A)(=\mu_2(A))$. 故 $\nu(A)<\mu_1(A)(\mu_2(A))$ 矛盾, 即 $\mu_1\vee\mu_2$ 为满足 $\nu\geq\mu_1$, $\nu\geq\mu_2$ 的最小符号测度. 对于 $\mu_1\wedge\mu_2$ 同理可证.

3.23 设 μ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上符号测度, 则 $\|\nu\|_{\mathsf{var}}\leq 2\sup_{A\in\mathcal{F}}|\mu(A)|$. 若 $\mu(\Omega)=0$, 则 μ 为有限符号测度, 且有 $\|\mu\|_{\mathsf{var}}=2\sup_{A\in\mathcal{F}}|\mu(A)|$.

证明 设 $\Omega=D\cup D^c$ 为 μ 的 Hahn 分解, 由命题 3.6 得

$$\mu(D)=\sup\{\mu(B):\ B\in\mathcal{F}\},\qquad \mu(D^c)=\inf\{\mu(B):\ B\in\mathcal{F}\}.$$

故

$$\begin{aligned}\|\mu\|_{\mathsf{var}}=&|\mu|(\Omega)=\mu^+(\Omega)+\mu^-(\Omega)=\mu(D)-\mu(D^c)\\=&\sup_{B\in\mathcal{F}}\mu(B)-\inf_{B\in\mathcal{F}}\mu(B)\leq 2\sup_{B\in\mathcal{F}}|\mu(B)|.\end{aligned}$$

若 $\mu(\Omega)=0$, 则有 $\mu^+(\Omega)=\mu^-(\Omega)<\infty$. 所以 $|\mu|(\Omega)<\infty$, 即 μ 为有限符号测度, 且 $0=\mu(D)+\mu(D^c)=\sup\limits_{B\in\mathcal{F}}\mu(B)+\inf\limits_{B\in\mathcal{F}}\mu(B)$, 即 $\sup\limits_{B\in\mathcal{F}}|\mu(B)|=\sup\limits_{B\in\mathcal{F}}\mu(B)=-\inf\limits_{B\in\mathcal{F}}\mu(B)$. 故 $\|\mu\|_{\mathsf{var}}=2\sup\limits_{B\in\mathcal{F}}|\mu(B)|$.

3.24 设 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 表示 Ω 上有界 $\mathcal{F}$- 可测函数全体, $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 表示 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上有限符号测度全体. 对 $f\in B(\Omega,\mathcal{F})$, 令 $\|f\|=\sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$,

(1) $B(\Omega,\mathcal{F})$ 按范数 $\|\cdot\|$ 为一 Banach 空间 (完备赋范线性空间).

(2) 设 $\mu\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$, 令 $I_\mu(f)=\mu(f)$, $f\in B(\Omega,\mathcal{F})$, 则 μ 为 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一有界线性泛函, 且有 $\|I_\mu\|=\|\mu\|_{\mathsf{var}}$.(提示: 设 $\Omega=D\cup D^c$ 为 μ 的 Hahn 分解, 令 $f=I_D-I_{D^c}$, 考虑 $\mu(f)$.)

(3)$\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 按范数 $\|\cdot\|_{\mathsf{var}}$ 为一 Bannach 空间.

证明 (1) 易证 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 为线性空间, 且对 $f\in B(\Omega,\mathcal{F})$ 有

$$\|f\|=0\Leftrightarrow f=0;\qquad \forall\alpha\in\mathbf{R},\ \ \|\alpha f\|=|\alpha|\ \|f\|;$$

$$\forall g\in B(\Omega,\mathcal{F}),\ \ \|f+g\|=\sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)+g(\omega)|\leq\sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|+\sup_{\omega\in\Omega}|g(\omega)|=\|f\|+\|g\|.$$

这表明 $\|\cdot\|$ 是范数.

再证完备性. 设 $\{f_n\}\subset B(\Omega,\mathcal{F})$, 且 $f_n-f_m\xrightarrow{\|\cdot\|}0$, 即 $\sup\limits_{\omega\in\Omega}|f_n(\omega)-f_m(\omega)|\to 0$. $\forall\varepsilon>0$, $\exists n,m$ 充分大, 使得 $|f_n(\omega)-f_m(\omega)|<\varepsilon$, $\forall\omega\in\Omega$, 即 f_n-f_m 一致收敛于 0. 故由第二章习题 3.8 知, $\exists f\in B(\Omega,\mathcal{F})$ 使得 f_n 一致收敛于 f. 故 $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|}f\in B(\Omega,\mathcal{F})$, 即 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 按 $\|\cdot\|$ 为一 Banach 空间.

(2) 由积分的线性性知, μ 为 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一线性泛函. $\forall f\in B(\Omega,\mathcal{F})$ 满足 $\|f\|\leq 1$ 有

$$|I_\mu(f)|=|\mu(f)|=|\mu^+(f)-\mu^-(f)|\leq\mu^+(|f|)+\mu^-(|f|)\leq\mu^+(\Omega)+\mu^-(\Omega)=\|\mu\|_{\mathsf{var}}.$$

由 μ 为有限符号测度知, $\|\mu\|_{\mathsf{var}}<\infty$. 故 I_μ 为 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一有界线性泛函. 设 $\Omega=D+D^c$ 为 Ω 的 Hahn 分解. 令 $f=I_D-I_{D^c}$, 则 $\|f\|=1$, 且 $|I_\mu(f)|=\mu^+(D)+\mu^-(D^c)=\|\mu\|_{\mathsf{var}}$. 故 $\|I_\mu\|\geq\|\mu\|_{\mathsf{var}}$, 即 $\|I_\mu\|=\|\mu\|_{\mathsf{var}}$.

(3) 显然 $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 是一线性空间. $\forall\mu\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 有

$$\|\mu\|_{\mathsf{var}}=0\Leftrightarrow|\mu|(\Omega)=0\Leftrightarrow\mu=0;\qquad\forall\alpha\in\mathbf{R},\ \ \|\alpha\mu\|_{\mathsf{var}}=|\alpha\mu|(\Omega)=|\alpha|\ \|\mu\|_{\mathsf{var}};$$

设 $\mu_1,\mu_2\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 有

$$\begin{aligned}\|\mu_1+\mu_2\|_{\mathsf{var}}=|\mu_1+\mu_2|(\Omega)=(\mu_1+\mu_2)^+(\Omega)+(\mu_1+\mu_2)^-(\Omega)\\ \leq\mu_1^+(\Omega)+\mu_2^+(\Omega)+\mu_1^-(\Omega)+\mu_2^-(\Omega)=\|\mu_1\|_{\mathsf{var}}+\|\mu_2\|_{\mathsf{var}}.\end{aligned}$$

再证完备性. 设 $\{\mu_n\}\subset\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$, 且 $\mu_n-\mu_m\xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathsf{var}}}0$, 则 $\forall A\in\mathcal{F}$,

$$|\mu_n(A)-\mu_m(A)|\leq|\mu_n-\mu_m|(A)\leq\|\mu_n-\mu_m\|_{\mathsf{var}}.\tag{$*$}$$

故 $\mu(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)$ 存在且有限. 由 Vitali-Hahn-Saks 定理知, μ 为一符号测度, $\sup\limits_n\|\mu_n\|_{\mathsf{var}}<\infty$. 若 $\Omega=D\cup D^c$ 为 μ 的 Hahn 分解.

$$\|\mu\|_{\mathsf{var}}=\mu(D)-\mu(D^c)=\lim_{n\to\infty}(\mu_n(D)-\mu_n(D^c)).$$

而 $\forall n,\ \ |\mu_n(D)-\mu_n(D^c)|\leq2\|\mu_n\|_{\mathsf{var}}$. 故 $\|\mu\|_{\mathsf{var}}\leq2\sup\limits_n\|\mu_n\|_{\mathsf{var}}<\infty$. 从而有 $\mu\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$. 由 $(*)$ 得 μ_n 一致收敛于 μ. 又 $\|\mu_n-\mu\|_{\mathsf{var}}=\sup\limits_{A\in\mathcal{F}}(\mu_n-\mu)(A)-\inf\limits_{A\in\mathcal{F}}(\mu_n-\mu)(A)$. 则 $\mu_n\xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathsf{var}}}\mu$. 故 $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 按 $\|\cdot\|_{\mathsf{var}}$ 为一 Banach 空间.

§4 空间 L^p 及其对偶

4.19 简单可测函数全体在 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 中稠密.

证明 $\forall f\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 记 $\|f\|_\infty=a<\infty$. $\forall\varepsilon>0$, 将 $[-a,a]$ 分成长度小于 ε 的有限个小区间:

$$[a_0,a_1],\qquad(a_1,a_2],\qquad\cdots,\qquad(a_{n-1},a_n].$$

令 $f_\varepsilon=\sum\limits_{i=1}^n a_iI_{A_i}$, 其中 $A_1=f^{-1}([a_0,a_1])$, $A_k=f^{-1}((a_{k-1},a_k])$, $k\geq2$. 则在 $f^{-1}([-a,a])$ 上

$$|f-f_\varepsilon|<\varepsilon,\qquad f_\varepsilon\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu).$$

故 $\mu(|f-f_\varepsilon|>\varepsilon)\leq\mu(|f|>\|f\|_\infty)=0$, 即 $\|f-f_\varepsilon\|_\infty\leq\varepsilon$. 令 $\varepsilon\to0$ 得 $\|f-f_\varepsilon\|_\infty\to0$. 故简单可测函数全体在 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 中稠密.

4.20 设 $[a,b]$ 为一闭区间, μ 为 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 测度. 则对任何 $p:\ 1\leq p<\infty$, $[a,b]$ 上的阶梯函数全体在 $L^p([a,b],\mu)$ 中稠密. 由此进一步证明 $[a,b]$ 上的连续函数全体在 $L^p([a,b],\mu)$ 中稠密. 此外证明 $L^\infty([a,b],\mu)$ 不是可分的 Banach 空间.

证明 令 $\mathcal{C}=\{[c,d],\ a\leq c<d\leq b\}$ 且 $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{B}([a,b])$, $\mathcal{C}$ 为代数. 由 P_{13} 习题 3.9 知 $\forall A\in\mathcal{B}([a,b])$, $\varepsilon>0$, $\exists B\in\mathcal{C}$, $s.t.\ \mu(A\Delta B)<\varepsilon$. 故 $\mu(|I_A-I_B|^p)<\varepsilon^p$.

$\forall f=\sum\limits_{k=1}^n a_kI_{A_k}$, $A_k\in\mathcal{B}([a,b])$, $\forall\varepsilon>0$, 对 A_k, $\exists B_k\in\mathcal{C}$, $s.t.\ \mu(|I_{A_k}-I_{B_k}|^p)<\left(\frac{\varepsilon}{2^k(1+|a_k|)}\right)^p$. 取 $g=\sum\limits_{k=1}^n a_kI_{B_k}$, $B_k\in\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\|f-g\|_p=&\mu\left(|\sum_{k=1}^n a_kI_{A_k}-\sum_{k=1}^n a_kI_{B_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\sum_{k=1}^n\|a_k(I_{A_k}-I_{B_k})\|_p\\ \leq&\sum_{k=1}^n|a_k|\ \|I_{A_k}-I_{B_k}\|_p\leq\sum_{k=1}^n|a_k|\frac{\varepsilon}{2^k(1+|a_k|)}<\varepsilon.\end{aligned}$$

又 L^p 中简单函数在 L^p 中稠密，故 $\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k I_{B_k},\ B_k \in \mathcal{C},\ n \geq 1\}$ 在 L^p 中稠密，即 $[a,b]$ 上阶梯函数在 $L^p([a,b],\mu)$ 中稠密．又由于任意连续函数可由简单 (阶梯) 函数逼近，故 $[a,b]$ 上连续函数在 $L^p([a,b],\mu)$ 中稠密.

由 $L^\infty([a,b],\mu)$ 为度量空间及可分度量空间中的任意子集是可分的.
令 $M = \{f_s(\cdot)|\ s \in [a,b]\} \subset L^\infty([a,b],\mu)$, 其中

$$f_s(t) = \begin{cases} 0, & a \leq t < s, \\ 1, & s \leq t \leq b. \end{cases}$$

则 $\forall s_1 \neq s_2,\ \|f_{s_1}(\cdot) - f_{s_2}(\cdot)\|_\infty = 1$, 故 M 不可分．从而有 $L^\infty([a,b],\mu)$ 不可分.

4.21 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, 则 $\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2}$. 此外, 有 $\|f\|_p \to \|f\|_\infty (p \to \infty)$.

证明 (1)$1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, 则 $\varphi(x) \triangleq x^{\frac{p_2}{p_1}} (x > 0)$ 为凸函数．由 Jensen 不等式有 $\varphi(P(|f|^{p_1})) \leq P(\varphi(|f|^{p_1}))$, 即 $(P(|f|^{p_1}))^{\frac{p_1}{p_2}} \leq P(|f|^{p_2})$,

$$\|f\|_{p_1} = [P(|f|^{p_1})]^{\frac{1}{p_1}} \leq [P(|f|^{p_2})]^{\frac{1}{p_2}} = \|f\|_{p_2}.$$

(2) 由 (1) 知 $\{\|f\|_p\}$ 关于 p 为递增序列，故极限存在．于是由 P_{66} 定义 4.12,4.13 知
1^0 取 $E_0,\ P(E_0) = 0,\ s.t.\ \|f\|_\infty = \sup\limits_{\Omega \setminus E_0} |f(x)|$. 则

$$\int_\Omega |f(x)|^p dP = \int_{\Omega \setminus E_0} |f(x)|^p dP \leq \|f\|_\infty^p, \quad \forall p \geq 1.$$

故 $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$, 即 $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.
$2^0 \forall 0 \leq \varepsilon \leq \|f\|_\infty,\ E_\varepsilon \triangleq \{\omega:\ |f(\omega)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ 不为零测集，故

$$\|f\|_p \geq \left(\int_{E_\varepsilon} |f(x)|^p dP\right)^{\frac{1}{p}} \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)\,(P(E_\varepsilon))^{\frac{1}{p}}.$$

令 $p \to \infty$ 有 $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$. 由 ε 的任意性有 $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$.

综合上述 1^0,2^0 得 $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

4.22(Hölder 不等式的推广)(1) 设 $1 < p, q, r < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, 则有 $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

(2) 设 $1 < p_1, p_2, \cdots, p_m < \infty,\ m \geq 2$, 且 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$. 则有

$$\|f_1 \cdots f_m\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_m\|_{p_m}.$$

证明 (1) 设 $1 < p, q, r < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ 要证

$$[E(|fg|^r)]^{\frac{1}{r}} \leq [E(|f|^p)]^{\frac{1}{p}} [E(|g|^q)]^{\frac{1}{q}},\ \forall f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P), \quad g \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

因 $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$, 故 $|ab| \leq \frac{r}{p}|a|^{\frac{p}{r}} + \frac{r}{q}|b|^{\frac{q}{r}}$. 取 $\overline{f} = \frac{|f|^r}{\|f\|_p^r},\ \ \overline{g} = \frac{|g|^r}{\|g\|_q^r}$, 则有

$$E(|\overline{f}\overline{g}|) \leq E\left[\frac{r}{p}|\overline{f}|^{\frac{p}{r}} + \frac{r}{q}|\overline{g}|^{\frac{q}{r}}\right] = \frac{r}{p}E(|\overline{f}|^{\frac{p}{r}}) + \frac{r}{q}E(|\overline{g}|^{\frac{q}{r}}) = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1.$$

故 $E\left[(|f|^r|g|^r)/(\|f\|_p^r\|g\|_q^r)\right] \le 1$, 即 $\|fg\|_r \le \|f\|_p\|g\|_q$.

(2) 设 $1 < p_1, p_2 < \cdots p_m < \infty$, $m \ge 2$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$, 则由 (1) 得

$$\begin{aligned}\|f_1 \cdots f_m\|_1 \le & \|f_1\|_{p_1}\|f_2 \cdots f_m\|_{\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}} \\ \le & \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\|f_3 \cdots f_m\|_{\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}} \\ \le & \cdots \le \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_m\|_{p_m}.\end{aligned}$$

4.23 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, $f \in L^1 \cap L^\infty$. 试证: $\forall p \ge 1$, $f \in L^p$, 且 $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

证明 (1)$\forall p \ge 1$, 令 $C \triangleq \|f\|_\infty < \infty$, $\|f\|_\infty \le C$, μ-a.e.

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^p d\mu = & \int_\Omega |f|^{p-1}|f| d\mu = \int_{[|f|>C]} |f|^{p-1}|f| d\mu + \int_{[|f|\le C]} |f|^{p-1}|f| d\mu \\ \le & C^{p-1}\mu(|f|) = C^{p-1}\|f\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

故 $f \in L^p$.

(2) 证法同 4.21(2). 当 $\|f\|_\infty = 0$ 时显然有结论成立. 当 $\|f\|_\infty \ne 0$ 时, 取 E_0 : $\mu(E_0) = 0$, $s.t.$ $\|f\|_\infty = \sup\limits_{\Omega\backslash E_0} |f(x)|$, 由 $f \in L^\infty$ 得 $\mu(\Omega\backslash E_0) < \infty$,

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu = \int_{\Omega\backslash E_0} |f(x)|^p d\mu \le \|f\|_\infty^p\ \mu(\Omega\backslash E_0).$$

故 $\|f\|_p \le \|f\|_\infty[\mu(\Omega\backslash E_0)]^{\frac{1}{p}}$, 即 $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p \le \|f\|_\infty$.

另外, $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon < \|f\|_\infty$, $E_\varepsilon = [\omega : |f| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon]$ 不是零测集.
$\|f\|_p \ge (\|f\|_\infty - \varepsilon)[\mu(E_\varepsilon)]^{\frac{1}{p}}$. 故 $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$ 得 $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p \ge \|f\|_\infty$.

从而有 $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

4.24 设 λ 为 $\mathbf{R}$ 上的 Lebesgue 测度, $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda)$. 对每个 $x \in \mathbf{R}$, 令 $f_x(t) = f(t-x)$. 试证: $\forall x_0 \in \mathbf{R}$, 有 $\lim_{x\to x_0} \|f_x - f_{x_0}\|_p = 0$.

4.25 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, g 为一实值 μ- 可积函数, 在 $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上定义 T_g 如下:

$$T_g(f) = \int_\Omega fg d\mu, \quad f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu).$$

试证

$$\|g\|_1 = \sup\{|T_g(f)| : \|f\|_\infty \le 1\}.$$

证明 (1)$\forall f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$,

$$|T_g(f)| \le \int_\Omega |fg| d\mu \le \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

即 $\sup\{|T_g(f)| : \|f\|_\infty < 1\} \le \|g\|_1$.

(2) 取 $f = \mathsf{sgn} g$, 则

$$|T_g(f)| = |\int_\Omega g \cdot \mathsf{sgn} g d\mu| = \|g\|_1.$$

故 $\|g\|_1 = \sup\{|T_g(f)| : \|f\|_\infty < 1\}$.

§5 Daniell 积分

5.10 设 M 为一个 n 维 Riemann 流形， $\mathcal{U}$ 是 M 的一个坐标领域， $\{x^i\}$ 是 $\mathcal{U}$ 中的坐标函数， $\{g_{ij}\}$ 为在 $\mathcal{U}$ 中的 Riemann 度量系数， $G = \mathsf{det}[g_{ij}]$(det 表示矩阵的行列式). 令 $C_c(M)$ 表示 M 上具紧支撑的连续泛函全体. 设 $f \in C_c(M)$, 其支撑含于 $\mathcal{U}$, 定义

$$\int_{\mathcal{U}} f = \int_{\mathcal{U}} f\sqrt{G}dx^1 \cdots dx^n.$$

对一般的 $f \in C_c(M)$, 可利用上式及 M 的一个单位分解来定义 $\int_M f$. 试证 $f \mapsto \int_M f$ 为 $C_c(M)$ 上的 Daniell 积分.

§6 Bochner 积分和 Pettis 积分

6.7 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间， $X : \Omega \to E$ 为一强 μ- 可测函数. 则为要 X 为 Bochner 可积，必须且只需存在一列简单可测函数 $\{X_n,\ n \geq 1\}$, 使得对 a.e. $\omega \in \Omega$, s-$\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$, 且 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X_m\| d\mu = 0$.

证明 由强 μ- 可测定义，不妨设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为完备测度空间，且 X 为强可测函数.

($\Rightarrow$) 设 X 为 Bochner 可积，由定理 6.3, $\exists$Borel 可测简单函数列 $\{X_n\}$, $s.t.$

$$\|X_n\| \leq \|X\|,\ \forall n \geq 1,\ 且\ \text{s-}\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega),\ \forall \omega \in \Omega.$$

故 $\|X_n\|$ 关于 μ- 可积. 从而有 X_n 关于 μ 为 Bochner 可积， $\forall n \geq 1$.
又 $\|X_n - X\| \to 0$, $n \to \infty$. 由 Fatou 引理得 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X\| d\mu = 0$.
又 $\int_\Omega \|X_n - X_m\| d\mu \leq \int_\Omega \|X_n - X\| d\mu + \int_\Omega \|X_m - X\| d\mu$, 故 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X_m\| d\mu = 0$.

($\Leftarrow$) 设 X_n 为简单函数列， s-$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$, 且 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X_m\| d\mu = 0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X\| d\mu = 0$. 又 X_n 关于 μ 为 Bochner 可积，且关于 μ- 可积,
故 $\int_\Omega \|X\| d\mu \leq \int_\Omega \|X_n - X\| d\mu + \int_\Omega \|X_n\| d\mu < +\infty$. 从而有 $\|X\|$ 关于 μ 可积.
由定理 6.4 知 X 关于 μ 为 Bochner 可积.

6.8 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间， $\{X_n\}$ 为一列 Bochner 可积函数， X 为一强 μ- 可测函数. 如果对 a.e.ω, s-$\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$, 且存在一非负 μ- 可积函数 g, 使得 $\|X_n\| \leq g$, a.e. $\forall n \geq 1$, 则 X 为 Bochner 可积，且有

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n d\mu = \int_\Omega X d\mu.$$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时， $\|X_n - X\| \leq \varepsilon$. 故 $\|X\| \leq \|X_n - X\| + \|X_n\| \leq \varepsilon + g$. 令 $\varepsilon \to 0$ 得 $\|X\| \leq g$. 故 $\|X\|$ 关于 μ 可积， $\int_\Omega X d\mu$ 存在. 又 $\|X_n - X\| \leq 2g$, 由控制收敛定理得

$$\|\int_\Omega X_n d\mu - \int_\Omega X d\mu\| \leq \int_\Omega \|X_n - X\| d\mu \to 0,\quad n \to \infty.$$

6.9 设 μ 为 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ 上的 Lebesgue 测度， E 为 Banach 空间 $L^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$. 对 $A \in \mathcal{B}([0,1])$, 令 $\nu(A) = I_A$. 试证:

(1)ν 为关于 μ 绝对连续的 E- 值测度;

(2) 不存在 Bochner 可积函数 $X:[0,1]\to E$, 使得 $\nu(A)=\int_A Xd\mu$, $\forall A\in\mathcal{B}([0,1])$.

证明 (1) 设 $\mu(A)=0$, $A\in\mathcal{B}([0,1])$, $I_A\in L^1([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\mu)$. 则 $\nu(A)$ 为 E- 值集函数. 由示性函数的性质知 ν 为 E- 值测度，于是 $\forall f\in E^*=L^\infty$ 有

$$f(\nu(A))=f(I_A)=\int_{[0,1]}fI_Ad\mu=\int_{[0,1]}f(\omega)I_A(\omega)d\mu=0.$$

由 f 的任意性知 $\nu(A)=0$. 故 ν 关于 μ 为绝对连续的 E- 值测度.

(2)

6.10 证明注 6.5(3), 即设 X 关于 μ 为 Bochner 可积，则 $\forall A\in\mathcal{F}$, XI_A 仍为 Bochner 可积，其 Bochner 积分记为 $\int_A Xd\mu$. 令

$$\nu(A)=\int_A Xd\mu,\quad A\in\mathcal{F},\tag{6.7}$$

则 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的下述意义下的 **E- 值测度**: (i)$\nu(\emptyset)=0$;(ii) 对 $\mathcal{F}$ 中两两不相交集合序列 $\{A_i\}$, 有 $\nu(\sum_{i=1}^\infty A_i)=\sum_{i=1}^\infty\nu(A_i)$. 我们称 ν 为 X 关于 μ 的 **不定积分**. 显然 ν 关于 μ 在下述意义下是 **绝对连续** 的，即 $\mu(A)=0\Rightarrow\nu(A)=0$. 此外，令

$$\|\nu\|_{\mathsf{var}}=\sup\left\{\sum_{i=1}^\infty\|\nu(A_i)\|:\{A_i\}\subset\mathcal{F}\text{ 为}\Omega\text{的可数划分}\right\},\tag{6.8}$$

称 $\|\nu\|_{\mathsf{var}}$ 为 ν 的 **全变差**, 则有

$$\|\nu\|_{\mathrm{var}}=\int_\Omega\|X\|d\mu.\tag{6.9}$$

6.11 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间， E 为一自反的 Banach 空间 (即 $E^{**}=E$), $X:\Omega\to E$ 为一弱 μ- 可测函数. 如果 $\forall f\in E^*$, $f(X)$ 为 μ- 可积，则 X 为 Pettis 可积.

第四章 乘积可测空间上的测度与积分

§1 乘积可测空间

1.5 设 I 为一可数集， $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ 为一族可测空间. 若每个 $\mathcal{F}_i$ 可分，则 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ 也可分.

证明 由题意可设 $\mathcal{C}_i$ 可数且 $\sigma(\mathcal{C}_i)=\mathcal{F}_i, i\in I$. 于是由习题 1.6 得

$$\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i=\sigma\left(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i)\right).$$

从而由上式及 $\mathcal{C}_i, I$ 可数知， $\bigcup\limits_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i)$ 可数，故 $\prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i$ 可分.

1.6 设 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ 为一族可测空间， $\mathcal{C}_i$ 为 $\mathcal{F}_i$ 的子类， $i\in I$. 若对每个 $i\in I,\sigma(\mathcal{C}_i)=\mathcal{F}_i$, 则有 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i=\sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))$.

证明 显然有 $\sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))\subset\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$. 故要证 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i=\sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))$. 只需证 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i\subset\sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))$. 令

$$\mathcal{G}=\left\{A=(A_i):i\in I,A_i\in\Omega_i,\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(A_i)\subset\sigma\left(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i)\right)\right\}$$

易证 $(\mathcal{C}_i,i\in I)\subset\mathcal{G}$ 且 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数. 从而有 $\sigma((\mathcal{C}_i,i\in I))\subset\sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))$. 故结论成立.

§2 乘积测度与 Fubini 定理

2.8 设 $\mathbf{R}$ 为实直线，试证 $\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R})=\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$.

证明 事实上，对一切 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$, 有

$$(-\infty,x]=(-\infty,x_1]\times(-\infty,x_2]\in\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

而 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)=\sigma(\{(-\infty,x]:x\in\mathbf{R}^2\})$, 故 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)\subset\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R})$. 于是要证 $\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R})=\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$ 只需证 $\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R})\subset\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$. 即

$$A_1\times A_2\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^2),A_i\in\mathcal{B}(\mathbf{R}),i=1,2. \tag{$*$}$$

对任意给定的 $a_2\in\mathbf{R}$, 令

$$\mathcal{G}_1=\{A_1\in\mathcal{B}(\mathbf{R}):A_1\times(-\infty,a_2]\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)\}.$$

易证 $\mathcal{G}_1$ 为 $\mathbf{R}$ 中 σ- 代数，且 $\{(-\infty,a_1]:a_1\in\mathbf{R}\}\subset\mathcal{G}_1$, 故 $\mathcal{G}_1=\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

其次，对任给的 $A_1\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$, 令

$$\mathcal{G}_2=\{A_2\in\mathcal{B}(\mathbf{R}):A_1\times A_2\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)\}.$$

易证 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathbf{R}$ 中 σ- 代数，且 $\{(-\infty,a_2]:a_2\in\mathbf{R}\}\subset\mathcal{G}_2$. 所以 $\mathcal{G}_2=\mathcal{B}(\mathbf{R})$, 这就得到了 $(*)$ 式. 又

$$\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R})=\sigma(\{A_1\times A_2:A_i\in\mathcal{B}(\mathbf{R}),i=1,2\})\subset\mathcal{B}(\mathbf{R}^2).$$

故 $\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R})=\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$.

2.9 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为 σ- 有限测度空间， $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 则下列条件等价：

(1)$(\mu\times\nu)(E)=0$;

(2)$\mu(E^y)=0,\nu$-a.e. y;

(3)$\nu(E_x)=0,\mu$-a.e. x.

证明 由定理 2.4 得

$$(\mu\times\nu)(E)=\int_X\nu(E_x)\mu(dx)=\int_Y\mu(E^y)\nu(dy).$$

而 $\nu(E_x),\mu(E^y)$ 非负，故

$$\begin{aligned}(\mu\times\nu)(E)&\Longleftrightarrow\mu(E^y)=0,\nu\text{-a.e.}y\\&\Longleftrightarrow\nu(E_x)=0,\mu\text{-a.e.}x.\end{aligned}$$

2.10 设 $(X,\mathcal{A})$ 及 $(Y,\mathcal{B})$ 为可测空间， μ_1 及 ν_1 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的 σ- 有限测度， μ_2 及 ν_2 为 $(Y,\mathcal{B})$ 上的 σ- 有限测度. 若 $\nu_1\ll\mu_1$ 且 $\nu_2\ll\mu_2$, 则 $\nu_1\times\nu_2\ll\mu_1\times\mu_2$, 且有

$$\frac{d(\nu_1\times\nu_2)}{d(\mu_1\times\mu_2)}(x,y)=\frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y),\ \mu_1\times\mu_2\text{-a.e.}.$$

证明 $\forall E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, 由习题 2.9 得

$$\begin{aligned}(\mu_1 \times \mu_2)(E) = 0 &\Longleftrightarrow \mu_1(E^y) = 0,\ \mu_2\text{-a.e. } y \\ &\Longleftrightarrow \mu_2(E_x) = 0,\ \mu_1\text{-a.e. } x.\end{aligned}$$

再由 $\nu_1 \ll \mu_1$ 且 $\nu_2 \ll \mu_2$ 及习题 2.9 得

$$\begin{aligned}(\mu_1 \times \mu_2)(E) = 0 &\Longleftrightarrow \nu_1(E^y) = 0,\ \nu_2\text{-a.e. } y \\ &\Longleftrightarrow \nu_2(E_x) = 0,\ \nu_1\text{-a.e. } x \\ &\Longleftrightarrow \nu_1 \times \nu_2(E) = 0,\end{aligned}$$

即 $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$.

$\forall E = A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, 由 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}\int_E \frac{d\nu_1}{d\mu_1}\frac{d\nu_2}{d\mu_2} d(\mu_1 \times \mu_2) &= \int_A \frac{d\nu_1}{d\mu_1} d\mu_1 \int_B \frac{d\nu_2}{d\mu_2} d\mu_2 \\ &= \int_A d\nu_1 \int_B d\nu_2 = \int_E d(\nu_1 \times \nu_2) \\ &= \int_E \frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)} d(\mu_1 \times \mu_2).\end{aligned}$$

故由 R-N 定理知 $\forall E = A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$,

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)} = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}\frac{d\nu_2}{d\mu_2},\ \mu_1 \times \mu_2\text{-a.e.}$$

再由

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$$

立知

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)} = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}\frac{d\nu_2}{d\mu_2},\ \mu_1 \times \mu_2\text{-a.e.}$$

2.11 设 $\sum_{m,n} a_{m,n}$ 为绝对收敛的双重级数. 试用 Fubini 定理证明

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}.$$

2.12 试用 Fubini 定理证明 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx = 1$.

设 $S_a = [0,a] \times [0,a]$, 显然函数 $f(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 在 S_a 上可积，且由 Fubini 定理知

$$F(a) = \iint\limits_{S_a} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \left(\int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2.$$

作半径为 a 和 $\sqrt{2a}$ 的 $\frac{1}{4}$ 圆 D_1 和 D_2, 它们分别含于 S_a 和包含 S_a. 由 $e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} > 0$ 及积分的单调性知

$$\begin{aligned}H(a) = \iint\limits_{D_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy &\le \iint\limits_{S_a} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \\ &\le \iint\limits_{D_2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = G(a).\end{aligned}$$

因为

$$H(a)=\iint\limits_{D_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a e^{-\frac{r^2}{2}}rdr=\frac{\pi}{2}(1-e^{-\frac{a^2}{2}}).$$

同理可得

$$G(a)=\frac{\pi}{2}(1-e^{-a^2}).$$

且有 $\lim\limits_{a\to\infty}H(a)=\lim\limits_{a\to\infty}G(a)=\frac{\pi}{2}$. 从而有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1.$$

2.13 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 为 σ- 有限测度空间， f 为 X 上的一非负 $\mathcal{A}$- 可测函数. 试证

$$\int_X f(x)\mu(dx)=\int_0^{\infty}\mu([f>y])dy.$$

证明 设 λ 为 $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上的 Lebesgue 测度. 令

$$E=\{(x,y)\in X\times\mathbf{R}:0\le y<f(x)\}.$$

则 $\lambda(E_x)=f(x)$. 于是由 Fubini 定理得

$$\int_X f(x)\mu(dx)=\int_X\lambda(E_x)\mu(dx)=\int_{\mathbf{R}}\mu(E^y)\lambda(dy)=\int_0^{\infty}\mu([f>y])dy.$$

2.14 设 $f(t)$ 及 $g(t)$ 为 $[0,\infty]$ 上的两个右连续增函数. 我们用 μ_f 及 μ_g 分别表示它们在 $[0,\infty]$ 上诱导出的测度 (见第一章定理 5.4). 试证：对 $0\le a<b<\infty$, 有

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b f(s)\mu_g(ds)+\int_a^b g(s-)\mu_f(ds),$$

其中 $g(s-)=\lim_{t\uparrow\uparrow s}g(t)$(记号 $t\uparrow\uparrow s$ 表示 $t\to s$, 且 $t<s$).

证明 令 $E=(a,b]\times(a,b]$, 则有

$$E=\{(x,y):a<x\le y\le b\}\cup\{(x,y):a<y<x\le b\}\triangleq E_1+E_2.$$

显然 $E_1,E_2\in\mathcal{B}(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$. 再由 Fubini 定理得

$$(\mu_f\times\mu_g)(E_1)=\int_{E_1}d(\mu_f\times\mu_g)=\int_a^b\left(\int_X I_{(a,b]}d\mu_f\right)d\mu_g=\int_a^b(f(y)-f(a))d\mu_g.$$

同理可得 $(\mu_f\times\mu_g)(E_2)=\int_a^b(g(x-)-g(a))d\mu_f$. 而

$$(\mu_f\times\mu_g)(E)=\mu_f((a,b])\mu_g((a,b])=(f(b)-f(a))(g(b)-g(a)).$$

又 $(\mu_f\times\mu_g)(E)=(\mu_f\times\mu_g)(E_1)+(\mu_f\times\mu_g)(E_2)$. 故

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b f(s)\mu_g(ds)+\int_a^b g(s-)\mu_f(ds).$$

2.15 设 $f \in L^1(\mathbf{R})$, $g \in L^p(\mathbf{R})$, 则有下列结论:

(1)$(x,t) \mapsto f(x-t)g(t)^p$ 为 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$- 可测，且 Lebesgue 可积;

(2) 对 a.e. $x, t \mapsto f(x-t)g(t)$ 为 Lebesgue 可积.

定义 f 与 g 的 **卷积** 如下: $\forall x \in \mathbf{R}$, 令

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt, & \text{可积情形}, \\ 0, & \text{其它情形}. \end{cases}$$

则 $f * g \in L^p(\mathbf{R})$, 且有如下的 **Young不等式**: $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$.

(3) 若 g 有界，则 $f * g$ 连续.

证明 (1) 显然 $f(x-t)g(t)^p$ 为 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$ 可测. 由 Fubini 定理及 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\mathbf{R}^2} f(x-t)g(t)^p dxdt \right| &\le \iint_{\mathbf{R}^2} |f(x-t)||g(t)|^p dxdt \\ = \int_{\mathbf{R}} |g(t)|^p \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x-t)|dx \right) dt &= \|f\|_1 \|g\|_p^p < \infty, \end{aligned}$$

即 $f(x-t)g(t)^p$ 为 Lebesgue 可积.

(2) 取 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)dt \right| &\le \int_{\mathbf{R}} |f(x-t)|^{\frac{1}{q}} |f(x-t)|^{\frac{1}{p}} |g(t)|dt \\ &\le \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x-t)|dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x-t)||g(t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \|f\|_1^{\frac{1}{q}} \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \|g\|_p < \infty. \end{aligned}$$

所以对 a.e. x, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ 为 Lebesgue 可积.

往证 Young 不等式.

第一步: 令 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^1$, $g \in L^p$, $h \in L^q$, 且 $f, g, h \ge 0$, 则由 Fubini 定理得

$$\int_{\mathbf{R}} h(x) \left(\int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}} g(y) \left(\int_{\mathbf{R}} f(x-y)h(x)dx \right) dy \le \|g\|_p \|f\|_1 \|h\|_q.$$

又因 $(L^q)^* = L^p$, 且 $h \in L^q$ 则有

$$\|f * g\|_p = \sup_{\|h\|_q \le 1} \left| \int_{\mathbf{R}} f * g(x)h(x)dx \right| \le \|f\|_1 \|g\|_p.$$

第二步: 令 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $f \in L^p$, $g \in L^q$, $r' = \frac{r}{r-1}$, 则 $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1$, $r \ge 1$. 所以对任意 $h \in L^r (r \ge 1) \Rightarrow h \in L^1 \cap L^r$. 故由 Fubini 定理得

$$\int_{\mathbf{R}} h(x) \left(\int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}} g(y) \left(\int_{\mathbf{R}} f(x-y)h(x)dx \right) dy \le \|g\|_q \|\widetilde{f} * h\|_{q'}.$$

其中 $\widetilde{f}$ 为 f 的 Fourier 变换 $\widetilde{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}e^{-ixy}f(y)dy$, 且

$$\|\widetilde{f}*h\|_{q'}\le\|\widetilde{f}\|_p\|h\|_{r'},\ \int_{\mathbf{R}}h(x)(f*g)(x)dx\le\|g\|_q\|\widetilde{f}\|_p\|h\|_{r'}.$$

但 $\|\widetilde{f}\|_p=\|f\|_p$. 由 h 的任意性得

$$\|f*g\|_r\le\|f\|_p\|g\|_q,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}.$$

综上所述有结论成立.

(3) 设 $|g(t)|\le M$, 则第三章习题 4.24 得

$$\begin{aligned}|f*g(x)-f*g(x_0)|&=\left|\int_{\mathbf{R}}(f(x-t)-f(x_0-t))g(t)dt\right|\\&\le\int_{\mathbf{R}}|f(x-t)-f(x_0-t)||g(t)|dt\\&\le M\int_{\mathbf{R}}|f(x-t)-f(x_0-t)|dt\\&\le M\|f_x-f_{x_0}\|\to 0,\end{aligned}$$

即 $f*g$ 为连续函数.

2.16(Steinhaus引理) 设 E 为 $\mathbf{R}$ 的一 Borel 子集，令 $D(E)=\{x-y:x,y\in E\}$, 若 E 的 Lebesgue 测度 $\lambda(E)>0$, 则 $D(E)$ 包含一含原点的开区间.

证明 因 λ 为 $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ 上 σ- 有限测度，故可设 $0<\lambda(E)<\infty$. 令

$$x+E\triangleq\{x+y:y\in E\},\qquad -E\triangleq\{-x:x\in E\}.$$

$$F(x)\triangleq\lambda(E\cap(x+E))=\int_{E\cap(x+E)}dy=\int_{\mathbf{R}}I_{-E}(x-y)I_E(y)dy=I_{-E}*I_E(x).$$

上面第三个等式用到这样一个事实：$y\in E\cap(x+E)\Longleftrightarrow y\in E$且$x-y\in -E$. 由习题 2.15(3) 知 $F(x)$ 连续, 且 $F(0)=\lambda(E)>0$. 则存在 $\delta>0$, s.t. $FI_{(-\delta,\delta)}>0$. 从而有 $\forall x\in(-\delta,\delta)$, $\lambda(E\cap(x+E))>0$. 故 $E\cap(x+E)\ne\emptyset$, $x\in D(E)$, 即 $(-\delta,\delta)\subset D(E)$.

2.17(Steinhaus 引理的推广) 设 A,B 为 $\mathbf{R}$ 的两个 Borel 子集，令 $D(A,B)=\{y-z:y\in A,z\in B\}$, 若 $\lambda(A)>0$, 且 $\lambda(B)>0$, 则 $D(A,B)$ 包含一非空开区间.

证明 与习题 2.16 同理，设 $0<\lambda(A)<\infty$, $0<\lambda(B)<\infty$. 令 $F(x)=\lambda(A\cap(x+B))$. 因 $y\in A\cap(x+B)\Longleftrightarrow y\in A$, 且$x-y\in -B$. 故

$$F(x)=\int_{A\cap(x+B)}dy=I_{-B}*I_A(x).$$

由 Fubini 定理得 $\int_{\mathbf{R}}F(x)dx=\lambda(A)\lambda(B)>0$, 即 $\exists x_0\in\mathbf{R}$, s.t. $F(x_0)>0$. 再由习题 2.15(3) 知 $F(x)$ 连续，故 $\exists\delta>0$, s.t. $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset D(A,B)$.

2.18 设 $f(x,y)$ 为定义于 $V=(a,b)\times(c,d)$ 上的一实值连续函数. 如果 f 满足下列条件:

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 V 上存在且连续;

(2) 对某个 $x_0 \in (a,b)$, $\frac{d}{dy}[f(x_0,y)]$ 对一切 $y \in (c,d)$ 存在;

(3) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 在 V 上存在且连续,

则 $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 在 V 上存在，且有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

证明 任意固定 $(x_0,y_0) \in (a,b) \times (c,d)$, 由 Fubini 定理得

$$f(\overline{x},\overline{y}) - f(x_0,\overline{y}) - f(\overline{x},y_0) + f(x_0,y_0) = \int_{y_0}^{\overline{y}}\int_{x_0}^{\overline{x}} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dxdy.$$

故有

$$\frac{f(\overline{x},\overline{y}) - f(\overline{x},y_0)}{\overline{y}-y_0} = \frac{f(x_0,\overline{y}) - f(x_0,y_0)}{\overline{y}-y_0} + \frac{\int_{y_0}^{\overline{y}}\int_{x_0}^{\overline{x}} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dxdy}{\overline{y}-y_0}.$$

令 $\overline{y} \to y_0$, 由题设知

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},y_0) = \frac{d}{dy} f(x_0,y_0) + \int_{X_0}^{\overline{x}} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y_0)dx. \qquad (*)$$

由 y_0, x 的任意性得 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 V 上存在. 再由 $(*)$ 式得

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_2,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y_0)dx.$$

从而有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y_0).$$

§3 由 σ- 有限核产生的测度

3.5(Fubini 定理的推广形式) 设 K 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(Y,\mathcal{B})$ 的一个 σ- 有限核， μ 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的 σ- 有限测度， μK 为 (3.2) 定义的测度. 若 f 为 $X \times Y$ 上一 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$- 可测函数，它关于 μK 可积 (相应地，积分存在), 则有下列结论:

(1) 对 μ-a.e. x, f_x 关于 $K(x,\cdot)$ 可积 (相应地，积分存在) ;

(2) $\forall x \in X$, 令

$$I_f(x) = \begin{cases} \int_Y f_x(y)K(x,dy), & \text{可积 (相应地，积分存在) 情形,} \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases}$$

则 I_f 为 μ- 可积 (相应地，积分存在), 且有

$$\int_{X \times Y} f d(\mu K) = \int_X I_f(x)\mu(dx).$$

3.6 设 $(X_j,\mathcal{A}_j)$, $j=1,\cdots,n$ 为可测空间， μ_1 为 $(X_1,\mathcal{A}_1)$ 上的一 σ- 有限测度. 对每个 $2 \le i \le n$, 设 $K(x_1,\cdots,x_{i-1},dx_i)$ 为从 $(\prod_{j=1}^{i-1} X_j, \prod_{j=1}^{i-1} \mathcal{A}_i)$ 到 $(X_i,\mathcal{A}_i)$ 的一个 σ- 有限核.

(1) 在 $(\prod_{j=1}^n X_j, \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j)$ 上存在唯一的测度 μ, 使得对一切可测矩形 $\prod_{j=1}^n A_j \in \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j$ 有

$$\mu(\prod_{j=1}^n A_j) = \int_{A_1} \mu_1(dx_1) \cdots \int_{A_n} K(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n).$$

此外， μ 是 σ- 有限测度.

(2) 设 f 为 $(\prod_{j=1}^n X_j, \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j)$ 上的非负可测函数，则有

$$\int f d\mu = \int_{X_1} \mu_1(dx_1) \int_{X_2} K(x_1, dx_2) \cdots \int_{X_{n-1}} K(x_1, \cdots, x_{n-2}, dx_{n-1})$$
$$\int_{X_n} f(x_1, \cdots, x_n) K(x_1, \cdots, x_{n-1}, dx_n).$$

3.7 设 K_1, K_2 为从 $(X, \mathcal{A})$ 到 $(Y, \mathcal{B})$ 的 σ- 有限核， μ_1, μ_2 为 $(X, \mathcal{A})$ 上的测度. 为要 $\mu_1 K_1$ 关于 $\mu_2 K_2$ 绝对连续，必须且只需 μ_1 关于 μ_2 绝对连续，且对 μ_1-a.e. $x \in X$, $K_1(x, \cdot)$ 关于 $K_2(x, \cdot)$ 绝对连续. 此外，这时有

$$\frac{d(\mu_1 K_1)}{d(\mu_2 K_2)}(x, y) = \frac{dK_1(x, \cdot)}{dK_2(x, \cdot)}(y) \frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x).$$

§4 无穷乘积空间上的概率测度

4.3 设 $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i), i \in I\}$ 为一族概率空间，令 $\mathcal{P}_0(I)$ 表示 I 的非空有限子集全体，则在 $(\prod_{i \in I} \Omega_i, \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i)$ 上存在唯一的概率测度 P, 使得对任何 $S \in \mathcal{P}_0(I)$, 有

$$P\left(\prod_{i \in S} A_i \times \prod_{i \in I \setminus S} \Omega_i\right) = \prod_{i \in S} P_i(A_i), \ A_i \in \mathcal{F}_i, \ i \in S.$$

证明 当 I 为有限或可数集时，由系 4.2 Kolmogrov 定理可证得结论成立. 下面只考虑 I 为不可数情形.

对一切 $A \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$, 由 $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i = \bigcup_{\substack{I_c \subset I \\ I_c \text{可数}}} \mathcal{F}_{I_c} \times \Omega_{I \setminus I_c}$ 得：存在 $I_c \setminus \subset I$ 可数集，使得

$$A = A_{I_c} \times \Omega_{I \setminus I_c}, \quad A_{I_c} \in \mathcal{F}_{I_c}.$$

再由 Kolmogrov 定理知在 $(\Omega_{I_c}, \mathcal{F}_{I_c})$ 上存在唯一的无穷乘积概率测度 P_{I_c}. 定义

$$P_I(A) = P_{I_c}(A_{I_c}).$$

易证 $P_I(A)$ 的值与 A 的无关， P_I 具有 σ- 可加性，由测度扩张定理知是唯一的.

4.4 试将定理 4.1 推广到任意无穷多个可测空间乘积情形.

内容 设 $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)_{j \in I}$ 为一族可测空间， $\Omega = \prod_{j \in I} \Omega_j$, $\mathcal{F} = \prod_{j \in I} \mathcal{F}_j$. 固定 $j_0 \in I, P_{j_0}$ 为 $(\Omega_{j_0}, \mathcal{F}_{j_0})$ 上的概率测度. 令 $S \in I \setminus \{j_0\}$ 且 $S \in \mathcal{P}_0(I)$, $|s| = t$, $P(\omega_{j_0}, \omega_{j_1}, \cdots, \omega_{j_{t-1}}, d\omega_{j_t})$ 为从 $(\Omega_{j_0} \times \prod_{j \in S \setminus \{j_0\}} \Omega_j, \mathcal{F}_{j_0} \times \prod_{j \in S \setminus \{j_0\}} \mathcal{F}_j)$ 到 $(\Omega_{j_0}, \mathcal{F}_{j_0})$ 的一个概率核，则存在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的唯一概率测度 P, s.t. 对一切 $S \in \mathcal{P}_0(I)$ 有

$$P(B^S \times \prod_{i \in I \setminus S} \Omega_i) = P_S(B^S).$$

其中 P_S 为 $\prod\limits_{i\in S}\mathcal{F}_i$ 上如下定义的概率测度：

$$P_S(B^S)=\int_{\Omega_{j_0}}P_{j_0}(d\omega_{j_0})\int_{\Omega_{j_1}}P(\omega_{j_0},d\omega_{j_1})\cdots\int_{\Omega_{jt-1}}P(\omega_{j_0},\cdots,d\omega_{j_{t-1}})$$
$$\int_{\Omega_{j_t}}I_{B^S}(\omega_{j_0},\cdots,\omega_{j_t})P(\omega_{j_0},\cdots,\omega_{j_{t-1}},d\omega_t).$$

$S\triangleq\{j_0,\cdots,j_t\}\subset\mathcal{P}_0(I)$.

证明 第一步：设 $S_1\subset S_2$ 且 $S_i\in\mathcal{P}_0(I)$, $i=1,2$ 有

$$P_{S_2}\left(B^{S_1}\times\prod_{i\in S_2\setminus S_1}\Omega_i\right)=P_{S_1}(B^{S_1}),$$

即 P 在 $\mathcal{C}\triangleq\left\{B^S\times\prod\limits_{i\in I\setminus S}\Omega_i:S\in\mathcal{P}_0(I)\right\}$ 上是唯一确定的.

第二步：令 $\mathcal{F}^S\triangleq\left\{B^S\times\prod\limits_{i\in I\setminus S}\Omega_i:B^S\in\prod\limits_{i\in S}\mathcal{F}_i\right\}$, 则 $\mathcal{F}^{S_1}\subset\mathcal{F}^{S_2}(S_1\subset S_2)$, 且 $\bigcup\limits_{S\subset I}\mathcal{F}^S=\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ 为代数， P 在 $\mathcal{F}^S$ 上为概率测度. 则通过插入 Ω_j 的形式知 P 在 $\mathcal{C}$ 上是有限可加的.

第三步：按本书中证明 $\forall|S_n|=t_n, A_n=B^{S_n}\times\prod\limits_{i\in I\setminus S_n}\Omega_i$, $A_n\downarrow\emptyset$. 若 $S_n\in\mathcal{P}_0(I)$, $S_n\uparrow$, 则总存在 $(\overline{\omega}_{j_1},\cdots,\overline{\omega}_{j_{t_n}})\in B^{S_n}$. 令 $\omega=(\omega_i)_{i\in I}\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\emptyset(i=j_i,\omega_i=\overline{\omega}_{j_i})$, 进而得到 P 为 $\mathcal{C}$ 上的概率测度.

由测度扩张定理得结论成立.

第七章 概率论基础选讲

§1 事件和随机变量的独立性

1.10 设 $(X_n,n\geq1)$ 为独立随机变量序列，则

(1)$\limsup\limits_{n\to\infty}X_n$ 与 $\liminf\limits_{n\to\infty}X_n$ 为退化随机变量 (即 a.s. 等于某一常数) ;

(2) 为要 $P(X_n\to0)=1$, 必须且只需对任何 $C>0$, 有 $\sum\limits_n P(|X_n|>C)<\infty$.

证明 因为

$$\liminf_{m\to\infty}X_m=\lim_{m\to\infty}\inf_{k\geq m}X_k=\lim_{m\to\infty}\inf_{k\geq m}X_{n+k}=\liminf_{m\to\infty}X_{n+m},\ n=1,2,\cdots.$$

而 $\liminf\limits_{m\to\infty}X_{n+m}$ 是关于 $\sigma(X_j,j>n)$ 的可测函数，因而 $\liminf\limits_{m\to\infty}X_m$ 是 $X_1,X_2,\cdots$ 的尾事件.

又 $(X_n,n\geq1)$ 独立，故由定理 1.9 知 $\liminf\limits_{n\to\infty}X_n$ 为退化随机变量.

同理可证得 $\limsup\limits_{n\to\infty}X_n$ 亦为退化随机变量.

(2) 根据 a.s. 收敛的判别条件,

$$X_n\xrightarrow{a.s}0\Leftrightarrow\forall C>0,P(|X_n|>C,\text{ i.o.})=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|X_k|>C\}\right)=0.$$

由题设知 $\{|X_n|>C\}, n=1,2,\cdots$ 为独立事件, 所以据 Borel-Cantelli 引理, 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X_n|>C)<\infty$.

1.11 设 $(X_n,\ 1\le i\le n)$ 为独立随机变量序列. 若每个 X_i 非负或每个 X_i 可积, 则有 $E[\prod_{i=1}^n X_i]=\prod_{i=1}^n E[X_i]$.

证明 只需证 $n=2$ 的情形.

(1) 设 X_1 及 X_2 都是非负简单函数的情形:

$$X_1=\sum_i x_i I_{A_i},\quad X_2=\sum_k y_k I_{B_k},\quad A_i,B_k\in\mathcal{F},\ i,k=1,2,\cdots.$$

因为 $A_i=\{X_1=x_i\},\ B_k=\{X_2=y_k\}$, 且由 X_1 与 X_2 独立知 $P(A_iB_k)=P(A_i)P(B_k)$. 故

$$E(X_1X_2)=\sum_{i,k} x_iy_kP(A_iB_k)=\sum_{i,k} x_iy_kP(A_i)P(B_k)=E(X_1)E(X_2).$$

(2) 当 X_1,X_2 为非负可积随机变量时, 考虑简单函数

$$X_n=\sum_{j=1}^{n2^n}\frac{j-1}{2^n}I_{\{\frac{j-1}{2^n}\le X_1<\frac{j}{2^n}\}}+nI_{\{n\le X_1\}},$$

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}I_{\{\frac{k-1}{2^n}\le X_2<\frac{k}{2^n}\}}+nI_{\{n\le X_2\}}.$$

因为 X_1 与 X_2 独立, 由定义知 X_n 和 Y_n 独立. 故由 (1) 得, 必有 $E(X_nY_n)=E(X_n)E(Y_n)$. 但 $0\le X_n\uparrow X_1,\ 0\le Y_n\uparrow X_2$, 故 $0\le X_nY_n\uparrow X_1X_2$. 令 $n\to\infty$, 用单调收敛定理于 $E(X_nY_n)=E(X_n)E(Y_n)$ 得 $E(X_1Y_1)=E(X_1)E(Y_1)$.

(3) 对于一般情形. 由 X_1 与 X_2 的独立知 X_1^+ 或 X_1^- 或 $|X_1|$ 与 X_2^+ 或 X_2^- 或 $|X_2|$ 相互独立. 而它们都是非负可积随机变量, 从而由 (2) 得 $E|X_1X_2|=E|X_1|E|X_2|$, 所以 X_1X_2 可积. 此外

$$\begin{aligned}E(X_1X_2)=&E(X_1^+-X_1^-)(X_2^+-X_2^-)\\=&E(X_1^+X_2^+)-E(X_1^+X_2^-)-E(X_1^-X_2^+)+E(X_1^-X_2^-)\\=&E(X_1)E(X_2).\end{aligned}$$

1.12 设 $(X_n,n\ge 1)$ 为独立实值随机变量序列, $(g_n,n\ge 1)$ 为一列 Borel 可测函数, 则 $(g_n(X_n),n\ge 1)$ 为独立随机变量序列.

证明 (1) 首先证 $n=2$ 的情形. 对任何 $B=B_1\times B_2\in\mathcal{B}^2$, 由 X_1,X_2 的独立性知

$$\begin{aligned}P(g_1(X_1)\in B_1,\ g_2(X_2)\in B_2)=&P(X_1\in g_1^{-1}(B_1),X_2\in g_2^{-1}(B_2))\\=&P(X_1\in g_1^{-1}(B_1))P(X_2\in g_2^{-1}(B_2))\\=&P(g_1(X_1)\in B_1)P(g_2(X_2)\in B_2),\end{aligned}$$

即 $g_1(X_1)$ 与 $g(X_2)$ 独立.

(2) 由 (1) 可证得对任意有限的 n, 均有 $(g_k(X_k),1\le k\le n)$ 为独立随机变量序列.

(3) 利用数学归纳法易证得 $(g_n(X_n),n\ge 1)$ 为独立随机变量序列.

1.15 设 $(X_n,n\ge 1)$ 为独立同分布 (i.i.d.) 随机变量序列, 每个 X_n 服从参数为 1 的指数分布 (即 $P(X_n>x)=e^{-x},x\ge 0$). 证明:

(1) $P(X_n > \alpha \log n,\ \text{i.o.}) = \begin{cases} 0, & 若\alpha > 1, \\ 1, & 若\alpha \le 1; \end{cases}$

(2) 令 $L = \limsup\limits_{n\to\infty}(X_n/\log n)$, 则 $P(L=1)=1$.

证明 由题设得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > \alpha \log n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

从而由级数收敛的判别准则知

(i) 当 $\alpha > 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty$;

(ii) 当 $\alpha \le 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 发散，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \infty$;

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > \alpha \log n) \begin{cases} < \infty, & \alpha > 1, \\ = \infty, & \alpha \le 1. \end{cases}$$

再由 Borel 0-1 律知

$$P(X_n > \alpha \log n,\ \text{i.o.}) = \begin{cases} 0, & \alpha > 1, \\ 1, & \alpha \le 1. \end{cases}$$

(2) 由 (1) 知

$$P(X_n/\log n > \alpha,\ \text{i.o.}) = \begin{cases} 0, & \alpha > 1, \\ 1, & \alpha \le 1. \end{cases}$$

于是有

$$P(L > 1) = 0,\ 且\ P(L > \alpha) = 1,\ \alpha \le 1.$$

而

$$P(L \ge 1) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{L > 1 - \frac{1}{n}\}\right) = \lim_{n\to\infty} P(L > 1 - \frac{1}{n}) = 1.$$

故 $P(L=1) = P(L \ge 1) - P(L > 1) = 1$.

1.16 设 $(X_n, n \ge 1)$ 为 i.i.d. 标准正态随机变量序列. 证明:

(1) $P(X_n > \alpha\sqrt{2\log n},\ \text{i.o.}) = \begin{cases} 0, & 若\ \alpha > 1, \\ 1, & 若\ \alpha \le 1; \end{cases}$

(2) 令 $L = \limsup\limits_{n\to\infty}(X_n/\sqrt{2\log n})$, 则 $P(L=1)=1$.

§2 条件数学期望与条件独立性

2.19 设 $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数， $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$. 为要 $Y = E[X|\mathcal{G}]$, 必须且只需 $EX = EY$ 且对生成 $\mathcal{G}$ 的某 π- 类 $\mathcal{C}$ 中的所有集合 A 有 $E[XI_A] = E[YI_A]$.

证明 必要性：设 $Y = E[X|\mathcal{G}]$, 显然有 $EX = EY$, 且由条件数学期望的定义有 $E[XI_A] = E[YI_A]$, $\forall A \in \mathcal{G}$. 更有 $E[XI_A] = E[YI_A]$, $\forall A \in \mathcal{C} \subset \mathcal{G}$.

充分性：令

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{G} : E[XI_A] = E[YI_A]\}.$$

由题设有 $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$. 再由 $EX = EY$ 易证 $\mathcal{M}$ 为 λ 类. 又 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{G}$, 且 $\mathcal{C}$ 为 π- 类，故有

$$E[XI_A] = E[YI_A], \quad \forall A \in \mathcal{G},$$

即 $Y = E[X|\mathcal{G}]$.

2.20 设 $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$. 若 $E[X|Y] = Y$, a.s. $E[Y|X] = X$, a.s., 则 $X = Y$, a.s..

2.21 设 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数，则

$$E(E[X|\mathcal{G}] - X)^2 = \inf\{E(Y - X)^2 : Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)\}.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned} E(Y - X)^2 =& E(Y - E(X|\mathcal{G}) + E(X|\mathcal{G}) - X)^2 \\ =& E(X - E(X|\mathcal{G}))^2 + E(Y - E(X|\mathcal{G}))^2 + 2E[(E(X|\mathcal{G}) - X)(Y - E(X|\mathcal{G}))] \\ \geq& E(X - E(X|\mathcal{G}))^2. \ (\text{利用} Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)). \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $Y = E(X|\mathcal{G})$. 再由下确界的定义即知结论成立.

2.22 设 X 及 Y 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的实值随机变量，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数，$g(x, y)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上非负或有界 Borel 可测函数. 若 X 为 $\mathcal{G}$- 可测的，则

$$E[g(X, Y)|\mathcal{G}] = \xi(X), \text{ a.s.}$$

其中 $\xi(X) = E[g(x, Y)|\mathcal{G}]$.

2.23 设 X 及 Y 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的实值随机变量，$f(x, y)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上的非负或有界 Borel 可测函数，令 $\mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数，若 X 与 $\mathcal{G}_1 \vee \mathcal{G}_2$ 独立，Y 关于 $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ 可测，则有

$$E[f(X, Y)|\mathcal{G}_1] = E[f(X, Y)|\mathcal{G}_2] = E[f(X, Y)|\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2], \text{ a.s..}$$

2.24 设 X 及 Y 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的实值随机变量，$\mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数，若 X 与 Y 及 $\mathcal{G}_2$ 独立，Y 与 $\mathcal{G}_1$ 独立，则有

$$E[XY|\mathcal{G}_1 \vee \mathcal{G}_2] = E[X|\mathcal{G}_1]E[Y|\mathcal{G}_2].$$

证明 利用乘积之间的构造及二元可测函数的构造和函数形式的单调类定理即得结论对非负或有界 Borel 可测函数成立，且对任意非负可测函数 f, 由

$$f = \lim_{n \to \infty} f \wedge n$$

即得结论成立. 再由

$$f = f^+ - f^-$$

即得对任意 Borel 可测函数成立.

2.25 设 ξ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一实值随机变量，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数，$A \in \mathcal{G}$. 令 $\mathcal{H} = \sigma(A \cap \mathcal{G})$. 如果 ξI_A 关于 $\mathcal{G}$ σ- 可积，则 ξI_A 关于 $\mathcal{H}$ σ- 可积，且有

$$E[\xi I_A|\mathcal{G}] = E[\xi I_A|\mathcal{H}], \text{ a.s..}$$

证明 因 ξI_A 关于 $\mathcal{G}$ σ- 可积，故存在 $\Omega_n \in \mathcal{G}$, $\Omega_n \uparrow \Omega$, 使得 $\xi I_A I_{\Omega_n}$ 可积. 此时令

$$\overline{\Omega}_n = \Omega_n \cap A.$$

则 $\overline{\Omega}_n \in \mathcal{H}$, $\overline{\Omega}_n \uparrow A$, 且 $\xi I_A I_{\overline{\Omega}_n} = \xi I_A I_{\Omega_n}$ 可积. 从而 ξI_A 关于 $\mathcal{H}$ σ- 可积. $\forall B \in \mathcal{G}$, 由条件期望的定义得

$$\int_B E(\xi I_A|\mathcal{G})dP = \int_B \xi I_A dP = \int_{A\cap B} \xi I_A dP = \int_{A\cap B} E[\xi I_A|\mathcal{H}]dP.$$

再由 R-N 定理得

$$E[\xi I_A|\mathcal{G}] = E[\xi I_A|\mathcal{H}],\ \text{a.s.}.$$

§5 随机变量族的一致可积性

5.10 设 (ξ_n) 为一致可积随机变量序列，则有

$$\lim_{n\to\infty} E[\frac{1}{n}\sup_{1\le k\le n}|\xi_k|\ ] = 0.$$

5.11 设 $\mathcal{H} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 若 $\mathcal{H}$ 满足如下条件:

$$A_n \in \mathcal{F}, A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_{A_n}|\xi|dP = 0,$$

则对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$A \in \mathcal{F}, P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_A |\xi|dP \le \epsilon.$$

证明 (反证法) 假设存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$A_n \in \mathcal{F}, P(A_n) < \frac{1}{2^n},\ \text{但}\ \sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_{A_n}|\xi|dP > \epsilon_0.$$

记 $A = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, 则

$$P(A) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 0.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_{A_n}|\xi|dP \ge \varepsilon_0$$

与题设矛盾，故结论成立.

5.12 设 $\mathcal{H}_1$ 及 $\mathcal{H}_2$ 为一致可积随机变量族. 令

$$\mathcal{H} = \{\xi_1 + \xi_2 : \xi_1 \in \mathcal{H}_1,\ \xi_2 \in \mathcal{H}_2\},$$

则 $\mathcal{H}$ 为一致可积族.

证明 (利用一致可积性准则定理 5.2)

由于 $\xi_i \in \mathcal{H}_i, i = 1, 2$ 及 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 为一致可积随机变量族，则有

(i) $a_i = \sup\{E|\xi_i| : \xi_i \in \mathcal{H}_i\} < \infty,\ i = 1, 2;$

(ii) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得对 $P(A)<\delta$ 的 $A\in\mathcal{F}$ 有

$$\sup_{\xi_i\in\mathcal{H}_i}\int_A|\xi_i|dP<\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2.$$

此时有

$$\begin{aligned}a&=\sup\{E|\xi_1+\xi_2|:\ \xi_1\in\mathcal{H}_1,\xi_2\in\mathcal{H}_2\}\\&\le\sup\{E|\xi_1|+E|\xi_2|:\ \xi_1\in\mathcal{H}_1,\xi_2\in\mathcal{H}_2\}\\&\le\sup\{E|\xi_1|:\xi_1\in\mathcal{H}_1\}+\sup\{E|\xi_2|:\xi_2\in\mathcal{H}_2\}<\infty.\end{aligned}$$

且对上述 $\varepsilon>0,\delta>0$, 满足 $P(A)<\delta$ 的 $A\in\mathcal{F}$ 有

$$\sup_{\substack{\xi_1\in\mathcal{H}_1\\\xi_2\in\mathcal{H}_2}}\int_A|\xi_1+\xi_2|dP\le\sup_{\substack{\xi_1\in\mathcal{H}_1\\\xi_2\in\mathcal{H}_2}}\int_A(|\xi_1|+|\xi_2|)dP\le\sup_{\xi_1\in\mathcal{H}_1}\int_A|\xi_1|dP+\sup_{\xi_2\in\mathcal{H}_2}\int_A|\xi_2|dP<\varepsilon.$$

于是由一致可积性准则知

$$\mathcal{H}=\{\xi_1+\xi_2:\ \xi_1\in\mathcal{H}_1,\xi_2\in\mathcal{H}_2\}$$

为一致可积族.

33. 设 $\{X_n,\mathcal{F}_n\}$ 为鞅, $EX_n^2<\infty$, T 为有限停时, 且

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\{T>n\}}|X_n|dP=0(\text{或}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{T>n\}}|X_n|^2dP<\infty)$$

则 $(X_0=0)$

$$EX_T^2=E\sum_{n=1}^T(X_n-X_{n-1})^2.$$

证明: 令 $Z_n=X_n^2-\sum_{k=1}^nE((X_k-X_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1})$, ($\mathcal{F}_0$ 为平方 σ 域), 则 $\{Z_n,\mathcal{F}_n\}$ 为鞅, $Z_1=0$. 由

$$\begin{aligned}EZ_{T\wedge n}&=EZ_1=0\\EX_{T\wedge n}^2&=E\sum_{k=1}^{T\wedge n}(X_k-X_{k-1})^2\\EX_T^2&\le\lim_{n\to\infty}X_{T\wedge n}^2=E\sum_{k=1}^T(X_k-X_{k-1})^2\end{aligned}$$

$EX_T^2=\infty$ 时等式即成立, 因此可设 $EX_T^2<\infty$. 这时由第 30 题 (注意, 用 $Cauchy-Schwarz$ 不等式, 由 $\liminf_{n\to\infty}\int_{\{T>n\}}X_n^2dP<\infty$ 可控制 $\liminf_{n\to\infty}\int_{\{T>n\}}|X_n|dP=0$), X_T 右闭鞅 $\{X_{T\wedge n},\mathcal{F}_n\}$ 从而

$$E(X_T^2|\mathcal{F}_n)\ge X_{T\wedge n}^2,EX_T^2\ge EX_{T\wedge n}^2,$$

总之

$$EX_T^2=\lim_{n\to\infty}X_{T\wedge n}^2==E\sum_{k=1}^T(X_k-X_{k-1})^2.$$

34. 设为上鞅或鞅为停时则为右闭上鞅或右闭鞅的充要条件为

证明充分性只要证一致可积