电动力学 • 数学预备

2007级基地班/逸仙班, 2009.3

中山大学物理科学与工程技术学院

黄迺本

stshnb@mail.sysu.edu.cn

电动力学·数学预备

- 经典电动力学的研究对象
- 教学目标
- 教材和主要参考书
- 课程考核
- 矢量和张量

• 经典电动力学的研究对象

电动力学是在电磁学基础上开设的理论性课程。本课程主要研究电磁场的基本规律及其与物质的相互作用，以及运用这些规律定量研究和处理各种电磁问题，包括:

- 静电场与静磁场的边值问题
- 势的物理效应与势的规范变换问题
- 电磁波的传播与辐射问题
- 电磁场与带电粒子相互作用问题
- 电动力学的相对论不变性、电磁势和电磁场的相对论变换，等.

• 教学目标

通过本课程的学习，学生应掌握电磁相互作用的基本规律，以及应用这些规律处理各类电磁系统的实际问题的基本理论方法，为进一步学习相关专业课程、或从事相关领域的科学研究打下基础.

• 主要数学工具

微积分、线性代数、矢量与张量分析、

数学物理方程、级数, 等.

• 教材和主要参考书

教材:

郭硕鸿著、黄迺本 李志兵 林琼桂修订《电动力学》（第三版）高等教育出版社，2008.

主要参考书:

[1]黄迺本，方奕忠《电动力学（第三版）学习辅导书》，高等教育出版社，2009.

[2]Jackson.J. D. Clasical Electrodynamics. 3rd ed. New York: Wiley，1998. 或中译本 ,高等教育出版社.

[3]费恩曼物理学讲义，第2卷，上海科技出版社，2005.

[4]朗道等,《场论》人民教育出版社，1959.

[5]俞允强,《电动力学简明教程》，北京大学出版社，1999.

[6]蔡圣善等,《电动力学》（第二版），高等教育出版社，2003.

[7]尹真,《电动力学》（第二版），科学出版社，2005.

• 课程考核

（1）**课程论文与平时训练**，占总成绩40%．

课程论文有独到见解者加分.

（2）**期末闭卷考试**，占总成绩 60%．

课程论文目的:

鼓励交流讨论、广泛涉猎、扩大视野、了解知识的应用与学科前沿发展动态;

培养查阅文献资料、提出和解决问题的能力;

学习科学研究的方法.

课程论文的要求

论文内容：与电动力学相关的各种理论问题，或实际应用.

论文格式：

论文题目

作者姓名　　班级　　学号

摘要（**Abstract**）

关键词（**Key Words**）

正文：引言（问题的背景与科学意义）

你的论述、论证，或实验和结果

结语

参考文献

[1] 作者名，文献题目（或参考书名），期刊名（或出版社），卷/期，页码，年份.

[2] ……

所列参考文献，必须在正文中提及，并按出现次序，用右上角标，如：… □□□[1]，标示序号.

交课程论文的时间：第十八周.

矢量和张量

物理学——

观测+猜想+定量描写自然界各种层次物质的结构、存在形态与相互作用规律，并不断经受实践检验的基础科学.

……………………………………………

如果不理解它的语言，没有人能够读懂宇宙这本书，它的语言就是数学.

——Galileo

1.矢量和张量代数

- 物理量分类

在三维空间转动下，物理量按其变换性质（见教材P209-212），分为:

0 阶张量，即标量(scalar)，只有$3^0=1$个分量，无空间取向．如长度l，时间t，质量 m，温度T，能量E，等．

1阶张量，即矢量(vector)，由$3^1=3$个分量构成有序集合，有一定的空间取向．如位置矢量，速度，加速度，动量，作用力，力矩，角动量，电流密度，电偶极矩，磁偶极矩，等．

2阶张量(tensor)，由$3^2=9$个分量构成有序集合，空间取向比矢量复杂．如刚体的转动惯量，电四极矩，电磁场应力张量，等．

可以定义更高阶张量．如 3阶张量，由$3^3=27$个分量构成有序集合．

1.矢量和张量代数

- 矢量表示

书写——在字母上方加一箭头，如 $\vec{r}$，$\vec{A}$.

印刷——用黑体字母表示，如 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{A}$.

- 场概念

Maxwell 提出的“电磁场”（**electromagnetic field**）概念,是**19**世纪物理学的伟大创举.

现在我们知道,“场”与粒子，是物质的两种基本存在形态.

1.矢量和张量代数

物理量在空间中的分布构成“场”, 亦即场量是空间坐标（以及时间）的函数. 例如:

温度分布$T\,(x,y,z,t)$ ——标量场

流体速度分布$\mathbf{v}\,(x,y,z,t)$——矢量场

电磁场的两个基本场量

电场强度$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$, 磁感应强度$\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$ ——都是矢量场

可以用势描写电磁场:

标势（scalar potential）$\varphi\,(x,y,z,t)$ ——标量场

矢势 (vector potential)$\boldsymbol{A}(x,y,z,t)$——矢量场

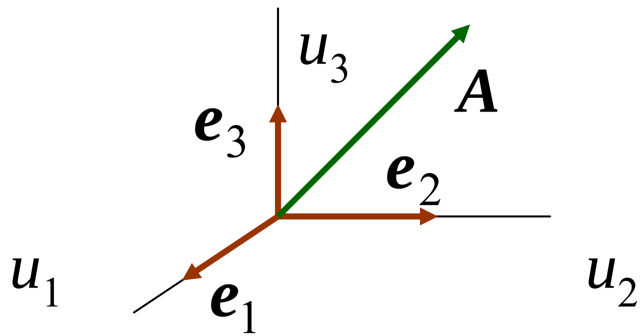
在相对论四维时空中:

φ 和$\boldsymbol{A}$统一为四维协变矢量. $\boldsymbol{E}$ 和$\boldsymbol{B}$统一为四维协变张量.

量子理论: 电磁场有波粒二象性, 电磁场（光子场）由波函数描述.

光子的能量$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{h\nu}$ ， 光子的动量$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{h\ \nu/c}$.

1.矢量和张量代数



- 正交坐标系的基矢量

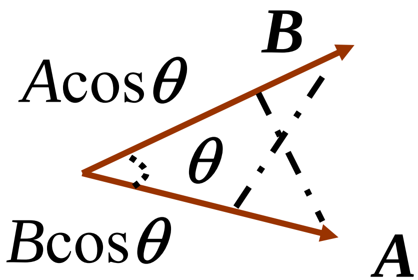
三维空间正交坐标系(如直角坐标系,球坐标系,柱坐标系)基矢量$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$ 的正交性,可表示为

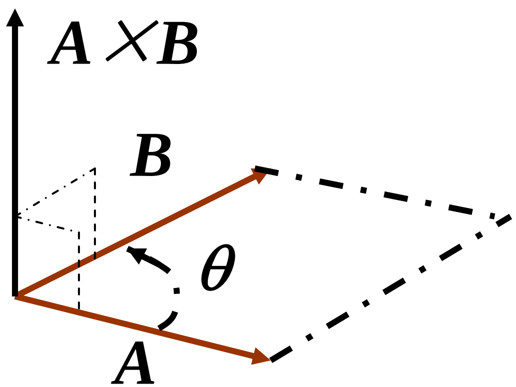
$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1.1}$$

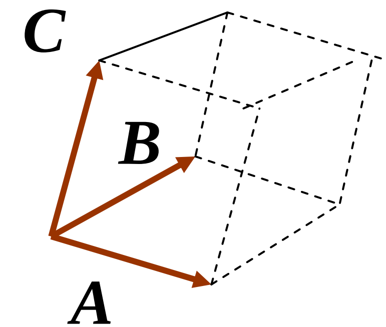
一般矢量$\boldsymbol{A}$ 有三个独立分量A_1, A_2, A_3, 故可写成

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.2}$$

1.矢量和张量代数







$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

- 矢量的乘积

两个矢量的标积与矢积，三个矢量的混合积与矢积分别满足

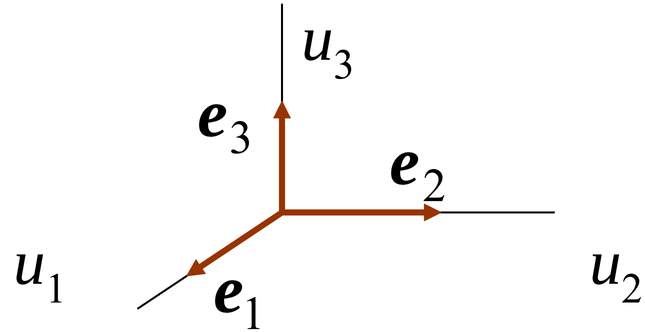
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=AB\cos\theta \tag{1. 3}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \qquad |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=AB\sin\theta \tag{1. 4}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1. 5}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1. 6}$$

1.矢量和张量代数



- 并矢量与二阶张量

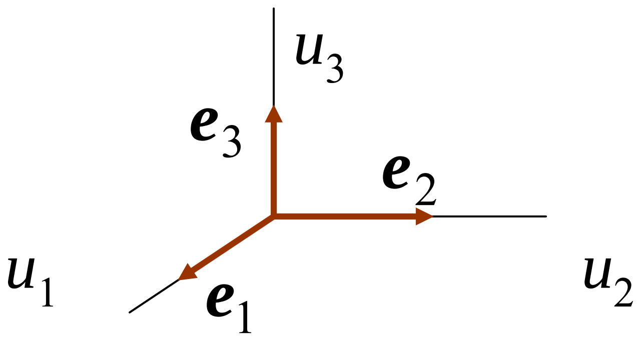
两个矢量$\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{B}$ 并置, 构成并矢量

$$\boldsymbol{AB}=(A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3)(B_1\boldsymbol{e}_1+B_2\boldsymbol{e}_2+B_3\boldsymbol{e}_3)=\sum_{i,j=1}^{3}A_iB_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1.7}$$

它有9个分量A_iB_j和9个基$\boldsymbol{e}_i\ \boldsymbol{e}_j$. 一般地

$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$$

1.矢量和张量代数



- 三维空间二阶张量也有9个分量T_{ij}，它的并矢量形式与矩阵**(matrix)**形式分别为

$$\vec{\vec{T}} = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \tag{1.8}$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

1.矢量和张量代数

- 张量的迹,是其主对角线全部元素(分量)之和:

$$\mathrm{tr}T = T_{11} + T_{22} + T_{33} \tag{1.10}$$

$\mathrm{tr}T = \mathbf{0}$ 的张量,称为无迹张量.

- 单位张量,其并矢量形式与矩阵形式分别是

$$\vec{\vec{I}} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \tag{1.11}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

因此(1.1)式中的符号δ_{ij},实际上是单位张量的分量.

1.矢量和张量代数

- 对称张量与反对称张量

若$T_{ij}=T_{ji}$, 称之为对称张量，它有6个独立分量.

若对称张量的迹 $\mathrm{tr}T = 0$，则它只有5个独立分量.

单位张量是一个特殊的对称张量.

若$T_{ij}= -T_{ji}$称之为反对称张量, 由于$T_{11}=T_{22}=T_{33}= 0$, 反对称张量只有3个独立分量.

任何张量T_{ij} 均可写成一个对称张量S_{ij} 与一个反对称张量A_{ij}之和，即$T_{ij}= S_{ij}+ A_{ij}$，只需使

$$S_{ij}= (T_{ij}+ T_{ji}) /2 \quad , \quad A_{ij}= (T_{ij}-T_{ji}) /2$$

1.矢量和张量代数

- 二阶张量与矢量点乘，结果降阶为矢量. 由(1.1)式，有

$$\boldsymbol{A}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}=\sum_{k}A_k\boldsymbol{e}_k\cdot\sum_{ij}T_{ij}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}}=\sum_{k,i,j}A_kT_{ij}\delta_{ki}e_j=\sum_{ij}A_iT_{ij}\boldsymbol{e}_j \qquad (1.13)$$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\cdot\boldsymbol{A}=\sum_{ij}T_{ij}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}}\cdot\sum_{k}A_k\boldsymbol{e}_k=\sum_{i,j,k}A_kT_{ij}e_i\delta_{\boldsymbol{jk}}=\sum_{ij}A_jT_{ij}\boldsymbol{e}_i \qquad (1.14)$$

一般地 $\boldsymbol{A}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\neq\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\cdot\boldsymbol{A}$.

但单位张量与任何矢量点乘，均给出原矢量:

$$\boldsymbol{A}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{I}}=\overrightarrow{\overrightarrow{I}}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A} \qquad (1.15)$$

1.矢量和张量代数

- 并矢量与并矢量、或二阶张量与二阶张量双点乘，结果降阶为标量.

运算规则：先将靠近的两个矢量点乘，再将另两个矢量点乘：

$$(\boldsymbol{AB}):(\boldsymbol{CD})=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}) \tag{1.16}$$

2.矢量和张量分析

（1）算符∇ 和∇^2

表示“场”的物理量, 一般地是空间坐标（和时间）的连续函数，也可能有间断点，甚至会有奇点.

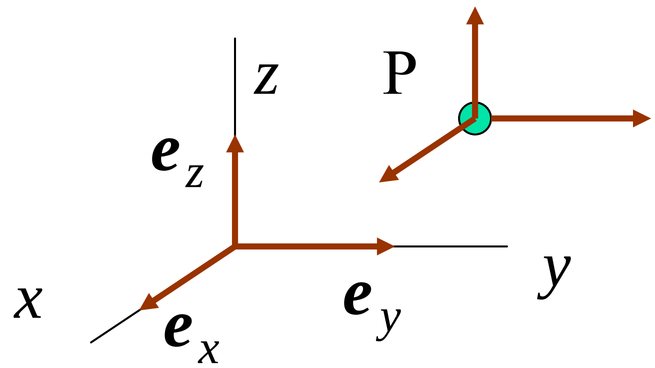
温度$\boldsymbol{T}$的分布, 静电势$\boldsymbol{\varphi}$的分布, 都构成标量场.

电流密度$\boldsymbol{J}$, 电场强度$\boldsymbol{E}$, 磁感应强度$\boldsymbol{B}$, 矢势$\boldsymbol{A}$ 的分布,都构成矢量场.

∇(读“del”) 是对场量作空间一阶偏导数运算的矢量算符.

$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$是二阶齐次偏导数运算的标量算符，即拉普拉斯算符.

2.矢量和张量分析



在直角坐标系中

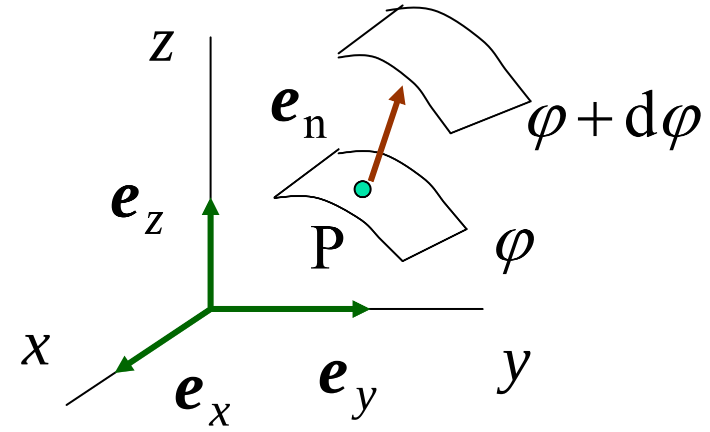
$$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (2.1)$$

当P点位置变化时，三个基矢量的方向保持不变，即$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$均是常矢量.

（2）标量场的梯度

(gradient of a scalar field)

标量场φ在某点P 的梯度



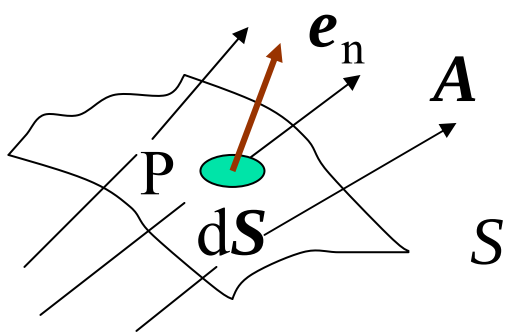
$$\nabla\varphi=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\qquad(2.2)$$

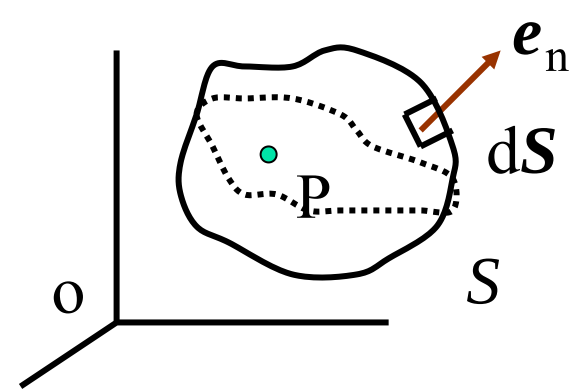
是一个矢量，它在数值上等于φ 沿其等值面的法向导数，方向沿φ增加的方向，即

$$\nabla\varphi=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\qquad(2.3)$$

$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$是等值面的法向单位矢量.

例如，静电势φ 的分布是一个标量场，$-\nabla\varphi=\boldsymbol{E}$ 即变成矢量场——静电场.





（3）矢量场的散度(divergence of a vector field)

矢量场$\boldsymbol{A}$通过某曲面S 的通量(flux), 定义为

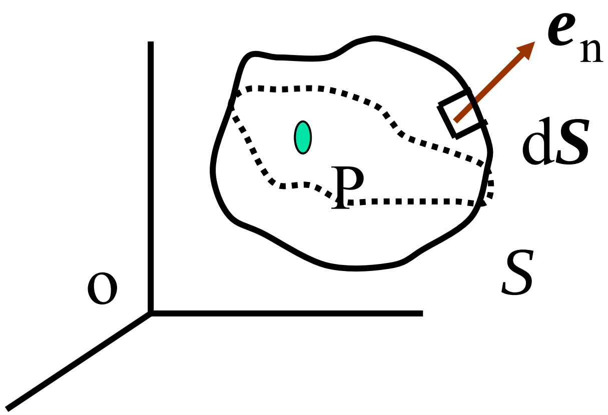
$$\Phi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (2.4)$$

其中$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 是曲面某点P 附近的面积元矢量，方向沿曲面在该点的法向$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$.

对于闭合曲面(closed surface)，规定：d$\boldsymbol{S}$ 的方向沿曲面的外法向.

2.矢量和张量分析

对于矢量场$\boldsymbol{A}$中包含任一点P(x,y,z)的小体积ΔV，其闭合曲面为$\boldsymbol{S}$，定义极限



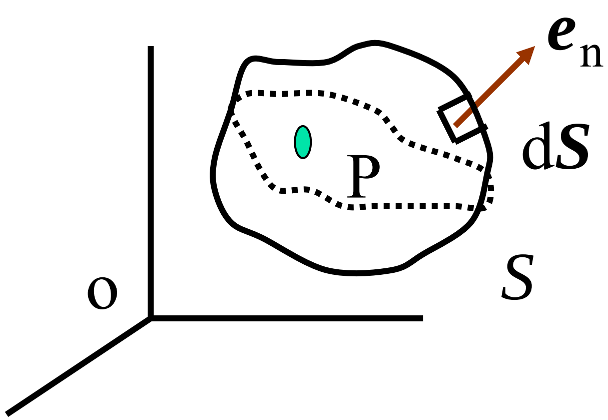
$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}=\nabla\cdot\boldsymbol{A} \qquad (2.5)$$

为矢量场$\boldsymbol{A}$在该点的散度，它是标量. 在直角坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (2.6)$$

若处处均有$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，就称$\boldsymbol{A}$为无散场**(solenoidal field)**，或无源场，它的场线必定是连续而闭合的曲线. 例如，磁场的$\boldsymbol{B}$线总是连续而闭合（遵从磁通连续性），故$\boldsymbol{B}$是无散场，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$



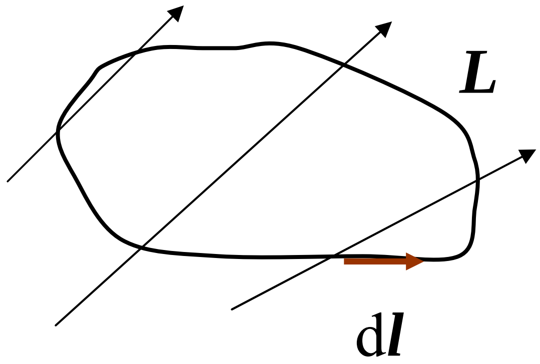
高斯定理(Gauss theorem)

对任意闭合曲面S及其包围的体积V，下述积分变换定理成立

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V \tag{2.7}$$

由此推知，若$\boldsymbol{A}$ 是无散场，即处处有$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，则$\boldsymbol{A}$ 场通过任何闭合曲面S的净通量均为零. 例如磁场$\boldsymbol{B}$.

（4）矢量场的旋度(curl of a vector field)



矢量场$\boldsymbol{A}$沿闭合路径(closed contour)的积分

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

称为$\boldsymbol{A}$沿$\boldsymbol{L}$ 的环量(circulateon). 其中d$\boldsymbol{l}$ 是路径$\boldsymbol{L}$的线元矢量. 若对任意闭合路径$\boldsymbol{L}$，均有

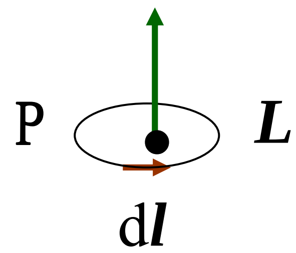
$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{2.8}$$

则$\boldsymbol{A}$ 称为保守场（conservative field）.

2.矢量和张量分析

当闭合路径$\boldsymbol{L}$ 所围成的面积元ΔS

$$\Delta \boldsymbol{S}=\Delta S\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$



是某点P 的无限小邻域，我们约定:

路径积分的绕行方向即d$\boldsymbol{l}$ 的方向，与其

所围成的面积元矢量$\Delta \boldsymbol{S}=\Delta S\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 的法向$\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$成右手螺旋关系.并定义极限

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}=(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}=(\nabla\times\boldsymbol{A})_{\mathrm{n}} \qquad \textbf{(2.9)}$$

为矢量场$\boldsymbol{A}$ 在P点的旋度$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 在$\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$方向的分量.

在直角坐标系中

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})\boldsymbol{e}_x+(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})\boldsymbol{e}_y+(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})\boldsymbol{e}_z \qquad \textbf{(2.10)}$$

它是矢量.

2.矢量和张量分析

如果所有点上均有

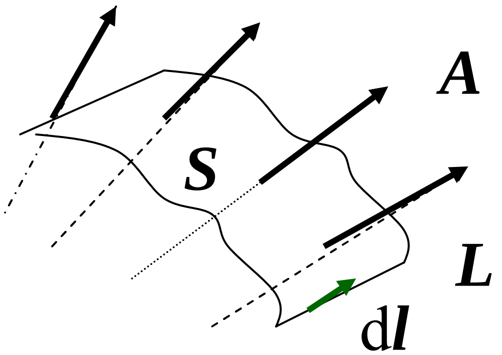
$$\nabla\times \boldsymbol{A}=0$$

称$\boldsymbol{A}$ 为无旋场**(irrotational field).** 例如, 静电场$\boldsymbol{E}$ 就是无旋场**,**即

处处有$\nabla\times \boldsymbol{E}=0$.

斯托克斯定理**(stokes theorem)** 对任意的闭合路径$\boldsymbol{L}$ 所围的曲面$\boldsymbol{S}$，下述积分变换成立

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S \left(\nabla\times \boldsymbol{A}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \textbf{(2.11)}$$



（5）矢量场的几个定理

- 标量场的梯度必为无旋场:

$$\nabla\times\nabla\varphi=0 \qquad (2.12)$$

【证】对任意标量场φ 的梯度

$$\nabla\varphi=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

取旋度，可得

$$[\nabla\times\nabla\varphi]_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0$$

$$[\nabla\times\nabla\varphi]_y=0 \quad , \qquad [\nabla\times\nabla\varphi]_z=0$$

逆定理：无旋场必可表示成某一标量场的梯度，即

若 $\nabla\times\boldsymbol{A}=0$，必可令 $\boldsymbol{A}=\nabla\varphi$

例如，静电场强度$\boldsymbol{E}$，可用标势φ 的负梯度描写：$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$.

- 矢量场的旋度必为无散场：

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0 \qquad (2.13)$$

【证】

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=0$$

逆定理：无散场必可表成另一矢量场的旋度，即

若 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，必可令 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$

例如，磁感应强度$\boldsymbol{B}$，就可用矢势$\boldsymbol{A}$ 的旋度描写.

2.矢量和张量分析

（6）算符运算

标量函数φ 的梯度$\nabla\varphi$ 是矢量，矢量函数$\boldsymbol{f}$ 的散度$\nabla\cdot \boldsymbol{f}$ 是标量，旋度$\nabla\times \boldsymbol{f}$ 是矢量，而$\nabla \boldsymbol{f}$ 是二阶张量：

$$\nabla\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3} f_j\boldsymbol{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \qquad (2.14)$$

若φ 和ϕ是标量函数，$\boldsymbol{f}$ 和$\boldsymbol{g}$是矢量函数，有

$$\nabla(\varphi\phi) = (\nabla\varphi)\phi + (\nabla\phi)\varphi \qquad (2.15)$$

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{f}) = (\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{f} + (\nabla\cdot\boldsymbol{f})\varphi \qquad (2.16)$$

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{f}) = (\nabla\varphi)\times\boldsymbol{f} + (\nabla\times\boldsymbol{f})\varphi \qquad (2.17)$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = (\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g} - (\nabla\times\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{f} \qquad (2.18)$$

2.矢量和张量分析

$$\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}-(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}-(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}+(\nabla\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{f} \qquad (2.19)$$

$$\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}\times(\nabla\times\boldsymbol{f})+(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}\times(\nabla\times\boldsymbol{g})+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} \qquad (2.20)$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})=(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} \qquad (2.21)$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{f})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{f})-\nabla^2\boldsymbol{f} \qquad (2.22)$$

上述运算,不必采用化成分量的方法进行，只要抓住算符∇的微分作用及其矢量性质，便可快捷准确地写出结果.

当∇作用于两个函数的乘积（或两个函数之和）时,表示它对每一个函数都要作微分运算,可以先考虑∇对第一个量的作用，并将这个量记为∇的下标，以示算符只对此量执行微分运算，第二个量则视为常数，再考虑∇对第二个量的作用，此时亦将第二个量记为∇的下标，第一个量则视为常数.必须注意的是，算符 ∇不能与其微分运算对象掉换次序.

2.矢量和张量分析

例如(2.16)式，$\nabla\cdot(\varphi \boldsymbol{f})$ 是对矢量 $\varphi \boldsymbol{f}$ 求散度，故运算结果的每一项都必须是标量，我们有

$$\nabla\cdot(\varphi \boldsymbol{f})=\nabla_{\varphi}\cdot(\varphi \boldsymbol{f})+\nabla_{f}\cdot(\varphi \boldsymbol{f})=(\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{f}+(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\varphi$$

又如(2.20)式, $\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})$ 是对标量 $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$ 求梯度，结果的每一项都必须是矢量，先把它写成

$$\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})=\nabla_{f}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})+\nabla_{g}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})$$

再根据三矢量的矢积公式(1.6)式，但结果中必须体现∇_{f} 对 $\boldsymbol{f}$ 的微分作用，以及∇_{g} 对$\boldsymbol{g}$ 的微分作用，故有

$$\nabla_{f}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}\times(\nabla\times\boldsymbol{f})+(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}$$

$$\nabla_{g}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})=\boldsymbol{f}\times(\nabla\times)\boldsymbol{g}+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$$

$$\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}\times(\nabla\times\boldsymbol{f})+(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}\times(\nabla\times\boldsymbol{g})+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$$

右方所得结果中, 第二项实际上是$\boldsymbol{g}\cdot\nabla\boldsymbol{f}$，第四项是 $\boldsymbol{f}\cdot\nabla\boldsymbol{g}$.

（7）积分变换

$$\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{（高斯定理）} \qquad (2.23)$$

$$\int_V (\nabla \cdot \overset{\rightarrow\rightarrow}{T})\mathrm{d}V = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \overset{\rightarrow\rightarrow}{T} \qquad (2.24)$$

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad \text{（斯托克斯定理）} \qquad (2.25)$$

$$\int_V (\varphi\nabla^2\phi + \phi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}V = \oint_S \varphi(\nabla\phi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{（格林公式）} \qquad (2.26)$$

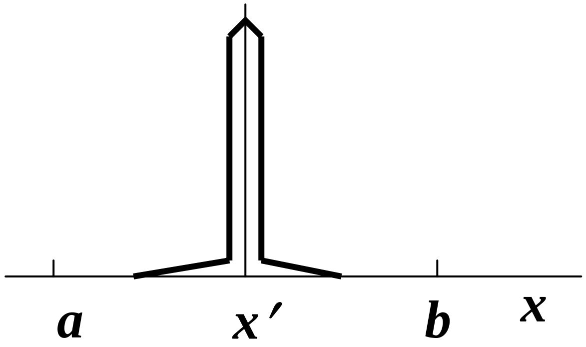
$$\int_V (\varphi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}V = \oint_S (\varphi\nabla\phi - \phi\nabla\varphi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{（格林公式）} \qquad (2.27)$$

3. δ函数

• 一维δ函数

定义为

$$\delta(x-x')=\begin{cases}\infty & x=x' \\ 0 & x\neq x'\end{cases} \qquad \textbf{(3.1)}$$



$$\int_a^b \delta(x-x')\mathrm{d}x=1 \qquad 当\quad a<x'<b \qquad \textbf{(3.2)}$$

主要性质：$\delta(x-x')$为偶函数，其导数是奇函数.

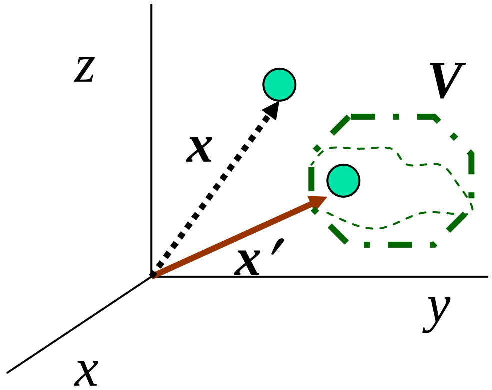
又，若函数$f(x)$在$x=x'$附近连续，有

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x')\mathrm{d}x=f(x') \quad ，当\quad a<x'<b \qquad \textbf{(3.3)}$$

这一性质由中值定理可以证明.

3. δ函数

- 三维δ函数



定义为

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\begin{cases}\infty & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}' \\ 0 & \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}'\end{cases} \quad \textbf{(3.4)}$$

$$\int_V \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V=1 \text{，} \quad \text{当 } \boldsymbol{x}' \text{ 在} \boldsymbol{V} \text{ 内} \qquad \textbf{(3 .5)}$$

因此，位于$\boldsymbol{x}'$的单位点电荷(***q*** = +1单位)的密度可表示为

$$\rho(\boldsymbol{x})=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

(3.3)式可推广到三维情形，若函数$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$附近连续，便有

$$\int_V f(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V=f(\boldsymbol{x}') \text{，} \quad \text{当 } \boldsymbol{x}' \text{在} \boldsymbol{V} \text{内} \qquad \textbf{(3.6)}$$

4.球坐标系和柱坐标系

直角坐标系　当坐标(x,y,z) 变化时,三个基矢$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ 的方向保持不变.

常用的微分运算表达式为

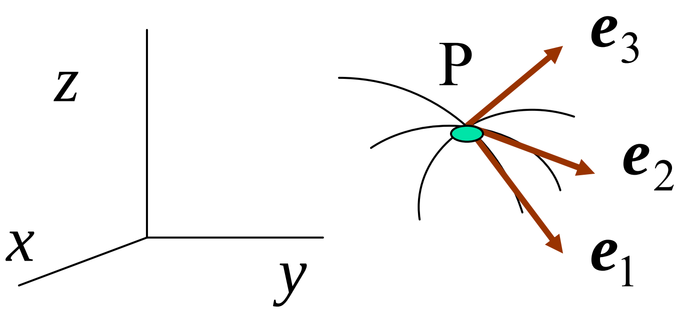
$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{4.1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{4.2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})\boldsymbol{e}_x+(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})\boldsymbol{e}_y+(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})\boldsymbol{e}_z \tag{4.3}$$

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{4.4}$$

4.球坐标系和柱坐标系



曲线正交坐标系　任一点**P**的坐标(x,y,z), 也可用曲线正交坐标系描述，沿三个坐标(u_1, u_2, u_3) 增加方向的基矢量$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 互相正交. 随着**P**点坐标变化，一般地三个基矢量的取向将会改变.

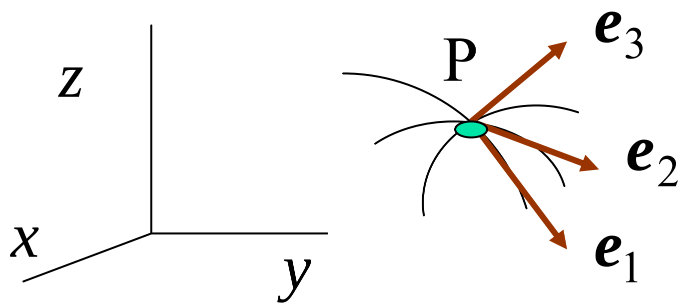
无限小线元矢量$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 、坐标u_i的标度系数h_i, 以及微分算符分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}l_1\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}l_2\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}l_3\boldsymbol{e}_3$$

$$= h_1\mathrm{d}u_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\mathrm{d}u_2\boldsymbol{e}_2 + h_3\mathrm{d}u_3\boldsymbol{e}_3 \tag{4.5}$$

$$h_i = [(\frac{\partial x}{\partial u_i})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u_i})^2 + (\frac{\partial z}{\partial u_i})^2]^{1/2} \tag{4.6}$$

4.球坐标系和柱坐标系



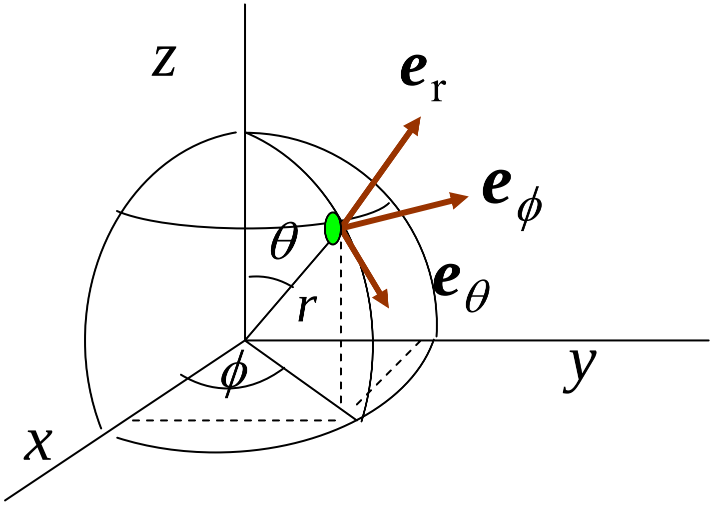
$$\nabla = \boldsymbol{e}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3} \tag{4.7}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\right)\right] \tag{4.8}$$

4.球坐标系和柱坐标系

球坐标系

$$u_1 = r\,,\quad u_2 = \theta,\quad u_3 = \phi$$



$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$$

三个基矢量

$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_\phi$ 的方向均与坐标$\boldsymbol{\theta}$和$\boldsymbol{\phi}$有关，而与$\boldsymbol{r}$无关. 与直角坐标系基矢的变换为

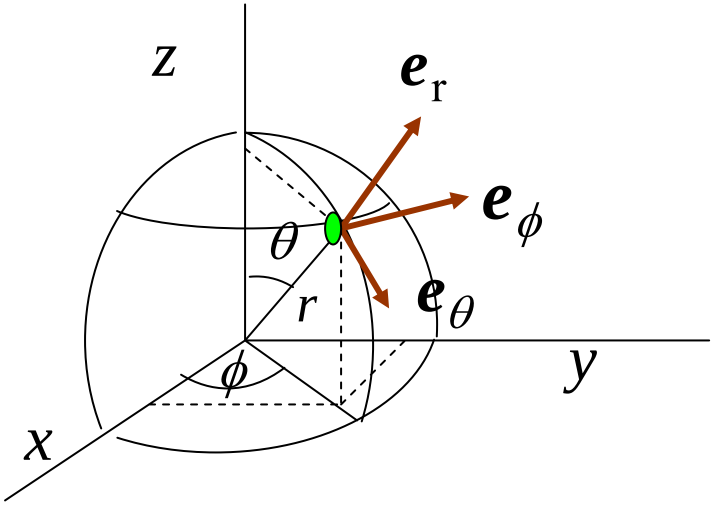
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} \tag{4. 9}$$

4.球坐标系和柱坐标系

球坐标系

$$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = \phi$$

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$$



$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.10)}$$

坐标变换为

$$x = r\sin\theta\cos\phi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad , \quad z = r\cos\theta \qquad \textbf{(4.11)}$$

4.球坐标系和柱坐标系

常用的微分运算表达式为

$$\nabla\varphi = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \tag{4.12}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \tag{4.13}$$

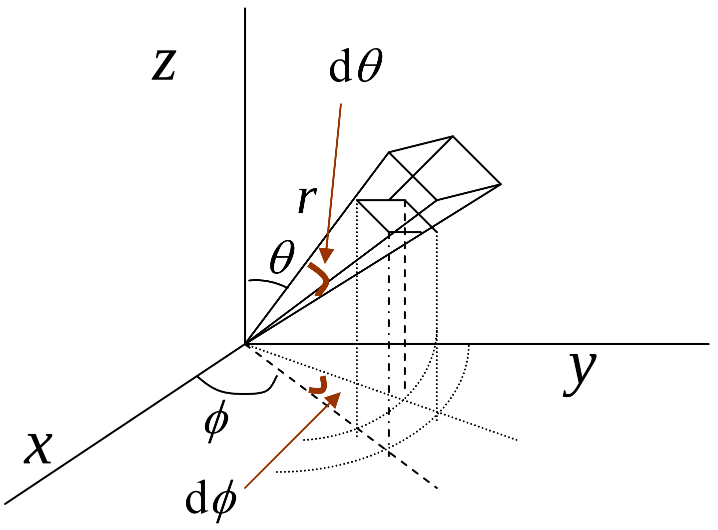
$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A} = &\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\right]\boldsymbol{e}_r \\ &+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\phi\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} \tag{4.15}$$

4.球坐标系和柱坐标系

立体角元**d*Ω***、球面积元**d*S*$_r$**

与体积元**d*V***分别为



$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \qquad \textbf{(4.16)}$$

$$\mathrm{d}S_r = \mathrm{d}l_2 \mathrm{d}l_3 = r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = r^2 \mathrm{d}\Omega \qquad \textbf{(4.17)}$$

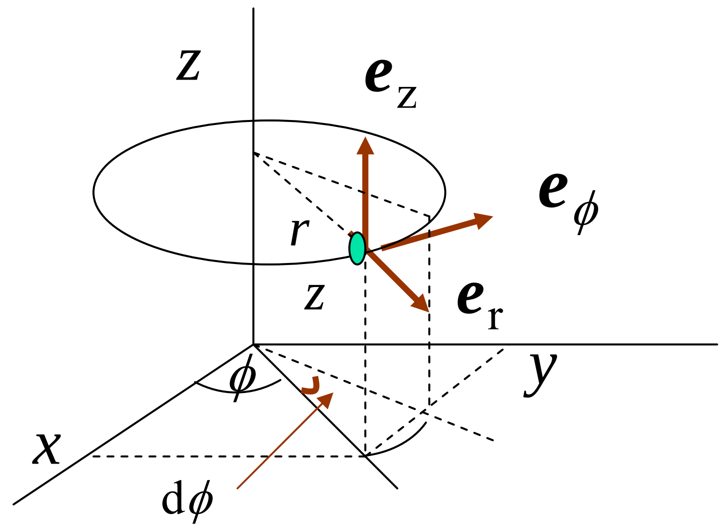
$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}l_1 \mathrm{d}l_2 \mathrm{d}l_3 = r^2 \sin\theta \mathrm{i}\, r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \qquad \textbf{(4.18)}$$

4.球坐标系和柱坐标系

柱坐标系

$u_1 = r\,,\quad u_2 = \phi,\quad u_3 = z$

$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$



三个基矢量

$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_r\,,\ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_\phi\,, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_z$ ，$\boldsymbol{e}_r$和$\boldsymbol{e}_\phi$的方向均与坐标ϕ 有关，$\boldsymbol{e}_z$则为常矢量. 与直角坐标系基矢的变换为

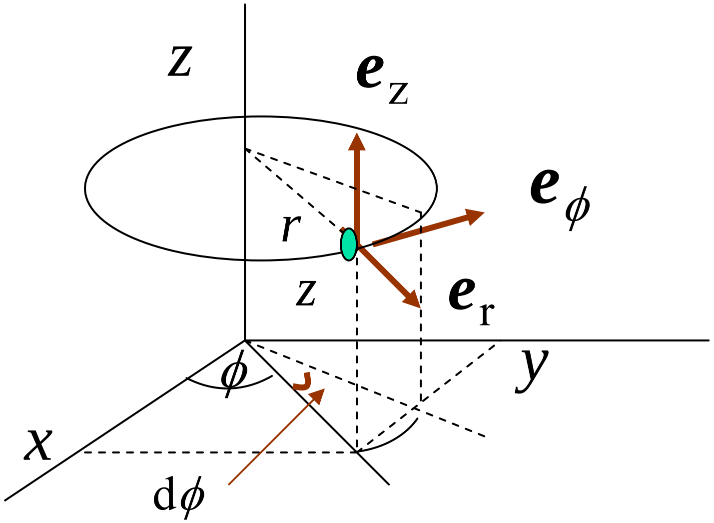
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.19)}$$

4.球坐标系和柱坐标系

柱坐标系

$u_1 = r\,,\quad u_2 = \phi,\quad u_3 = z$

$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$



$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.20)}$$

坐标变换为

$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi \qquad z = z \qquad \textbf{(4.21)}$$

4.球坐标系和柱坐标系

常用的微分运算表达式为

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{4.22}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A}=&\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\phi\\&+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)-\frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{4.25}$$

体积元为

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2\mathrm{d}l_3=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \tag{4.26}$$

5.例题

例1. 设u是空间坐标 x, y, z 的函数，证明：

$$\nabla f(u)=\frac{df}{du}\nabla u \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(u)=\nabla u\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{du} \tag{2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}(u)=\nabla u\times\frac{d\boldsymbol{A}}{du} \tag{3}$$

【证】对于$\nabla f(u)$，注意到 $\partial f/\partial u=\mathrm{d}f/\mathrm{d}u$，有

$$\nabla f(u)=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

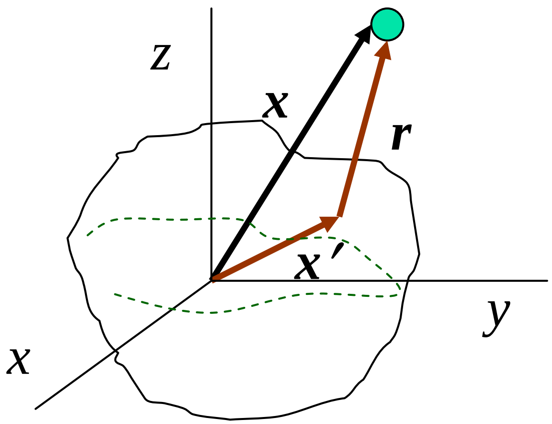
$$=\frac{df}{du}(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z})=\frac{df}{dr}\nabla u$$

在直角坐标系中,将矢量***A***写成分量形式，便可证明**(2)**式和**(3)**式.

5.例题

例2. 从源点（即电荷电流分布点）

$\boldsymbol{x}'$到场点$\boldsymbol{x}$的距离r和矢径$\boldsymbol{r}$分别为



$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-xy')^2+(z-z')^2}$$

$$\boldsymbol{r}=(x-x')\boldsymbol{e}_x+(y-y')\boldsymbol{e}_y+(z-z')\boldsymbol{e}_z$$

对源变数$\boldsymbol{x}'$和场变数$\boldsymbol{x}$ 求微商的算符分别为

$$\nabla'=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x'}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y'}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z'} \qquad \nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

证明下列结果，并体会算符∇与∇′ 的关系：

5.例题

$$\nabla r = -\nabla' r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad \text{(单位矢量)} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = -\nabla' \cdot \boldsymbol{r} = 3 \quad (2)$$

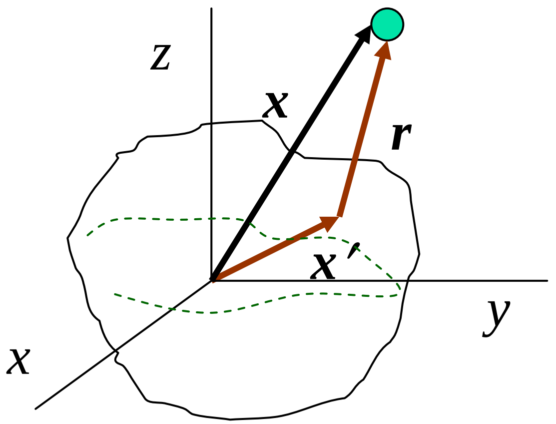
$$\nabla \times \boldsymbol{r} = -\nabla' \times \boldsymbol{r} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \boldsymbol{r} = -\nabla' \boldsymbol{r} = \overset{\rightarrow\rightarrow}{I} \quad \text{(单位张量)} \quad (4)$$

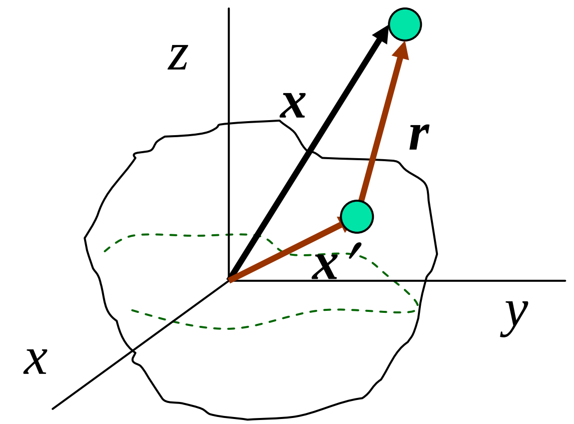
$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0 \quad (\text{当} r \neq 0) \quad (6)$$

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\nabla' \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0 \quad (7)$$



5.例题



【证】 将算符∇ 与∇' 分别作用于r和矢径$\boldsymbol{r}$ 的表达式，可得到(1)至(4)式的结果. 利用前面例1的第一式，和本例(1)至(4)式的结果，得

$$\nabla\frac{1}{r}=\frac{d(r^{-1})}{dr}\nabla r=-\frac{1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=(\nabla r^{-3})\cdot\boldsymbol{r}+r^{-3}\nabla\cdot\boldsymbol{r}=0 \qquad (\text{当}r\neq 0)$$

$$\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=(\nabla r^{-3})\times\boldsymbol{r}+r^{-3}\nabla\times\boldsymbol{r}=0$$

同理可证 $\nabla'\frac{1}{r}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$; $\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0$，当$r\neq 0$；$\nabla'\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0$.

5.例题

事实上，对任意的标量函数 $f(r)$ 和矢量函数 $f(r)\boldsymbol{r}$ ，不难证明:

$$\nabla f(r) = -\nabla' f(r)$$

$$\nabla \cdot [f(r)\boldsymbol{r}] = -\nabla' \cdot [f(r)\boldsymbol{r}]$$

$$\nabla \times [f(r)\boldsymbol{r}] = -\nabla' \times [f(r)\boldsymbol{r}]$$

$$\nabla [f(r)\boldsymbol{r}] = -\nabla' [f(r)\boldsymbol{r}]$$

即算符∇与∇' 存在代换关系$\nabla \to -\nabla'$. 这代换将会经常用到.

5.例题

例3. 证明积分变换

$$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\overset{\to\to}{T} = \int_V \nabla\cdot\overset{\to\to}{T}\,\mathrm{d}V \tag{1}$$

$$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{g}) = \int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{g})\mathrm{d}V \tag{2}$$

【证】取任一常矢量$\boldsymbol{c}$ (数值及取向均不变)点乘 $\overset{\to\to}{T}$，则 $\overset{\to\to}{T}\cdot\boldsymbol{c}$ 是个矢量，而且有

$$\nabla\cdot(\overset{\to\to}{T}\cdot\boldsymbol{c}) = (\nabla\cdot\overset{\to\to}{T})\cdot\boldsymbol{c}$$

于是据高斯定理

$$\int_V \nabla\cdot(\overset{\to\to}{T}\cdot\boldsymbol{c})\mathrm{d}V = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\overset{\to\to}{T}\cdot\boldsymbol{c})$$

即有

$$\left(\int_V \nabla\cdot\overset{\to\to}{T}\,\mathrm{d}V\right)\cdot\boldsymbol{c} = \left(\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\overset{\to\to}{T}\right)\cdot\boldsymbol{c}$$

由$\boldsymbol{c}$的任意性，得

$$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\overset{\to\to}{T} = \int_V \nabla\cdot\overset{\to\to}{T}\,\mathrm{d}V$$

同理可证（2）式．

第一章习题：1，2，4，5，6题.