

## 第二章 静电场及其边值问题

- 2.1 静电场和静电势
- 2.2 电势多极展开
- 2.3 静电能 外电场对电荷体系的作用能
- 2.4 静电场边值问题

### 2.1 静电场和静电势

静态平衡下的电荷分布产生静电场, 电荷和电场的分布均与时间无关, 场方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.1)$$

无旋性的积分形式

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.2)$$

表明静电场为保守力场, 它对电荷作的功与路径无关, 只与电荷的始末位置有关. 故可引入标势函数  $\varphi$ , 使

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (2.3)$$

任意两点  $x$  与  $x_0$  之间的电势差, 等于电场将单位正电荷从  $x$  点移至  $x_0$  点作的功:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_x^{x_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.4)$$

因此, 用电势描述电场时, 必须选择电势零点. 如令  $\varphi(x_0) = 0$ , 则任一点  $x$  的电势

$$\varphi(x) = \int_x^{x_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.5)$$

就表示单位电荷在该点的静电势能, 此时  $\varphi$  的空间分布才构成有明确意义的标量场.

当电荷分布于有限区域时, 通常以无穷远即  $x_0 = \infty$  为电势零点, 则任一点  $x$  的电势为

$$\varphi(x) = \int_x^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.6)$$

将(2.3)式代入(2.1)第一式, 得电势的泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon_0 \quad (2.7)$$

这方程在无界空间中的解为

$$\varphi(x) = \int_V \frac{\rho(x')}{4\pi\epsilon_0 r} dV' \quad (2.8)$$

其中无穷远处为电势零点, 积分遍及电荷分布区域  $V$ . 对(2.8)式取场点的负梯度, 即给出区域  $V$  内的电荷产生的电场:

$$E(x) = -\nabla\varphi(x) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \nabla \frac{1}{r} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x') \mathbf{r}}{r^3} dV' \quad (2.9)$$

若电荷分布函数  $\rho(x')$  给定, 由(2.8)式便可求出电势, 再由(2.3)式求出电场. 若电场已经求出, 则由(2.5)或(2.6)式便可求出电势. 如果已知电场或电势分布, 由(2.1)的第一式, 或泊松方程(2.7), 可求出电荷分布.

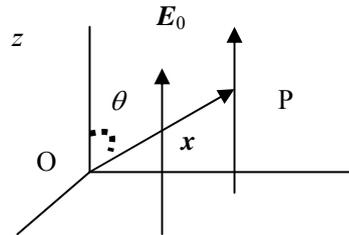
例 1. 均匀电场  $E_0$  的电势(教材 P41).

[解] 均匀电场的场强  $E_0 =$  常矢量, 可看成由“无穷大”均匀带电平板产生, 不可以取无穷远为电势零点. 计算 P 与 O 两点间的电势差

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(0) &= \int_x^0 E_0 \cdot dx \\ &= -\int_0^x E_0 \cdot dx = -E_0 \cdot x \end{aligned}$$

选择坐标原点电势  $\varphi(0) = 0$ , 并令  $E_0 = E_0 e_z$ , 有

$$\varphi(x) = -E_0 \cdot x = -E_0 R \cos\theta$$



其中  $R = |x|$ .

例 2. 无穷长带电直导线的电势(教材 P42).

## 2.2 电势多极展开

任何一个电荷系统在其外部的电势或电场, 原则上均可表示成一系列多极矩场的叠加. 反之, 若能探测到电荷系统在其外部的电势或电场, 便可推知其电荷分布. 由

$$\varphi(x) = \int_V \frac{\rho(x')}{4\pi\epsilon_0 r} dV' \quad (2.10)$$

$r = |x - x'|$  为电荷分布  $x'$  点到场点  $x$  的距离, 记  $R = |x|$  为坐标原点到场点的距离.

当系统的线度  $|x'| \ll r$ , 可将上式按  $|x'|/R$  展开为泰勒级数, 这级数将给出系统各级多极矩在远处的电势.

一维函数  $f(x-x')$  在  $x'=0$  附近的级数展开为

$$f(x-x') = f(x) + x' \frac{\partial f}{\partial x'} + \frac{1}{2!} x'x' \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \dots$$

各级导数在  $x'=0$  处取值. 对于三维函数  $f(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$  在  $\mathbf{x}'=0$  附近的展开, 就有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{\partial f}{\partial x'_i} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^3 x'_i x'_j \frac{\partial}{\partial x'_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x'_j} \right) + \dots \\ &= f(\mathbf{x}) + \mathbf{x}' \cdot (\nabla' f) + \frac{1}{2!} \mathbf{x}' \mathbf{x}' : (\nabla' \nabla' f) \dots \\ &= f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}' \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2!} \mathbf{x}' \mathbf{x}' : \nabla \nabla f(\mathbf{x}) \dots \end{aligned}$$

最后一步利用了算符代换  $\nabla' \rightarrow -\nabla$ . 令  $f(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = 1/r$ , 上式给出

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{x}' : \nabla \nabla \frac{1}{R} \dots \quad (2.11)$$

注意到  $\nabla(1/R) = -\mathbf{R}/R^3$ , 将(2.11)代入(2.10), 便给出:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{R} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R^3} + \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \dots \right] \\ &= \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

这级数一般地包含各级多极矩在远处的电势. 前三项为:

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (\text{单极项, } \sim 1/R) \quad (2.13)$$

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (\text{偶极项, } \sim 1/R^2) \quad (2.14)$$

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} \quad (\text{四极项, } \sim 1/R^3) \quad (2.15)$$

其中系统的净电荷量  $q$ , 电偶极矩  $\mathbf{p}$  和电四极矩  $\mathcal{D}_{ij}$  分别由下面的积分给出

$$q = \int_V \rho(\mathbf{x}') dV' \quad (2.16)$$

$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' dV' \quad (2.17)$$

$$\mathcal{D}_{ij} = \int_V 3x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}') dV' \quad (2.18)$$

**单极项电势和电场** 单极项电势  $\varphi^{(0)}$  有球对称性, 它相当于系统的净电荷  $q$

集中于坐标原点时产生的电势. 电场  $E_q = -\nabla \varphi^{(0)}$  当然也是球对称的.

**偶极项电势和电场** 电场由  $E_p = -\nabla \varphi^{(1)}$  给出. 由于  $\mathbf{p}$  与场算符  $\nabla$  无关, 因此

有

$$\begin{aligned}\nabla\left[\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}{R^3}\right] &= \mathbf{p}\times(\nabla\times\frac{\mathbf{R}}{R^3})+(\mathbf{p}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{R}}{R^3}=\mathbf{p}\cdot\nabla\frac{\mathbf{R}}{R^3} \\ \nabla\frac{\mathbf{R}}{R^3} &= (\nabla R^{-3})\mathbf{R}+R^{-3}\nabla\mathbf{R}=\frac{-3\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^5}+\frac{\vec{I}}{R^3}\end{aligned}$$

故电偶极矩  $\mathbf{p}$  的电场为

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi^{(1)}=\frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\mathbf{p}\cdot\nabla\frac{\mathbf{R}}{R^3}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5}-\frac{\mathbf{p}}{R^3}\right] \quad (2.19)$$

当电偶极矩沿  $z$  轴, 即  $\mathbf{p}=pe_z$ , 其电势和电场分布就有  $z$  轴的对称性:

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{x})=\frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^2}\cos\theta \quad (2.20)$$

$$\mathbf{E}-\nabla\varphi^{(1)}=\frac{p}{4\pi\epsilon_0}(2\cos\theta\mathbf{e}_R+\sin\theta\mathbf{e}_\theta) \quad (2.21)$$

**四极项电势和电场** 由于

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{R}}{R^3}=-\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)=-\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\frac{1}{R}=-\sum_{i,j=1}^3\delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}=0, \quad \text{当 } R\neq 0$$

四极项电势(2.15)也可写为

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{x})=\frac{1}{24\pi\epsilon_0}\sum_{i,j=1}^3\left[\int_V(3x'_ix'_j-r'^2\delta_{ij})\rho(\mathbf{x}')dV'\right]\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R} \quad (2.22)$$

其中  $r'=(x'^2+y'^2+z'^2)^{1/2}$  是电荷分布点到坐标原点的距离. 于是由(2.22)式, 电四极矩可重新定义为

$$\mathcal{D}_{ij}=\int_V(3x'_ix'_j-r'^2\delta_{ij})\rho(\mathbf{x}')dV' \quad (2.23)$$

(2.18)和(2.23)式定义的四极矩均为对称张量, 即  $\mathcal{D}_{ji}=\mathcal{D}_{ij}$ , 但(2.23)是无迹张量, 满足  $\mathcal{D}_{xx}+\mathcal{D}_{yy}+\mathcal{D}_{zz}=0$ , 因此它只有 5 个独立分量. 对同一个电荷系统, 用这两个定义计算出的四极矩一般不同, 但给出的四极矩电势是一样的.

电荷分布偏离球对称的系统必定出现多极矩, 而各级矩的电势按距离  $R$  的负幂次衰减, 随着  $R$  的增加, 高级矩的电势比低级矩的电势衰减得更迅速. 因此任何电荷系统在其外部的场, 均以其最低级矩的场为主.

从(2.17)式可看出, 若电荷分布存在关于坐标原点的对称性, 这系统的电偶极矩  $\mathbf{p}=0$ . 从(2.18)或(2.23)式则可看出, 若电荷分布存在关于坐标原点的反对称性,

全部电四极矩分量  $\mathcal{D}_{ij} = 0$ . 例如  $\text{CO}_2$  分子, 其净电荷  $q=0$ , 又由于所有原子都沿直线排列而且有对称性, 故其总电偶极矩  $p=0$ , 但其电四极矩  $\mathcal{D}_{ij} \neq 0$ . 又如  $\text{H}_2\text{O}$  分子, 净电荷  $q=0$ , 但  $p \neq 0$ ,  $\mathcal{D}_{ij} \neq 0$ . 原子核在其周围带电粒子的电场作用下会发生形变, 因而也具有电四极矩.

例 4. 半径为  $a$  的球面电荷面密度为  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta'$ , 求远处的电势(准确到四极项). 其中  $\sigma_0$  为常数.

【解】 如果我们将导体球或线性均匀电介质球置入均匀电场  $E_0$  中, 导体球面出现的感应电荷分布, 或电介质球面出现的极化电荷分布, 就都有  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta'$  的形式. 由于电荷分布有关于  $z$  轴的对称性, 而且有关于坐标原点的反对称性, 可知净电荷  $q$  和电四极矩  $\mathcal{D}_{ij}$  均为零, 但电偶极矩  $p \neq 0$ . 由

$$p = \oint_S \sigma_0 \cos \theta' x' dS'$$

电荷分布点为  $x' = ae_r$ , 即

$$x' = a \sin \theta' \cos \phi', \quad y' = a \sin \theta' \sin \phi', \quad z' = a \cos \theta'$$

球面积元为  $dS' = a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$ . 得这电荷分布所形成的电偶极矩各分量:

$$p_x = \oint_S \sigma_0 \cos \theta' x' dS' = 0, \quad p_y = \oint_S \sigma_0 \cos \theta' y' dS' = 0$$

$$p_z = \oint_S \sigma_0 \cos \theta' z' dS' = a^3 \sigma_0 \int_0^\pi \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' = 4\pi a^3 \sigma_0 / 3$$

即有

$$p = \frac{4\pi a^3 \sigma_0}{3} e_z$$

于是远处的电势为

$$\varphi(x) = \varphi^{(1)}(x) = \frac{p \cdot R}{4\pi \epsilon_0 R^3} = \frac{a^3 \sigma_0 \cos \theta}{3\epsilon_0 R^2}$$

这其实也是球面电荷分布在球外空间产生的电偶极势, 它有  $z$  轴的对称性. 将  $p$  值代入(2.21)式, 便得到球外空间的电偶极场.

例 5. 线四极子的电势和电场.

【解】 如右图. 由结构的对称性, 可看成由一对等值反向的电偶极子  $\pm p$  组成,

故其净电荷和总电偶极矩均为零。但它有四极矩。例如  $\text{CO}_2$  分子。令其沿  $z$  轴排列, 据(2.18)式, 并由各个电荷  $q_k$  的坐标, 有

$$\mathcal{D}_{zz} = \sum_{k=1}^3 3q_k z'_k z'_k = 3(-q)l^2 + 0 + 3(-q)(-l)(-l) = -6ql^2 = -6pl$$

其中  $p = ql$ . 其它分量  $\mathcal{D}_{ij} = 0$ . 于是由(2.15)式, 得远处的电势

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \mathcal{D}_{zz} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R} = \frac{-6pl}{24\pi\epsilon_0 R^5} (3z^2 - R^2) \\ &= \frac{-pl}{4\pi\epsilon_0 R^3} (3\cos^2\theta - 1) \end{aligned}$$

电场为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\nabla\varphi^{(2)} &= -\left[ \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial\theta} \mathbf{e}_\theta \right] \\ &= \frac{-pl}{4\pi\epsilon_0 R^4} [3(3\cos^2\theta - 1)\mathbf{e}_R + 6\cos\theta\sin\theta\mathbf{e}_\theta] \end{aligned}$$

电势和电场分布有  $z$  轴对称性.

例 6. 求均匀带电的旋转椭球远处的电势, 准确至四极项. (教材 P68)

**【解】** 例如, 原子核的形变使它有一定的电四极矩, 一个经典模型是把它看成旋转椭球. 设总电荷为  $q$ , 并令长半轴  $a$  沿  $z$  轴, 短半轴  $b$  在  $xy$  平面. 电荷体密度为  $\rho = 3q/4\pi ab^2$ . 电荷分布便有  $z$  轴对称性, 也有关于坐标原点的对称性, 故电偶极矩  $p = 0$ . 椭球面方程为

$$\frac{x'^2 + y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{a^2} = 1 \quad (1)$$

为便于计算四极矩, 作坐标变换

$$x' = bx, \quad y' = by, \quad z' = az \quad (2)$$

于是(1)式变为半径  $r = 1$  的单位球面方程:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (3)$$

其中  $x = r \sin\theta \cos\phi$ ,  $y = r \sin\theta \sin\phi$ ,  $z = r \cos\theta$ . 即电荷分布点的坐标和体积元为

$$x' = br \sin\theta \cos\phi, \quad y' = br \sin\theta \sin\phi, \quad z' = r \cos\theta$$

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$dV' = dx'dy'dz' = ab^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

由于  $z$  轴对称性(旋转对称性), 有

$$\int_V x'_i x'_j dV' = 0, \quad \text{当 } i \neq j$$

$$\int_V z'^2 dV' = a^3 b^2 \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4\pi a^3 b^2}{15}$$

$$\int_V x'^2 dV' = \int_V y'^2 dV' = \frac{4\pi a b^4}{15}$$

利用

$$\mathcal{D}_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho dV', \quad \mathcal{D}_{xx} + \mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{zz} = 0$$

得

$$\mathcal{D}_{zz} = \int_V (3z'^2 - r'^2) \rho dV' = 2\rho \int_V (z'^2 - x'^2) dV' = \frac{2q(a^2 - b^2)}{5}$$

$$\mathcal{D}_{xx} = \mathcal{D}_{yy} = -\frac{1}{2}\mathcal{D}_{zz} = -\frac{q(a^2 - b^2)}{5}; \quad \mathcal{D}_{ij} = 0, \quad \text{当 } i \neq j$$

四极项电势为

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \left[ \mathcal{D}_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathcal{D}_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mathcal{D}_{zz} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0 R^5} [(3x^2 - R^2)\mathcal{D}_{xx} + (3y^2 - R^2)\mathcal{D}_{yy} + (3z^2 - R^2)\mathcal{D}_{zz}] \\ &= \frac{q(a^2 - b^2)}{40\pi\epsilon_0 R^3} (3\cos^2\theta - 1) \end{aligned}$$

该系统在远处的电势为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^{(0)} + \varphi^{(2)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \varphi^{(2)}$$

当  $a=b$  时就是均匀带电球, 此时只有单极势  $\varphi^{(0)} = q/4\pi\epsilon_0 R$ .

### 2.3 静电能 外电场对电荷体系的作用能

**电荷体系的静电能** 各向同性线性均匀介质内静电能量密度为  $w = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$ ,

其中  $D = \varepsilon E$ . 真空中  $D = \varepsilon_0 E$ . 由于电场一般地分布于全空间, 因此电荷系统的总静电能, 是电场所有分布区域内的能量之和, 即总能量一般地由积分

$$W = \int_{\infty} \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \quad (2.24)$$

给出. 由  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ , 总静电能量也可由下式计算:

$$W = \int_V \frac{1}{2} \rho_f \varphi dV \quad (2.25)$$

积分体积  $V$  为电荷分布区域.

例 7. 电荷  $q$  均匀分布于半径为  $a$  的球面, 求总静电能量. (教材 P42, 例 3)

【解】球面电荷密度为  $\sigma = q/4\pi a^2$ . 球对称电荷分布产生球对称电场. 由高斯定理可得

$$\begin{aligned} E &= \frac{qR}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, & \varphi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & \text{当 } R \geq a \\ E &= 0, & \varphi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} & \text{当 } R < a \end{aligned}$$

电荷只分布于球面, 此处电势为常数  $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0 a$ . 故总静电能量为

$$W = \oint_S \frac{1}{2} \sigma \varphi dS = \frac{1}{2} \sigma \varphi \cdot 4\pi a^2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

或者, 由于球内电场  $E = 0$ , 电场及其能量分布于球外空间, 总静电能量

$$W = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_a^{\infty} \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 R^2 dR \int d\Omega = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

带电体的静电场总是与其电荷不可分离. 因此带电粒子的静电场能量, 属于粒子的自能量. 由质能关系  $W = mc^2$  可知, 带电粒子的静止质量  $m$  必定包含着电磁质量. 对于电子, 经典理论中的一个假定是: 它的电荷  $-e$  分布于半径为  $a$  的球面, 于是由  $W = m_e c^2 = e^2 / 8\pi\varepsilon_0 a$ , 得出电子的“经典半径”:

$$a = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \sim 10^{-15} \text{ m}$$

但实验显示, 直到  $10^{-18} \text{ m}$  的尺度, 电子仍然像“点粒子”. 因此上述关于电子电荷分布的假定, 以及由此得出的所谓电子“经典半径”, 根本不能反映电子内部的结构.

**外电场对电荷体系的作用能** 电荷在外电场中的静电势能, 就是外场对电荷的静电作用能. 设外场电势为  $\varphi_e$ , 则外电场对点电荷  $q$  的作用能为  $W_i = q\varphi_e$ , 对此式求负梯度, 即给出外电场对电荷的作用力  $F = -\nabla W_i = qE_e$ . 若体积  $V$  内电荷密度为  $\rho(x)$ , 外场对这带电体的静电作用能便为

$$W_i = \int_V \rho(x)\varphi_e(x)dV \quad (2.26)$$

当电荷分布于小区域, 可将外场电势  $\varphi_e(x)$  对坐标原点(选在  $V$  内)展开为泰勒级数, (2.26)便给出外场对电荷体系作用能的级数展开式

$$W_i = q\varphi_e(0) + \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_e(0) + \frac{1}{6} \overset{\rightarrow}{\mathcal{D}} : \nabla \nabla \varphi_e(0) + \dots \quad (2.27)$$

$\varphi_e(0)$  是外场在原点的电势. 电荷体系的净电荷量  $q$ , 电偶极矩  $\mathbf{p}$  与四极矩  $\mathcal{D}_{ij}$ , 由 (2.16), (2.17)和(2.18)式计算. 外电场对电偶极子的作用能、作用力和力矩分别为

$$W_i = \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_e = -\mathbf{p} \cdot E_e \quad (2.28)$$

$$\mathbf{F} = -\nabla W_i = \mathbf{p} \cdot \nabla E_e \quad (2.29)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times E_e \quad (2.30)$$

从(2.28)式看到, 电矩矢量  $\mathbf{p}$  与外场  $E_e$  方向一致时, 电偶极子的能量最低; (2.30)式表明, 外场的力矩将使  $\mathbf{p}$  朝  $E_e$  的方向转动. (2.29)则表明, 电偶极子将朝着场强最大的方向平动, 若外场为均匀场, 则  $\mathbf{F} = 0$ . 外电场对电四极矩的作用能为

$$W_i = -\frac{1}{6} \overset{\rightarrow}{\mathcal{D}} : \nabla E_e \quad (2.31)$$

许多介质分子除了有电偶极矩, 还有电四极矩; 原子核也有一定的四极矩. 因此它们在非均匀电场中有一定的四极矩能量.

例 8. 电子在原子核电场中的势能.

**【解】** 形变原子核会产生单极势  $\varphi^{(0)}$  和四极势  $\varphi^{(2)}$ . 因此, 电子在原子核电场中的势能一般为

$$W_i = -e(\varphi^{(0)} + \varphi^{(2)})$$

若略去四极项能量, 就有

$$W_i \approx -e\varphi^{(0)} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

其中  $Z$  为原子序数,  $a$  是电子离原子核的平均距离. 量子力学对负势能的解释——原子中的电子被束缚于“势阱”中.

## 2.4 静电场边值问题

在有不同介质分布的情形, 已知电荷的电场将使介质出现极化电荷分布, 或使导体出现感应电荷分布, 这些电荷反过来又激发电场, 总电场是所有电荷的电场之叠加. 但极化电荷和感应电荷的分布是未知的, 因此一般情况下不可能由积分式(2.8)求出电势, 必须根据给定介质的电磁性质和边界条件, 求解电势或电场的微分方程, 这就是静电场边值问题. 寻找这类问题解答的依据是**唯一性定理**, 即只有

(1) 满足各求解区域内电势(或电场)的微分方程

(2) 并且满足相邻区域的边值关系, 以及给定的边界条件

的解, 是唯一正确的解. 因此, 寻找边值问题解答的前提, 是必须根据具体物理问题找出全部定解条件, 再根据这些条件采用恰当的数学方法求解.

**静电场方程和边值关系** 在每一种连续分布的介质内, 静电场方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.32)$$

若该区域内介质线性均匀, 便有  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ; 若该区域为真空, 有  $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$ ; 若该区域是导体则  $\mathbf{E} = 0$ . 在两种介质的分界面上, 边值关系一般地为

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f, \quad \mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (2.33)$$

由电位移矢量的定义  $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ , 而一般情况下界面两边极化强度  $\mathbf{P}$  的跃变关系为  $\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = -\sigma_p$ , 故第一个边值关系与  $\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = (\sigma_f + \sigma_p)/\epsilon_0$  等价,  $\sigma_f$  是界面的自由电荷面密度,  $\sigma_p$  是极化(束缚)电荷面密度. 在绝缘介质的分界面上, 一般有  $\sigma_f = 0$ .

**静电势方程和边值关系** 若区域  $V$  内介质线性均匀, 即有  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ , 而  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , 由场方程(2.32), 此区域内的电势方程为

$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\epsilon, \quad (\text{或 } \nabla^2\varphi = 0, \text{ 当 } \rho_f = 0) \quad (2.34)$$

在两种线性均匀介质的界面  $S$  上, 边值关系(2.33)用电势表为

$$-\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_f, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \quad (2.35)$$

(2.35)第二式表示任何情况下, 界面两侧的电势均连续.

若存在导体, 由于静电平衡状态下导体内部  $E = 0$ , 由  $E = -\nabla \varphi = 0$ , 可知导体的电势为常数, 其表面为等势面. 设介质 1 为导体, 则(2.35)成为

$$-\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma_f, \quad \varphi_2|_S = \text{常数} \quad (2.36)$$

第一式对导体表面  $S$  积分, 右方给出的是导体表面所带的总自由电荷. 因此有导体存在时, 必须给定每个导体的电势, 或给定每个导体所带的总自由电荷.

**静电场边值问题的唯一性定理** 设介质分区线性均匀, 区域  $V_i$  内自由电荷分布  $\rho_f$  给定, 则这区域内的电势方程为

$$\nabla^2 \varphi_i = -\rho_f / \varepsilon_i \quad (\text{或 } \nabla^2 \varphi = 0, \text{ 当 } \rho_f = 0) \quad (1)$$

在  $V_i$  与  $V_j$  的分界面  $S_i$  上, 边值关系为

$$\varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = -\sigma_f, \quad \varphi_j = \varphi_i \quad (2)$$

我们要证明: 在  $V_i$  内满足方程(1), 在界面  $S_i$  上又满足(2), 以及给定的边界条件

$$\varphi|_{S_i} \quad (\text{第一类边值}), \quad \text{或} \quad \partial \varphi / \partial n|_{S_i} \quad (\text{第二类边值}) \quad (3)$$

的电势解  $\varphi_i$ , 才是决定区域  $V_i$  内电场  $E$  唯一的正确解.

[证] 设  $V_i$  内有两个可能的电势解  $\varphi'_i$  和  $\varphi''_i$ , 它们都必须满足方程(1). 令

$$\varphi'_i - \varphi''_i = \varphi \quad (4)$$

将  $\varphi'_i$  和  $\varphi''_i$  代入方程(1), 并由(4), 得  $\varphi$  满足的方程为

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (5)$$

$\varphi'_i$  和  $\varphi''_i$  也必须满足边值关系(2), 由此得到

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_i} = 0, \quad \varphi|_{S_i} = 0 \quad (5)$$

由于(5)式, 有

$$\nabla \cdot (\varepsilon_i \varphi \nabla \varphi) = \varepsilon_i (\nabla \varphi \cdot \nabla \varphi) + \varepsilon_i \varphi \nabla^2 \varphi = \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2$$

又由高斯积分变换定理, 有

$$\oint_{S_i} (\varepsilon_i \varphi \nabla \varphi) \cdot d\mathbf{S} = \int_{V_i} \nabla \cdot (\varepsilon_i \varphi \nabla \varphi) dV = \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV$$

亦即有

$$\oint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV$$

而在界面  $S_i$  上, (5)式已给出  $\varphi$  值和  $\partial \varphi / \partial n$  值均为零. 因此  $V_i$  内只能有

$$\int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV = 0, \quad \text{即 } \nabla \varphi = 0 \quad (6)$$

这表明: 在  $V_i$  内与  $\varphi$  对应的电场  $-\nabla \varphi$  只能为零. 亦即  $V_i$  内两个可能的电势解  $\varphi'_i$  和  $\varphi''_i$  最多差一个常数:

$$\varphi'_i - \varphi''_i = \varphi = \text{常数} \quad (7)$$

因此  $V_i$  内的电场唯一确定:

$$\mathbf{E}_i = -\nabla \varphi'_i = -\nabla(\varphi''_i + \varphi) = -\nabla \varphi''_i \quad (8)$$

证毕.

维持恒定电流的电场——稳恒电场也是静电场, 可令  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ . 若导电介质是分区线性均匀的, 则由方程  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  和欧姆定律  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  可知, 每个区域内的电势都遵从拉普拉斯方程  $\nabla^2 \varphi = 0$ . 设相邻区域介质的电导率为  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 边值关系

$J_{2n} = J_{1n}$ ,  $E_{2t} = E_{1t}$  便可表示为

$$\sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \quad (2.37)$$

在各线性均匀区域内满足方程  $\nabla^2 \varphi = 0$ , 在界面上又满足(2.37)及给定边界条件的电势, 给出唯一正确的电场解.

求解边值问题没有普遍适用的方法, 必须依据唯一性定理, 根据具体物理问题寻找适当的方法求解, 包括从物理上猜测尝试解. 复杂问题通常用数值计算找出近似解. 对于较为简单或有某种对称性的情形, 除个别奇点外, 问题的解可用解析函数表示出来. 常用的解析方法是分离变量法, 镜像法和格林函数法.

**分离变量法** 应用分离变量法求解的条件为:

(1) 介质分区线性均匀;

(2) 介质分界面与某一类曲线正交坐标系(如直角坐标系、球坐标系、柱坐标系等)的坐标面重合;

(3) 求解区域内自由电荷体密度  $\rho_f = 0$ , 即此区域内的电势满足拉普拉斯方程  $\nabla^2 \varphi = 0$ ; 或者虽然求解区域内  $\rho_f \neq 0$ , 但其分布较简单, 可以找出(或猜出)它产生的电势  $\varphi_\rho$ , 亦即可以找到泊松方程  $\nabla^2 \varphi = \rho_f / \varepsilon$  的一个特解, 由迭加原理, 总电势为  $\varphi = \varphi_\rho + \varphi'$ ,  $\varphi'$  是其相应齐次方程  $\nabla^2 \varphi' = 0$  的通解. 利用分离变量法可将拉普拉斯方程的通解表示成级数, 各区域电势通解  $\varphi = \varphi_\rho + \varphi'$  中的待定系数, 由边值关系和边界条件确定, 从而解出电势分布.

例 9. (教材 P48 例 1, 自习) 这是寻找球对称条件下拉普拉斯方程解的问题

例 10. (教材 P49 例 2) 电容率为  $\varepsilon$ 、半径为  $R_0$  的均匀线性介质球置于均匀电场  $E_0$  中. 求电势和极化电荷分布.

**【解】** 外电场将使介质球极化. 假定介质球的尺度远小于产生原外场  $E_0$  的电荷分布线度, 则球内和球外空间的总电场, 均是原外场  $E_0$  与介质球极化电荷产生的电场  $E'$  叠加的结果. 以球心为坐标原点, 并令  $E_0 = E_0 e_z$ . 于是这问题有  $z$  轴的对称性. 又由于球内和球外两个求解区域的自由电荷体密度  $\rho_f$  均为零, 故全部定解条件为:

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad (R > R_0) \quad (1)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0, \quad (R > R_0) \quad (2)$$

$$R = 0, \quad \varphi_1 \text{ 有限}; \quad R \rightarrow \infty, \quad \varphi_2 \rightarrow -E_0 R \cos \theta \quad (3)$$

$$R = R_0: \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R}, \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad (4)$$

由  $z$  轴的对称性及条件(3), 拉普拉斯方程(1)和(2)的解有形式

$$\varphi_1 = \sum_n a_n R^{n+1} P_n(\cos \theta) \quad (5)$$

$$\varphi_2 = -E_0 R \cos \theta + \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (6)$$

将(5)和(6)代入条件(3), 解出

$$a_1 = \frac{-3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0, \quad b_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 R^3; \quad a_n = b_n = 0, \quad \text{当 } n \neq 1$$

于是得

$$\varphi_1 = \frac{-3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 R \cos \theta = -E_0 R \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 R \cos \theta \quad (7)$$

$$\varphi_2 = -E_0 R \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \frac{E_0 R^3}{R^2} \cos \theta \quad (8)$$

球内  $\varphi_1$  为均匀场, 它第一项是原外场, 第二项是极化电荷产生的, 但这项显然与原外场  $E_0$  反向, 以致介质球内部的总电场

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \nabla(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{R}) = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0 \quad (9)$$

比原外场  $E_0$  要弱. 由于  $E_1$  是常矢量, 介质球的极化强度  $\mathbf{P} = (\mathbf{D}_1 - \varepsilon_0 \mathbf{E}_1) = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}_1$  也是常矢量, 故极化电荷体密度

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \quad (10)$$

因此,  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  的第二项必定是由介质球面出现的极化面电荷  $\sigma_p$  所产生的. 球外电势  $\varphi_2$  的第二项就是  $\sigma_p$  产生的电偶极场. 将此项与位于坐标原点的电偶极子  $p = p e_z$  的电势

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cos \theta \quad (11)$$

比较, 可知极化电荷形成的电偶极矩为

$$\mathbf{p} = \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} R_0^3 E_0 \mathbf{e}_z \quad (12)$$

事实上, 由  $\sigma_p = -\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}$  是介质球面的极化强度, 可得球面的极化电荷密度

$$\sigma_p = -\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{P} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{-3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos \theta \quad (13)$$

由电偶极矩公式(2.17), 将  $\sigma_p$  对介质球面积分, 的确能计算出(12)式的结果.

例 11. 在均匀静电场  $E_0$  中置入半径为  $R_0$  的导体球. 证明:

在与外场平行的方向上, 导体球面受到的静电张力等值反向, 因而此球有分裂成两半的趋势.

**【解】** 以球心为坐标原点, 令  $E_0 = E_0 e_z$ , 且令导体球电势为零. 球外电势满足方程  $\nabla^2 \varphi = 0$ , 由边界条件  $R \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow -E_0 R \cos \theta$ ;  $R = R_0, \varphi = 0$ , 得

$$\varphi = -E_0 R \cos \theta + \frac{E_0 R_0^3}{R^2} \cos \theta$$

导体球面的电场强度为

$$E = -\nabla \varphi|_{R=R_0} = 3E_0 \cos \theta e_R$$

它表面受到的静电应力密度为

$$\begin{aligned} f_S &= -e_R \cdot \vec{T} = -e_R \cdot (-\varepsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \vec{I}) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 e_R = \frac{9}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \theta e_R \end{aligned}$$

在  $\theta = 0, \pi$ , 即与作用外场平行的方向上力密度最大. 将上式的  $e_R$  分解为三个直角分量 (见附录 V.9 式) 并对两半球面积分, 得两半球面受到的力分别为

$$\begin{aligned} F_u &= \int_S f_S dS = \frac{9}{4} \pi \varepsilon_0 E_0^2 R_0^2 e_z, \quad \text{当 } 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ F_d &= \int_S f_S dS = -\frac{9}{4} \pi \varepsilon_0 E_0^2 R_0^2 e_z, \quad \text{当 } \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

两者等值反向, 因而导体球有分裂成两半的趋势.

**在例 10 中, 作用于介质球表面的静电应力如何?**

例 12. 半径为  $R_0$  的导体球外充满线性均匀的绝缘介质  $\varepsilon$ , 导体球接地, 离球心为  $a$  处 ( $a > R_0$ ) 置一点电荷  $q_f$ , 试用分离变数法求空间各点电势.

**【解】**  $q_f$  的电场将使导体球面出现感应电荷分布, 球外介质也将被极化. 以球心为坐标原点, 令  $q_f$  位于  $z = a$ , 如右图. 于是问题有  $z$  轴对称性. 球外电势的全部定解条件为

$$\nabla^2 \varphi = -q_f \delta(x - a e_z) / \varepsilon \quad (1)$$

$$R \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow 0; \quad R = R_0, \varphi = 0 \quad (2)$$

由  $R \rightarrow \infty$  处的条件和  $z$  轴对称性, 泊松方程(1)的解写为

$$\varphi = \frac{q_f}{4\pi\epsilon r} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (3)$$

第一项是方程(1)的一个特解, 其中  $r$  是点电荷  $q_f$  到场点的距离. 第二项是齐次方程即拉普拉斯方程  $\nabla^2\varphi' = 0$  的解.  $1/r$  可展开成

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} = \begin{cases} \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) & (R < a) \\ \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{R}\right)^n P_n(\cos\theta) & (R > a) \end{cases} \quad (4)$$

因  $R_0 < a$ , 将(4)的第一式代入(3), 并由条件  $R = R_0$ ,  $\varphi = 0$ , 解出

$$b_n = \frac{-q_f}{4\pi\epsilon} \frac{R_0^{2n+1}}{a^{n+1}}$$

$$\varphi = \frac{q_f}{4\pi\epsilon r} - \frac{q_f}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_0^{2n+1}}{a^{n+1} R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (R > R_0) \quad (5)$$

将(4)代入(5), 便给出  $R_0 \leq R \leq a$  和  $R \geq a$  两区域中电势的级数形式, 仅在  $R = a$ ,  $\theta = 0$

即点电荷  $q_f$  所在点级数发散. 在  $R \geq a$  区域, (5)式给出

$$\varphi = \frac{q_f}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \left(a^n - \frac{R_0^{2n+1}}{a^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta) \quad (6)$$

它包含着这电荷体系所有各级电多极矩的电势, 由

$$P_0(\cos\theta) = 1, P_1(\cos\theta) = \cos\theta, P_2(\cos\theta) = (3\cos^2\theta - 1)/2$$

(6)式的前三项是单极项, 偶极项和四极项电势:

$$\varphi^{(0)} = \frac{q_f}{4\pi\epsilon R} \left(1 - \frac{R_0}{a}\right) \quad (7)$$

$$\varphi^{(1)} = \frac{q_f}{4\pi\epsilon R^2} \left(a - \frac{R_0^3}{a^2}\right) \cos\theta \quad (8)$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{q_f}{8\pi\epsilon R^3} \left(a^2 - \frac{R_0^5}{a^3}\right) (3\cos^2\theta - 1) \quad (9)$$

由(8)式和(9)式, 可推知这体系的电偶极矩和电四极矩.

**镜像法** 这种方法是用若干个假想的镜像电荷, 等效未知的电荷(包括介质的极化电荷或导体表面的感应电荷)分布, 这些假想电荷与已知电荷的总电势或总电场, 只要满足全部定解条件, 所得到的解就是唯一正确的解. 必须注意的是, 为使找到的解满足每个求解区域内给定的电势或电场方程, 假想的镜像电荷必

须置于每个求解区域之外, 镜像电荷的数值及其位置, 由边值关系和边界条件确定.

例 13. 用镜像法求解例 12 的电势.

【解】以假想的像电荷代替导体球与介质分界面真实的感应电荷及极化电荷对电场的贡献, 为使所得的解满足求解区域即球外的方程(1), 像电荷必须置于球内. 由轴对称性, 在球内  $z = b$  处置像电荷  $q'$ , 于是球外任一点的电势可写成

$$\varphi = \frac{q_f}{4\pi\epsilon r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon r'} \quad (10)$$

其中  $r$  是  $q_f$  到场点的距离,  $r'$  是  $q'$  到场点的距离, 即

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta}}, \quad \frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb \cos \theta}} \quad (11)$$

由  $R = R_0$ ,  $\varphi = 0$  的条件, 有

$$\left[ \frac{q_f}{r} + \frac{q'}{r'} \right]_{R=R_0} = 0, \quad \text{即} \quad \frac{q'}{q_f} = -\frac{r'}{r} \Big|_{R=R_0}$$

将  $r$  和  $r'$  代入上式并两边平方, 可解出

$$q' = -q_f R_0/a, \quad b = R_0^2/a \quad (12)$$

$$\varphi = \frac{q_f}{4\pi\epsilon r} - \frac{q_f R_0/a}{4\pi\epsilon r'} \quad (13)$$

此解与上题(5)式是一致的, 它显然也满足  $R \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow 0$  的条件.

例 14. 在  $z > 0$  和  $z < 0$  两区域分别充满电容率为  $\epsilon_2$  与  $\epsilon_1$  的均匀介质,  $z = a$  处有一点电荷  $q$ , 求电势分布, 以及电荷  $q$  受到的作用力.

【解】这问题有  $z$  轴对称性. 电荷  $q$  的电场使两区域的介质均被极化. 定解条件为

$$\nabla^2 \varphi_2 = -q \delta(x, y, z - a)/\epsilon_2, \quad \nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad (1)$$

$$z = 0: \quad \varphi_2 = \varphi_1, \quad \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \quad (2)$$

以假想的像电荷产生的场代替极化电荷的场. 为满足  $z > 0$  区域  $\varphi_2$  的方程, 在  $z = -a$  处置像电荷  $q'$ , 则此区域内任一点的电势为

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left[ \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} \right] \quad (3)$$

为满足  $z < 0$  区域  $\varphi_1$  的方程, 设  $z = a$  处原电荷  $q$  与像电荷之和为  $q''$ , 于是此区域的电势为

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{q''}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} \quad (4)$$

由条件(2), 可解得

$$q' = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, \quad q'' = -q' = q + \frac{-2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad (5)$$

将  $q'$  和  $q''$  代入(3)和(4), 即得电势解. 电荷  $q$  受到的力, 等效于  $q'$  的电场对其作用力:

$$F = qE' = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_2(2a)^2} e_z = -\frac{q^2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{16\pi\epsilon_2(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^2} e_z \quad (6)$$

若  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ,  $q$  将受到吸引力, 这是因为, 此时界面即  $z = a$  处出现的总极化电荷 (在无限靠近界面的两侧, 都有极化面电荷分布) 面密度

$$\sigma_p = \epsilon_0 e_z \cdot (E_2 - E_1) = -\epsilon_0 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \quad (7)$$

与  $q$  异号; 若  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , 此时  $\sigma_p$  将与  $q$  同号,  $q$  将受到排斥力.

**格林函数法** 任一场点  $x$  处的电势  $\varphi(x)$ , 都是每一个源点  $x'$  上的电荷激发的电势之叠加. 而位于  $x'$  点的单位点电荷 ( $q = +1$ ) 的密度, 可以  $\delta$  函数表示为  $\rho(x) = \delta(x - x')$ . 因此, 一个单位点电荷在任一场点  $x$  产生的电势, 可用格林函数  $G(x, x')$  表示, 它显然满足方程

$$\nabla^2 G(x, x') = -\delta(x - x') / \epsilon_0 \quad (2.38)$$

读者已经知道, 在无界空间中, 位于  $x'$  点的单位点电荷 ( $q = +1$ ) 在任一点  $x$  产生的电势为  $\varphi(x) = 1/4\pi\epsilon_0 r$ , 即方程(2.38)在无界空间中的解为

$$G(x, x') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.39)$$

它称为**无界空间的格林函数**, 其中  $r = |x - x'|$ .

若  $z < 0$  的下半空间为导体,  $z > 0$  的上半空间为真空, 导体表面上方  $x'$  点处有一单位点电荷. 设  $z = 0$  即导体表面电势为零, 用镜像法, 容易得到上半空间的格林函数

$$G(x, x') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right] \quad (2.40)$$

它满足边界条件:  $z = 0$  处,  $G = 0$ .

若半径为  $R_0$  的导体球接地(电势为零), 球外空间为真空, 而且球外  $x'$  点处有一单位点电荷. 用镜像法, 也容易得到球外空间的格林函数

$$G(x', x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{(RR'/R_0)^2 + R_0^2 - 2RR'\cos\alpha}} \right] \quad (2.41)$$

它满足  $R' = R_0$  处  $G = 0$ , 其中  $\alpha$  是场点位矢  $x$  与单位点源位矢  $x'$  之间的夹角:

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi') \quad (2.42)$$

$(R, \theta, \phi)$  与  $(R', \theta', \phi')$  分别是场点和点源的坐标. 如果半径为  $R_0$  的导体球壳接地(电势为零), 球内  $x'$  点处有一单位点电荷, 则(2.41)就是球内空间的格林函数.

利用格林公式

$$\int_V (\phi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\phi)dV = \oint_S (\phi\nabla\phi - \phi\nabla\phi) \cdot dS \quad (2.43)$$

并取  $\phi$  为满足泊松方程

$$\nabla^2\phi(x) = -\rho(x)/\epsilon_0 \quad (2.44)$$

的电势解,  $\phi$  为满足方程(2.38)的格林函数  $G$ . 则在任一区域  $V$  内, 泊松方程(2.44)的解可表示为

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \int_V G(x', x)\rho(x')dV' + \\ & \epsilon_0 \oint_S \left[ G(x', x) \frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi(x') \frac{\partial G(x', x)}{\partial n'} \right] dS' \end{aligned} \quad (2.45)$$

其中  $\rho(x')$  是  $V$  内的电荷密度函数. 这种方法的关键, 是根据具体问题和给定的边界条件, 选择正确的格林函数  $G(x', x)$ , 它是格林方程(2.38)在一定边界条件下的解.

若给定的是  $V$  的界面  $S$  的  $\varphi$  值, 应当选择第一类边值问题的格林函数:

$$G(\mathbf{x}', \mathbf{x})|_{\mathbf{x}' \in S} = 0 \quad (2.46)$$

此时(2.45)式便成为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') dV' - \varepsilon_0 \oint_S \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{x})}{\partial n'} dS' \quad (2.47)$$

若给定的是  $V$  的界面  $S$  的  $\partial\varphi/\partial n$  值, 应当选择第二类边值问题的格林函数:

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{x})}{\partial n'} \Big|_{\mathbf{x}' \in S} = -\frac{1}{\varepsilon_0 S} \quad (2.48)$$

这里  $S$  是界面的总面积, 此时(2.45)为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') dV' + \varepsilon_0 \oint_S G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial n'} dS' + \langle \varphi \rangle_S \quad (2.49)$$

$\langle \varphi \rangle_S$  是界面电势的平均值.

例 14. 一半径为  $R_0$  的球面, 在球坐标  $0 < \theta < \pi/2$  的半球面上电势为  $\varphi_0$ , 在  $\pi/2 < \theta < \pi$  的半球面上电势为  $-\varphi_0$ . 用格林函数法求空间各点的电势.

【解】这问题给定的边界条件是球面  $S$  的电势, 故应选择第一类边值问题的格林函数, 即在球面  $S$  上  $G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = 0$ . 球空间格林函数

$$G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{(RR'/R_0)^2 + R_0^2 - 2RR'\cos\alpha}} \right] \quad (1)$$

满足  $R' = R_0$  处  $G = 0$ , 其中  $\alpha$  是场点位矢  $\mathbf{x}$  与单位点源位矢  $\mathbf{x}'$  之间的夹角:

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi') \quad (2)$$

$(R, \theta, \phi)$  与  $(R', \theta', \phi')$  分别是场点和点源的坐标. 因球内电荷体密度  $\rho = 0$ , 由(2.25)式, 球内任一点的电势由积分

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\varepsilon_0 \oint_S \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{x})}{\partial R'} dS' \quad (3)$$

给出, 积分面是  $R' = R_0$  的球面. 球内任一场点到球心的距离  $R \leq R'$ , 故有  $RR' \leq R_0^2$ ,

而轴对称下的球函数加法公式为

$$P_n(\cos\alpha) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') = P_n(x)P_n(x') \quad (4)$$

因此格林函数(1)可展开为

$$G(x', x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{R^n}{R'^{n+1}} - \frac{R^2 R'^2}{R_0^{2n+1}} \right] P_n(x) P_n(x') \quad (5)$$

于是有

$$\left. \frac{\partial G}{\partial R'} \right|_{R'=R_0} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{R^n}{R_0^{n+2}} P_n(x) P_n(x') \quad (6)$$

球面元  $dS' = R_0^2 \sin\theta'd\theta'd\phi' = -R_0^2 dx'd\phi'$ , 球面  $S$  上给定的边值为:  $0 \leq x' \leq 1$  处  $\varphi = \varphi_0$ ,

$-1 \leq x' \leq 0$  处  $\varphi = -\varphi_0$ , 可知电势不应当含  $n=0$  项 (单极项). 于是由(3)式, 得球内任一点的电势

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2\pi\epsilon_0 R_0^2 \left[ \int_{+1}^0 \varphi_0 \frac{\partial G}{\partial R'} dx' - \int_0^{-1} \varphi_0 \frac{\partial G}{\partial R'} dx' \right] \\ &= -4\pi\epsilon_0 R_0^2 \varphi_0 \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial R'} dx' \\ &= \varphi_0 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left( \frac{R}{R_0} \right)^n P_n(x) \int_0^1 P_n(x') dx' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n P_n(x) \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$a_n = (2n+1) \frac{\varphi_0}{R_0^n} \int_0^1 P_n(x') dx' \quad (8)$$

当  $n \neq 0$ , 由勒让德多项式的递推关系

$$\frac{d}{dx} [P_{n+1}(x') - P_{n-1}(x')] = (2n+1) P_n(x') \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_n(x') dx &= \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}(x') - P_{n-1}(x')]_0^1 \\ &= \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}(1) - P_{n+1}(0) - P_{n-1}(1) + P_{n-1}(0)] \end{aligned} \quad (10)$$

而

$$P_n(1) = 0, \quad \text{当 } n \text{ 为任意整数}; \quad P_n(0) = 0, \quad \text{当 } n \text{ 为奇数};$$

$$P_n(0) = (-1)^{n/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n}, \quad \text{当 } n \text{ 为偶数}.$$

于是(8)式中

$$\int_0^1 P_n(x') dx' = 0, \quad \text{当 } n \text{ 为偶数}$$

$$\int_0^1 P_n(x') dx' = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n+1)} \quad \text{当 } n \text{ 为奇数} \quad (11)$$

即有

$$a_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n+1)} \frac{\varphi_0}{R_0^n}, \quad n \text{ 仅为奇数} \quad (12)$$

将上式的  $n$  改写为  $2n+1$ , 因而对任意整数  $n$ , 有

$$a_{2n+1} = (-1)^n (4n+3) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{\varphi_0}{R_0^{2n+1}} \quad (13)$$

于是球内区域的电势为

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} R^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta) \quad (R < R_0) \quad (14)$$

在球外区域, 满足  $R \rightarrow \infty$  处,  $\varphi_2 \rightarrow 0$  的电势, 应当有形式

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n+1}}{R^{2n+2}} P_{2n+1}(\cos\theta) \quad (R > R_0) \quad (15)$$

再由  $R = R_0$  处,  $\varphi_1 = \varphi_2$ , 便得系数

$$b_{2n+1} = a_{2n+1} R_0^{4n+3} \quad (16)$$

(15)式中,  $n=0$  为偶极项电势,  $n=1$  为八极项电势.....用分离变量法亦可得到上述结果.