数学学报
ACTAMATHEMATICASINCA
1999年 第42卷 第1期 Vol.42 No.1 1999

Banach空间的Lipschitz对偶及其应用

彭济根 徐宗本

摘要 本文引进Banach空间E的一个全新对偶空间概念——Lipschitz对偶空间,并证明: 任何Banach空间的Lipschitz对偶空间是某个包含E的Banach空间的线性对偶空间.以所引进的新对偶空间为框架, 本文定义了非线性Lipschitz算子的Lipshitz对偶算子,证明:任何非线性Lipschitz算子的Lipschitz对偶算子是有界线性算子. 所获结果为推广线性算子理论到非线性情形(特别, 运用线性算子理论研究非线性算子的特性)开辟了一条新的途径. 作为例证,我们应用所建立的理论证明了若干新的非线性一致Lipschitz映象遍历收敛性定理.
关键词 非线性Lipschitz算子, Lipschitz对偶空间,Lipschitz对偶算子, 一致Lipschitz映象, 遍历收敛性
MR(1991)主题分类 47H05, 47H12
中图分类 O177, O175

A Novel Dual Notion of a Banach Space: Lipschitz DualSpace

Peng Jigen Xu Zongben
(Research Center for FundamentalScience, and Institute for Information and System Science,Xi'anJiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China)

Abstract A new dual space notion of a Banach space, namedLipschitz dual space, is introduced, and within the new introduced spaceframework, the concept of the Lipschitz dual operator of a nonlinearLipschitz operator is further defined. It is proved that the Lipschitzdual space of any Banach space E is an ordinary dual space of acertain Banach space containing E in the isometric embeding sense,and that the Lipschitz dual operator of any nonlinear Lipscitz operatorbecomes linear and bounded. By means of these findings, a lot ofimportant results in linear analysis and theorems on linear operatorsare generalized to nonlinear cases. Thereby, a completely new way togeneralize the linear operator theory to the nonlinear case isdeveloped. As examples, several new mean ergodic theorems of theuniformly Lipschitz operators are proved.
Keywords Nonlinear Lipschitz operator, Lipschitzdual space, Lipschitz dual operator, Uniformly Lipschitz mapping, Meanergodicity
MR(1991) Subject Classification 47H05, 47H12
Chinese Library Classification O177, O175

1 引言

非线性问题的研究已成为当代各学科研究的主流. 由于非线性问题从根本上可归结为由非线性算子所引导的算子方程, 因此, 有关非线性算子理论的研究近二十年来倍受关注.

迄今为止, 有关非线性算子理论的研究多集中于某些特定的类型, 如紧、单调、保序及某些具有凸性结构的算子等等. 在这些算子的研究日臻完善的同时, 人们逐渐认识到这些算子的局限性, 因而希望在更一般的意义下了解非线性算子的特性(如,收敛性、可逆性等等). 鉴于在非线性问题中Lipschitz条件是最为基本的,本文尝试对一般的非线性Lipschitz 算子类进行考察.

非线性Lipschitz算子在线性情形自然退化为有界线性算子. 因而, 人们自然希望、并一直试图通过各种途经将有界线性算子的诸多性质移植到这类非线性算子[1-4]. 譬如, 对于可微算子T,可以利用其导数T′

(x)的线性性质将线性算子的某些性质予以平移, 但正如大家所知, 诸如此类的移植相当有限. 因此, 对该类算子的研究寻找新的研究方法具有现实的重要意义. 本文的目的在于: 引入Banach空间的Lipschitz对偶空间, 并以此对偶空间为框架引入非线性Lipschitz算子的Lipschitz对偶算子, 以此为推广线性算子理论到非线性情形开辟一条新途径.

大家知道, Banach空间的对偶空间与线性算子的对偶算子是线性泛函分析中两个最为基本的概念. 对偶空间的引入不仅为原空间建立了一种新的拓扑结构, 特别地,也赋予了对偶空间本身的一种紧性(即弱*紧性); 而对偶算子的引入使得人们可以借助于这种紧性结构对原算子的诸多拓扑性质予以分析. 回顾其定义, Banach空间E的对偶E^*是指由定义在E上的有界线性泛函全体构成的Banach 空间, 对应于线性算子T, 其对偶T^*在每个有界线性泛函f下的象实质上是f与T的复合f · T. 在保持线性的同时, T^*也继承了T的诸多性质. 另外,所谓线性算子T (或泛函f)是有界的, 实质上是指T (或f)满足Lipschitz条件, 而其范数‖T‖(或‖f‖)就是差商$\frac{\|Tx-Ty\|}{\|x-y\|}$ (或 $\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|}$)的最小上界.

基于这样的观点, 本文不再局限于以有界线性泛函为元素的对偶空间(以下称之为线性对偶), 而试图以满足Lipschitz条件的函数全体为对象, 引进一类全新的对偶空间概念-----Lipschitz对偶空间. 利用这一新的空间框架, 对任何非线性Lipschitz算子, 我们引入相应的所谓Lipschitz对偶算子. 令人惊奇的是, 我们发现, 任何Banach空间E的Lipschitz对偶空间是某个包含E的Banach空间的线性对偶, 因而,Lipschitz对偶空间也具备一种紧性结构; 任何非线性Lipschitz算子T的Lipschitz对偶算子 T_L^*是一个有界线性算子. 因而, 其诸多性质可由有界线性算子 T_L^*体现出来.

作为例证, 我们将证明: 任何由Hilbert空间上的非线性Lipschitz算子所构成的Banach空间, 其单位球在某算子拓扑下是相对紧的(见推论4). 这一结论拓广了线性算子的著名结果[5]: ``Hilbert空间H上有界线性算子构成的Banach空间其单位球在弱算子拓扑下是相对紧的''. 另外, 我们将在一般Banach空间框架中讨论一致Lipschitz映象的平均收敛问题. 将揭示, 一致Lipschitz映象的平均收敛性与Lipschitz对偶算子的谱分布有重要联系.

2 Lipschitz对偶及其相关性质

本节首先引入Banach空间闭子集的Lipschitz对偶空间, 并刻划其拓扑性质. 然后以此对偶空间为框架, 定义非线性Lipschitz算子的Lipschitz对偶算子, 并给出其相关性质.

2.1 Lipschitz对偶空间

设E、X为Banach空间,E^*为E的对偶空间.C、D分别为E、X的闭子集(不一定有界).映射 $T:C\rightarrow D$称为Lipschitz算子, 如果存在常数L>0,使

$$\|Tx-Ty\|\le L\|x-y\|,\quad \forall x,y\in C. \tag{1}$$

对于每个Lipschitz算子T, 定义其最小Lipschitz常数为

$$L(T)=\sup_{x\neq y}\frac{\|Tx-Ty\|}{\|x-y\|}. \tag{2}$$

若记Lip(C,D)= {$T:C\rightarrow D$ | T为Lipschitz算子} ,则易验证L(·)为Lip(C, D)上的半范数. 明显地, 若T为E到X的有界线性算子,则T在C上的限制$T_C\in$Lip(C, X),且$L(T_C)\le$‖T‖(特别当C包含E的单位球时, $L(T_C)=$‖T‖). 进一步地, 我们有

引理1 设$0\in C$,$Lip_0(C,D)=\{T\in Lip(C,D)\mid T(0)=0\}$,则$L(\cdot)$为$Lip_0(C,D)$上的范数,且$(Lip_0(C,D),L(\cdot))$为Banach空间.

证明 易证$L(\cdot)$为$Lip_0(C,D)$上的范数.设$\{T_n\}\subset Lip_0(C,D)$为Cauchy列,则$\forall x\in C$,$\{T_nx\}\subset X$为Cauchy列.于是$\{T_nx\}$收敛,记其极限为$Tx$.因为D是闭集,所以$Tx\in D$.$\forall x,y\in C,x\neq y$,取n充分大,使$\|Tx-T_nx\|\leq\|x-y\|$,$\|Ty-T_ny\|\leq\|x-y\|$,则有

$$\|Tx-Ty\|\leq\|Tx-T_nx\|+\|Ty-T_ny\|+\|T_nx-T_ny\|\leq 2\|x-y\|+L(T_n)\|x-y\|$$

由于 $\{L(T_n)\}$ 有界, 所以$T\in Lip_0(C,X)$.从而$Lip_0(C,D)$在$L(\cdot)$下完备. 证毕.

以下恒设$0\in C$.

定义1 如果D为数域$\mathbb{K}$,则称Banach空间$Lip_0(C,D)$为C的Lipschitz对偶空间. 并简记为C_L^*.

引理2 $\forall x\in C,\ \|x\|=\sup_{f\in C_L^*,L(f)\leq 1}|f(x)|.$

以下我们通过考察Banach空间$Lip_0(C,D)$,刻划C的Lipschitz对偶空间的一系列重要性质.

设$x\in C,y\in X$,定义$j(x,y):Lip_0(C,X^*)\to\mathbb{K}$,$j(x,y)(T)=Tx,y$.易验证$j(x,y)$为$Lip_0(C,X^*)$上的有界线性泛函,即$j(x,y)\in(Lip_0(C,X^*))^*$,并且$\|j(x,y)\|\leq\|x\|\cdot\|y\|$. 下面的定理是重要而有趣的.

定理1 设G为$J=\{j(x,y)\in Lip_0(C,X^*))^*\mid x\in C,y\in X\}$的线性扩张的闭包,则$Lip_0(C,X^*)$等距同构于G的线性对偶空间$G^*$.

证明 设$G\subset Lip_0(C,X^*)^*$的零化子(annihilator [6,7])为$G^\perp$,则由 [7, Th.4.6.2] 知,G^*等距同构于商空间$\mathrm{Lip}_0(C,X^*)^{**}/G^\perp$.

设$A\in G^\perp$,则$\forall x\in C,y\in X$,$A(j(x,y))=0$.注意到$j(x,y)$关于y是线性的,且$\|j(x,y)\|\leq\|x\|\cdot\|y\|$,因此$\forall x\in C$与$A\in Lip_0(C,X^*)^{**}$,映射$y\to A(j(x,y))$定义了X上的有界线性泛函.记$y^*(x,A)(y)=A(j(x,y))$,由于$\forall x_1,x_2\in C$,

$$\begin{aligned}\|y^*(x_1,A)-y^*(x_2,A)\| &= \sup_{y\in X,\|y\|\leq 1}\left|(y^*(x_1,A)-y^*(x_2,A))(y)\right|\\ &= \sup_{y\in X,\|y\|\leq 1}|A(j(x_1,y))-A(j(x_2,y))|\\ &\leq \|A\|\sup_{y\in X,\|y\|\leq 1}\|j(x_1,y)-j(x_2,y)\|\\ &\leq \|A\|\sup_{y\in X,\|y\|\leq 1}\ \sup_{T\in \mathrm{Lip}_0(C,X^*),L(T)\leq 1}|j(x_1,y)(T)-j(x_2,y)(T)|\end{aligned}$$

$$= \|A\| \sup_{y\in X, \|y\|\le 1} \sup_{T\in \mathrm{Lip}_0(C,X^*), L(T)\le 1} |\langle Tx_1, y\rangle - \langle Tx_2, y\rangle|$$

$$\le \|A\|\cdot\|x_1 - x_2\| \tag{3}$$

因此,$\forall A\in \mathrm{Lip}_0(C,X^*)^{**}$,映射$x\to y^*(x,A)$定义了$\mathrm{Lip}_0(C,X^*)$中的一元.定义$\Gamma$:$\mathrm{Lip}_0(C, X^*)^{**} \to \mathrm{Lip}_0(C, X^*)$,$\Gamma(A) = y^*(\cdot, A)$,$\Gamma(A) = y^*(\cdot, A)$,则易知$\Gamma$为线性的.另外,$\forall A\in \mathrm{Lip}_0(C,X^*)^{**}$, 由(3)式

$$L(\Gamma(A)) = \sup_{x_1, x_2\in C, x_1\ne x_2} \frac{\|\Gamma(A)(x_1) - \Gamma(A)(x_2)\|}{\|x_1 - x_2\|}$$

$$= \sup_{x_1, x_2\in C, x_1\ne x_2} \frac{\|y^*(x_1, A) - y^*(x_2, A)\|}{\|x_1 - x_2\|} \le \|A\| \tag{4}$$

于是Γ为有界线性算子, 且$\|\Gamma\|\le 1$.

设$T\in \mathrm{Lip}_0(C,X^*)$,$\overline{T}$为$\mathrm{Lip}_0(C,X^*)$至$\mathrm{Lip}_0(C,X^*)^{**}$的嵌入映象下的象.则$\forall x\in C$, $y\in X$, $\langle \Gamma(\overline{T})(x), y\rangle = y^*(x,\overline{T})(y) = \overline{T}(j(x,.y)) = j(x,y)(T) = \langle Tx, y\rangle$.所以$\Gamma(\overline{T}) = T$.于是$\Gamma$是满射且$\|\Gamma\|\le 1$.

若$A \in G^\perp$,则$\forall x\in C, y\in X$, $\langle \Gamma(A)(x), y\rangle = A(j(x,y)) = 0$,即$\Gamma(A) = 0$.反之,若$A\in \mathrm{Lip}_0(C,X^*)^{**}$且$\Gamma(A) = 0$,则$\forall x\in C, y\in X$, $A(j(x,y)) = \langle \Gamma(A)(x), y\rangle = 0$.由于A有界,且$G = \overline{\mathrm{Span}} J$,所以$A \in G^\perp$.于是$G^\perp = \mathrm{Ker}(\Gamma)$($\Gamma$的核空间).

注意到Γ:$\mathrm{Lip}_0(C,X^*)^{**}\to \mathrm{Lip}_0(C,X^*)$为满射,$\|\Gamma\|=1$且$\Gamma$限制在$\mathrm{Lip}_0(C,X^*)$(嵌入到$\mathrm{Lip}_0(C,X^*)^{**}$)上为恒等算子,$\mathrm{Lip}_0(C,X^*)$等距同构于商空间$\mathrm{Lip}_0(C,X^*)^{**}/\mathrm{Ker}(\Gamma)$.由于$G^\perp = \mathrm{Ker}(\Gamma)$,所以$\mathrm{Lip}_0(C,X^*)$等距同构于$G^*$,证毕.

注1 回想,一个Banach空间Z称为对偶空间,如果存在Banach空间V,使$V^*=Z$.上述定理说明: 对任意Banach空间E、X,$C\subset E$为闭子集且$0\in C$,则$\mathrm{Lip}_0(C,X^*)$为对偶空间,特别,C的Lipschitz对偶空间C_L^*是对偶空间.另外,$\forall x\in C$,定义$j(x)$: $C_L^* \to \mathbb{K}$, $j(x)(f) = f(x)$ $(\forall f \in C_L^*)$,则由引理2知, $\|j(x) - j(y)\| = \|x - y\|$, 即C等距嵌入于Banach空间$G = \overline{\mathrm{Span}}\{j(x) : x \in C\}$. 因而由定理1知

推论1 C_L^*是包含C的Banach空间G的线性对偶, 即$C_L^* = G^*$.

另外, 由于每个度量空间M都可以等距嵌入于某个Banach空间的子集,且将M中的定点m映成零元[8].于是,若记$\mathrm{Lip}_m(M,X^*)=\{T:M\to X^* \mid T$为Lipschitz连续,且$T(m)=m\}$,则$\mathrm{Lip}_m(M,X^*)$为对偶空间.特别当X为数域K(复数或实数域)时,$\mathrm{Lip}_m(M,K)$为对偶空间,这是文[8]通过讨论所谓的分子空间(space of molecules)而得到的结论.

注2 若C、X皆可分,则易见J={j(x,y)｜x∈C,y∈X}可分,从而$G=\overline{\mathrm{Span}}\,J$可分.于是由［9］知,$\mathrm{Lip}_0(C,X^*)$ $(=G^*)$中的有界序列是相对弱*列紧的(即,若$\{T_n\}\subset \mathrm{Lip}_0(C,X^*)$为有界列,则存在子列$\{T_{n_k}\}$弱*收敛).

反之,若C或X不可分,则G不可分,因而$\mathrm{Lip}_0(E,X^*)$不一定弱*序列完备.有关弱*序列完备空间的讨论可参见［9］.进一步我们有

推论2 设$\{T_\sigma\}\subset \mathrm{Lip}_0(C,X^*)$为有界网,$T\in \mathrm{Lip}_0(C,X^*)$,则$\{T_\sigma\}$弱*收敛于T的充分必要条件是,$\forall x\in C$,序列$\{T_\sigma x\}(\subset X^*)$弱*收敛于Tx.

证明 设$\{T_\sigma\}$弱*收敛于T,则由定理1知,$\forall x\in C,y\in X$, $\langle T_\sigma,j(x,y)\rangle\to\langle T,j(x,y)\rangle$,即$\langle T_\sigma x,y\rangle\to\langle Tx,y\rangle$.反之,设$\forall x\in C$, $\{T_\sigma x\}$弱*收敛于Tx.设$\{T_\sigma\}$的界为L,即$L(T_\sigma)\le L$. $\forall f\in G$, $\varepsilon>0$,取$x_i\in C,y_i\in X$, $\alpha_i\in\mathbb{C}\ (i=1,2,\cdots,l)$, $g=\sum_{i=1}^l\alpha_i j(x_i,y_i)$使$\|f-g\|\le\frac{\varepsilon}{2L}$.由于

$$\begin{aligned}\limsup_\sigma|\langle T_\sigma-T,f\rangle| &\le \limsup_\sigma[|\langle T_\sigma-T,g\rangle|+|\langle T_\sigma-T,f-g\rangle|]\\ &\le \limsup_\sigma\left(\left|\sum_{i=1}^l\alpha_i\langle T_\sigma x_i-Tx_i,y_i\rangle\right|+\varepsilon\right)=\varepsilon\end{aligned}$$

由ε的任意性知, $\langle T_\sigma-T,f\rangle\to 0$.证毕.

推论3 设E、X皆为可分Banach空间,$\{T_n\}$为E到X^*的有界线性算子列,且$\|T_n\|\le M$(常数),则存在$\{T_n\}$的子列$\{T_{n_k}\}$与E到X^*的有界线性算子T,使$\forall x\in C,y\in X$, $\langle T_{n_k}x,y\rangle\to\langle Tx,y\rangle\ (k\to\infty)$.即$\{T_{n_k}\}\subset X^*$弱*收敛于Tx.

证明 注意到$\{T_n\}\subset \mathrm{Lip}_0(E,X^*)$有界,且E、X可分,故由定理1的注2知,$\{T_n\}$为相对弱*紧集.于是存在子列$\{T_{n_k}\}$、$T\in \mathrm{Lip}_0(E,X^*)$,使$\{T_{n_k}\}$弱*收敛于T.从而,由推论2,$\forall x\in E,y\in X$, $\langle T_{n_k}(x),y\rangle\to\langle Tx,y\rangle\ (k\to\infty)$.-另外,由$T_n$的线性性易知T为线性的. 证毕.

注3 由定理1和Alaoglu定理［5-7］知,Lipschitz算子空间$_0(E,X^*)$中的任何有界弱*闭集皆弱*紧. 另外由推论2知,$_0(E,X^*)$中的弱*拓扑是以一切形如$S\in \mathrm{Lip}_0(E,X^*)$:|(S-T)x, y |< (T∈ $_0(E,X^*)$, x∈E, y∈X,>0)的集合为子基而形成的拓扑. 因而, 特别当X=E=H为Hilbert空间时,我们有

推论4 非线性Lipschitz算子空间$_0(H,H)$的单位球是弱*紧的.特别, 有界线性算子空间B(H)的单位球按弱算子拓扑［5,6］是紧的.

明显地, 这一结论将有关线性算子的著名结论［5,{第282页］直接推广到了非线性算子.

2.2 Lipschitz对偶算子

设C为Banach空间E的闭子集(不假定有界), 0∈C.

定义2 设T: C→C 为Lipschitz算子,T(0)=0, 则$\forall f\in C^*_L$, 复合映象$f\circ T\in C^*_L$. 若定义$T^*_L:C^*_L\to C^*_L$,$T^*_L f=f\circ T$,

则称T^*_L为T的Lipschitz对偶算子.

定理2 设$T\in Lip_0(C,C)$, 则T^*_L为C^*_L上的有界线性算子,且$\|T^*_L\|=L(T)$.

证明 易证 T^*_L为线性的. $\forall f\in C^*_L$,由定义

$$L(T_L^*f)=\sup_{x\neq y}\frac{|T_L^*f(x)-T_L^*(f)|}{\|x-y\|}=\sup_{x\neq y}\frac{|f(Tx)-f(Ty)|}{\|x-y\|}$$
$$\leq\sup_{x\neq y}\frac{L(f)\cdot\|Tx-Ty\|}{\|x-y\|}=L(f)\cdot L(T)$$

即得$\|T^*_L\|\leq L(T)$.反之,$\forall f\in E^*$,记f_c为f在C上的限制,则

$$L(T)=\sup_{x\neq y}\frac{\|Tx-Ty\|}{\|x-y\|}=\sup_{x\neq y}\sup_{f\in E^*,\|f\|\leq 1}\frac{|f(Tx-Ty)|}{\|x-y\|}$$
$$=\sup_{x\neq y}\sup_{f\in E^*,L(f_c)\leq 1}\frac{\left|(T_L^*f_c)(x)-(T_L^*f_c)(y)\right|}{\|x-y\|}$$
$$\leq\sup_{x\neq y}\sup_{f\in C_L^*,L(f)\leq 1}\frac{\left|(T_L^*f)(x)-(T_L^*f)(y)\right|}{\|x-y\|}$$
$$\leq\sup_{x\neq y}\sup_{f\in C_L^*,L(f)\leq 1}\frac{\left\|T_L^*f\right\|\cdot\|x-y\|}{\|x-y\|}$$
$$=\sup_{f\in C_L^*,L(f)\leq 1}\left\|T_L^*f\right\|=\left\|T_L^*\right\|. \qquad (5)$$

于是,$\|T^*_L\|=L(T)$.证毕.

下述定理陈述了Lipschitz对偶算子的部分重要性质.

定理3 设$0\in C$, 则下列命题成立:

(1)如果$T, S\in Lip_0(C,C)$,则$(S\circ T)^*_L=T^*_L\circ S^*_L$.

(2)如果T为E上的有界线性算子, T^*为T的线性对偶算子, 则$T\in Lip_0(E,E)$且$T^*=T^*_L|_{E^*}$(表示在E^*上的限制).

(3)如果I为C上的恒等算子, 则I^*_L为$_0(C,C)$上的恒等算子.

(4)如果$S, T\in Lip_0(C,,C)$, $E^*_C=f_C\in C^*_L|f_C$为$f\in E^*$在C上的限制. 若$S^*_L|_{E^*_C}=T^*_L|_{E^*_C}$,则S=T.

(5)如果$T\in Lip_0(C,C)$可逆(即T单一且$T^{-1}\in Lip_0(C,C)$),则T^*_L可逆, 且其逆$T^*_L{}^{-1}=(T^{-1})^*_L$.

证明 命题(1)--(3)由定义易得. 仅证(4)、(5). $\forall f\in E^*$,记f_C为f在C上的限制,由条件知$S^*{}_L f_C=T^*{}_L f_C$,即$\forall x\in C$, $f_C(Tx)=f_C(Sx)$, 因而f(Tx)=f (Sx),由$f\in E^*$与$x\in C$的任意性知,S=T, 即命题(4)成立. 另外,由引理4, $I^*{}_L=(T\cdot T^{-1})^*{}_L=T^*{}_L\circ(T^{-1})^*{}_L$,所以$T^*{}_L$可逆,且$T^*{}_L{}^{-1}=(T^{-1})^*{}_L$.证毕.

注4 设$0\neq\alpha\in\mathbb{K}$, $S,T\in Lip_0(C,C)$.则一般地,$(T)^*{}_L\ T^*{}_L$, $(S+T)^*{}_L\neq S^*{}_L+T^*{}_L$.特别地,$(\alpha I)^*_L=\alpha I^*_L\Leftrightarrow\alpha=1$.因此, 映射Π: $_0$(C,C)B$C^*{}_L$→($C^*{}_L$上的有界线性算子全体), $\Pi T=T^*{}_L$是非线性的.尽管如此, 由定理2知Π是保范连续映射,并由定理3知,$S^*{}_L$与$T^*{}_L$的关系完全可以限制在E^*上进行考察. 因此, 有理由预期非线性算子$T\in lip_0(C,C)$的诸多拓朴性质可在线性算子$T^*{}_L$上体现出来, 这正是我们引入Lipschitz对偶的出发点之一.

3 应用举例: 一致Lipschitz映象的平均遍历收敛性

本节以研究非线性映象的平均遍历性为例, 说明本文所引进的Lipschitz对偶在应用上的重要性. 本节以下设C为Banach空间E中含0的闭凸子集,$T\in Lip(C,C)$. 另外, 若T的不动点集非空, 则以下常假设0为T的不动点.

先回顾几个概念: T称为非扩张映象, 是指$L(T)\leq 1$; T称为渐近非扩张映象, 是指$L(T^n)\to 1$ $(n\to\infty)$; T称为一致Lipschitz映象, 是指存在常数M>0, 使$L(T^n)\leq M$ $(\forall n\in N)$.

关于非线性映象遍历收敛性的第一个结论是由Baillon首先得到的: 如果C为Hilbert空间的闭凸子集, T为非扩张映象且存在不动点, 则$\forall x\in C$, $S_nx=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T^ix$弱收敛于T的不动点.

之后, 有关非线性映象遍历性质的研究受到普遍关注[10-15]. 如今, Baillon定理已由Hilbert空间推广到了具有Frechet可微范数的一致凸Banach空间, 特别在近几年, 已进一步地由非扩张映象推广到了渐近非扩张映象[11, 12]. 不过, 这些工作都集中于弱平均收敛性. 关于强平均收敛的最早结果出现在文[14]中, 之后进一步的结果微乎其微. 仅在近期, Shimizu与Takahashi[11]在Hilbert空间中证明了Browder[16]意义下的一种强收敛定理.

本节将以非线性Lipschitz算子的Lipschitz对偶为工具, 在一般Banach空间中讨论一致Lipschitz映象(特别地, 非扩张映象)的平均遍历收敛性. 下记$S_nx=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T^ix\ (\forall x\in C)$.

引理3 设E^*可分, $0\in C$, $T\in Lip_0(C,C)$为一致Lipschitz映象, 则存在$\{S_n\}$的子列$\{S_{n_k}\}$与$T_0\in Lip_0(C, E^{**})$,使$\forall x\in C$, $x^*\in E^*$, $\langle S_{n_k}x,x^*\rangle\to\langle T_0x,x^*\rangle\ (k\to\infty)$.其中$L(T_0)\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}L(T^n)$.且$\forall x\in C$, $T_0(Tx)=T_0x$.

证明 因为T为一致Lipschitz映象, 所以$\{S_n\}\subset Lip_0(C,C)$嵌入到$Lip_0(C,E^{**})$为有界序列. 由于$E^*$是可分的, 故E是可分的. 于是由定理1及推论2知, 存在子列$\{S_{n_k}\}$与$T_0\in Lip_0(C,E^{**})$,使$\forall x\in C$, $x^*\in E^*$, $\langle S_{n_k}x,x^*\rangle\to\langle T_0x,x^*\rangle\ (k\to\infty)$. 另外,$\forall x\in C$,$x^*\in E^*$,有

$$\begin{aligned}\langle T_0(Tx), x^*\rangle &= \lim_{k\to\infty}\langle S_{n_k}(Tx), x^*\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty}\langle S_{n_k}x, x^*\rangle + \lim_{k\to\infty}\langle S_{n_k}(Tx) - S_{n_k}x, x^*\rangle \\ &= \langle T_0x, x^*\rangle + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\langle T^{n_k-1}x - x, x^*\rangle = \langle T_0x, x^*\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

于是,$T_0(Tx)=T_0x$.另外易知,$L(T_0) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} L(T^n)$.证毕.

定理4 设E^*可分, $T\in Lip_0(C,C)$为一致Lipschitz映象.记$\sigma_p T^*_L$为Lipschitz对偶算子T^*_L的特征谱集.若$1\notin \sigma_p(T^*_L)$, 则$\forall x\in C$, $\{S_nx\}$弱收敛于T的不动点的充要条件是: $\forall x\in C$, $\{S_nx\}$为相对弱紧集.

证明 仅证充分性. 任取$\{S_n\}$的子列$\{S_{n_k}\}$, 由引理3知,存在$\{S_{n_k}\}$的子列(仍记为$\{S_{n_k}\}$)与$T_0\in Lip_0(C,E^{**})$, 使$\forall x\in C$, $\{S_{n_k}\}x\subset E^{**}$弱*收敛于$T_0x$. 由于$\{S_{n_k}x\}\subset C$是相对弱紧的,且C是闭凸集, 所以$T_0x\in C$,且$\{S_{n_k}x\}$弱收敛于$T_0x$. 因为$T_0\circ T=T_0$,所以$T^*_L(T_0)^*_L=(T_0)^*_L$, 即$\forall f\in C^*_L$,$(T^*_L-I)(T_0)^*_Lf=0$. 由于$1\notin \sigma_pT^*_L$,所以$(T_0)^*_Lf=0$, 即$(T_0)^*_L=0$. 于是,$\{S_n\}\subset Lip_0(C,C)$只有唯一的聚点$T_0=0$. 证毕.

注5 由谱半径公式与定理2可计算T^*_L的谱半径$r(T^*_L) = \inf\|(T^*_L)^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf(L(T^n))^{\frac{1}{n}}$.即$T^*_L$的谱半径等于T的Lipschitz数Lip(T) [3]. 易知, 一致Lipschitz映象T的Lipschitz数(T)$\le$1, 因而T^*_L的谱半径$rT^*_L\le 1$. 显然, 若(T)<1, 则定理4的结论成立.

注意到, 有关非线性映象平均收敛性的已有研究均限于特殊Banach空间(如Hilbert空间、 具有Frechet可微范数的一致凸Banach空间等)及非扩张(或渐近非扩张)映象. 上述定理4在一般Banach空间框架下对一致Lipschitz映象的遍历收敛性的讨论是一种全新的尝试, 特别其结果在非常一般的框架下刻画了算子T平均遍历收敛的充要条件.

引理4 设E^*可分, A是E^*上的有界线性算子, $||A||\le 1$,且核空间Ker (I-A)$\ne\{0\}$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} A^i$,则存在$S_n$的子列$\{S_{n_k}\}$、 E^*到Ker(I-A)上的投影算子P,使AP=PA, $||P||=1$, 且$\forall x\in E^*$, $y\in E$,

$$\langle S_{n_k}x, y\rangle \to \langle Px, y\rangle \ (k\to\infty).$$

证明 由推论2知, 存在子列$\{S_{n_k}\}$与有界线性算子P,使$\forall x\in E^*$, $y\in E$, $\langle S_{n_k}x,y\rangle\to\langle Px,y\rangle(k\to\infty)$. 易知, AP=PA且$||P||\le 1$. 由于$\forall n,m\in\mathbb{N}$

$$S_mS_n=\frac{1}{m\cdot n}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}A^{i+j}=\frac{1}{m\cdot n}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i}^{n+i-1}A^j$$
$$=\frac{1}{m\cdot n}\sum_{i=1}^{m-1}\left[\sum_{j=1}^{n-1}A^j+(A^{n-1}-I)\sum_{j=1}^{i}A^i\right]$$
$$=S_n+\frac{1}{m\cdot n}(A^{n-1}-I)\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{i}A^j. \tag{7}$$

所以,$\forall x\in E^*$, $y\in E$,由(7)式

$$\langle P^2,y\rangle=\lim_{k\to\infty}\langle S_{n_k}(Px),y\rangle$$
$$=\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\left\langle S_{n_l}x+\frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k-1}\frac{1}{n_l}(A^{n_l-1}-I)\sum_{j=1}^{i}A^jx,y\right\rangle$$
$$=\langle Px,y\rangle. \tag{8}$$

另外,易知$x\in \mathrm{Ker}(I-A)$时,$Px=x$.于是P为投影算子.证毕.

若E^*满足条件(P): 其任何闭子集M上的范数为1的投影唯一. 则易验证, 在引理7中, $\langle S_n(x),y\rangle\to\langle P(x),y\rangle$ $(n\to\infty)$ (已知可分的Hilbert空间满足条件(P), 但易验明l^1 $(=c_0^*)$不满足条件(P). 我们猜测条件(P)与E^*的范数可微性有关).

下面讨论非扩张映象的强遍历性质.

设$T\in \mathrm{Lip}_0(C,C)$为非扩张映象, E_C^*为E^*在C上的限制, 于是,$E_C^*\subset C^*_L$. 下记$W=\overline{\mathrm{Span}}^{\|\cdot\|}\{(T_L^*)^i(E_C^*):i=0,1,2,\cdots\}$.回顾, 一个定义在$V\subset E^*$上的数值函数f称为弱*连续的, 是指当$x_n,x\in V, x_n\overset{W^*}{\to}x$时$f(x_n)\to f(x)$. $P:C\subset E\to D\subset C$称为C到D的投影,是指$\forall x\in D$, $P(x)=x$且$P^2=P$.

定理5 设E为可分的具有Frechet可微范数的一致凸Banach空间, $C\subseteq E$为闭凸子集,$T:C\to C$非扩张,$T(0)=0$. 如果 $W\subset C^*_L$为弱*闭的,则$\{S_n\}$强收敛于非扩张映象$T_0\in \mathrm{Lip}_0(C,C)$ (即$\forall x\in C, S_n(x)\to T_0(x)$).并且$T_0$为C到不动点集Fix(T)的投影.

证明 因为E可分且自反, 所以由引理3知, 存在$\{S_n\}$的子列$\{S_{n_k}\}$与$T_0\in \mathrm{Lip}_0(C,E)$,使$\forall x\in C$, $x^*\in E^*$,$\langle S_{n_k}x,x^*\rangle\to\langle T_0x,x^*\rangle$,并且$L(T_0)\leq 1$, $T_0\circ T=T_0$.另外,由［10］知,$\forall x\in C$, 作为$\{S_nx\}$的弱极限,T_0x是T的不动点,即$T(T_0x)=T_0x$.

设T^*_L为T的Lipschitz对偶算子, 则$T^*_L(W)\subset W$. 于是T^*_L为W上的有界线性算子. 由E^*的可分性易知W是可分的. 记$S_n^L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(T_L^*)^i$, 则$\{S^L_n\}$是从W到$C^*_L$ (因为$W\subset C^*_L$)的有界线性算子序列.注意到$C^*_L=G^*$, 且W、G可分,故由推论3知,存在子列$\{S^L_{n_k}\}$(与S_{n_k}的标号一致)、从W到C^*_L的有界线性算子P, $\|P\|\leq 1$,

使$\forall$f∈W,g∈G, $\langle S^L_{n_k}(f), g\rangle \to \langle P(f), g\rangle\ (k\to\infty)$.因为,$\forall$x∈C, $x^*\in E^*$,当g= j(x)∈G,f=x^*_c (表示x^*在C上的限制)时,$\langle (T^*_L)^i(x^*_c), j(x)\rangle = x^*_c(T^i(x))$.所以

$$\langle S^L_{n_k}(x^*_C), j(x)\rangle = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k-1}\langle (T^*_L)^i(x^*_C), j(x)\rangle = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k-1} x^i(T^i x)$$
$$= \langle S_{n_k}x, x^*\rangle \to (P(x^*_C))(x)\quad (k\to\infty).$$

于是,$\forall$x∈C, $x^*\in E^*$, $\langle T_0 x, x^*\rangle=(P(x^*_C))(x)$.因为$\forall$m∈N, $L(S_nT^m - S_n)\to 0\ (n\to\infty)$, 且$T_0T= TT_0$,因此,易验证:$\forall$f∈W, x∈C, $f(T_0(x)) = Pf(x)$.

设B为C^*_L的单位球, B_1=B∩W. 由假设, B_1是弱*紧的.在B_1中赋予弱*拓扑, 则B_1为紧Hausdorlf空间. 记C(B_1)为定义在B_1上的弱*连续函数全体, 并赋予上确界范数.$\forall$x∈C, f∈C(B_1), 定义$F_x(f)=f(x)$. 设网$\{f_\sigma\}\subset B_1$, f∈B_1, $f_\sigma \xrightarrow{W^*} f$,则由推论2知,f(x)→f(x),即$F_x(f_)\ F_x(f)$.于是,$\forall$x∈C, $F_x\in C(B_1)$且$\|F_x\|=\sup_{f\in B_1}|F_x(f)|\le\|x\|$.

因为T是非扩张的, 所以$T^*_L(B_1)\subseteq B_1$. 任取F∈C(B_1),定义$\overline{T}$ (F)=F∘T^*_L.设网$\{f_\sigma\}\subset B_1$, f∈B_1, $f_\sigma \xrightarrow{W^*} f$,则由推论2知,$\forall$x∈C, $f_(x)\ f(x)$,特别f_σ(Tx)→f(Tx),即$(T^*_L(f_\sigma))(x)\to (T^*_L(f))(x)$,于是由推论2知$T^*_L$ (f_σ)弱*收敛于T^*_L(f).由于F∈C(B_1),故$F(T^*_Lf_\sigma)\to F(T^*_Lf)$.从而$\overline{T}(F)\in C(B_1)$, $\overline{T}$为C(B_1)到C(B_1)的映射,另外易验证$\overline{T}$ 为线性的,且$\|\overline{T}(f)\| = \sup_{f\in B_1} L(F(T^*_Lf) \le \sup_{f\in B_1} L(F(f)) = \|F\|$.即$\overline{T}$ 为C(B_1)上的有界线性算子 ,且$\|\overline{T}\|\le 1$.

记$\overline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\overline{T}^i$.取定x∈C.因为,$\forall$f∈$B_1$,$\overline{S}_nF_x(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\overline{T}^iF_x(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(T^*_L)^if(x) = \langle S^L_nf, j(x)\rangle$.所以$\overline{S}_{n_k}F_x(f)\to Pf(x) = f(T_0x)\ (k\to\infty)$.定义$F_{x,0}$: $B_1\to B_1$, $F_{x,0}(f)=f(T_0x)$($\forall$f∈B_1),则易知$F_{x,0}\in C(B_1)$.于是,在C(B_1)上$\overline{S}_{n_k}F_x$点点收敛于$F_{x,0}$.从而,由［9, Theorem 1,第66页］知,$\{\overline{S}_{n_k}F_x\}_{k\in N}$ C(B_1)弱收敛于$F_{x,0}$.注意到$\overline{T}$ 为C(B_1)上的有界线性算子,且$\|\overline{T}\|\le 1$.故由线性算子的遍历收敛定理［17, Theorem 1.3］知,$\{\overline{S}_nF_x\}_{n\in N}\subset C(B_1)$按范数收敛于$F_{x,0}$,
即$\sup_{f\in B_1}|\overline{S}_nF_x(f) - F_{x,0}(f)|\to 0\ (n\to\infty)$.因而

$$\begin{aligned}\|S_nx - T_0x\| &= \sup_{x^*\in E^*,\|x^*\|\le 1}\left|\langle S_nx, x^*\rangle - \langle T_0x, x^*\rangle\right| \\ &= \sup_{x^*\in E^*,\|x^*\|\le 1}\left|\overline{S}_{n_k}F_x(x^*_C) - F_{x,0}(x^*_C)\right| \\ &\le \sup_{f\in B_1}\left|\overline{S}_nF_x(f) - F_{x,0}(f)\right|\to 0.\end{aligned}$$

因为$\forall$x∈C, $T_0x\in$ Fix (T),即$T(T_0x) =T_0x$.于是$T^2_0(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(T_0x) =T_0x$.从而$T_0x$为C到Fix (T)的投影.证毕.

注6 若C=E, 且T是E上的有界线性算子, 则$W=E^*$, 于是$W\subset E^*_L$为弱*闭的. 从而定理5结论成立. 由此知, 定理5将有界线性算子的遍历收敛定理[17]推广到了非线性非扩张映象情形 (对于W的弱*闭性, 可参照文[6, 第9章] 关于弱*闭集的讨论而获得有益的条件).

另外可证, 若C是紧的(或T是紧的), 则定理5的强收敛结论对一般Banach空间上的一致Lipschitz映象成立.

4 研究展望

如何将线性分析中的丰富内容移植到非线性分析中?这是众目关注的问题, 本文引入Lipschitz对偶的方法是这方面的一个全新尝试. 显然, 本文所讨论的只是这种方法的一个大体框架, 而有关Lipschitz对偶空间及Lipschitz对偶算子的更深入的研究有待进一步展开. 例如, 我们可进一步研究:

(1) Lipschitz对偶空间的空间特性(如凸性、正规性、自反性、可分性, 甚至弱*拓扑的可度量性等等). 特别地可研究n维欧氏空间中闭子集的Lipschitz对偶空间结构特性.

(2) Lipschitz对偶算子特性, 特别是非线性算子T与其Lipscitz对偶T^*_L在诸如紧性、可逆性、稳定性等方面的依赖关系(如, T^*_L的可逆性是否蕴含T的可逆性?).

(3) Lipschitz对偶算子T^*_L性质的定量化. 比如, 如何计算或估计T^*_L的诸如谱界、数值域、数值半径等等定量化指标?

(4)如何利用Lipschitz对偶算子T^*_L的线性特征将非线性算子T的相关特性定量化. 特别地, 我们观察到: 由注5知, T^*_L的谱半径等于T的Lipschitz数,因而由[3]知, T^*_L的谱半径的大小完全决定了非线性离散系统:x(n+1)=Tx(n)的稳定性. 那么T^*_L的谱界能否决定连续系统: ddtx(t)=Tx(t)的稳定性? 等等.

西安交通大学科学研究基金与西安交通大学博士学位论文基金资助
作者单位：西安交通大学理科研究中心及信息与系统科学研究所 西安 710049

参考文献

1.1pt1 Soderlind G. Bounds on nonlinear operators in finite dimensionalBanach spaces. Numer Math, 1986, 50(1): 27--44
2. Pourciau B H. Analysis and optimization of Lipschitz continuousmappings. J Optim Theory and Appl, 1977, 22(3): 311--351
3.徐宗本, 王利生. 非线性Lipschitz连续算子的定量性质(I)-----Lip数.应用数学学报, 1996, 19(2): 175--184
4. 彭济根, 徐宗本. 关于非线性Lipschitz算子的Soderlind猜想. 数学学报, 1997, 40(5): 701--708
5. Conway J B. A course in functional analysis. New York:Springer-Verlag, 1985
6. Rudin W. Functional analysis(1st edt). New York: John Wiley &Sons, 1974
7. Larsen R. Functional analysis. New York: Marcel Dekker Inc,1973
8. Arens R F, Eells J J. On embedding uniform and topologicalspaces. Pacific J Math, 1956, 6:397--403
9. Diestel J. Seqences and series in Banach spaces. New York:Springer-Verlag, 1984
10. Hirano N. A proof of the mean ergodic theorem for nonexpansivemappings in Banach spaces. Proc Amer Math Soc, 1980, 78(3): 361--365
11.游兆永, 徐洪坤. 渐近非扩张型映象的遍历收敛性定理. 数学年刊,1990, 11A(4): 519--523
12. Tan K K, Xu H K. The nonlinear ergodic theorem forasymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces. Proc Amer MathSoc, 1992, 114(2): 399--404
13. Reich S. Weak convergence theorems for nonexpansive mappings inBanach spaces. J Math Anal Appl, 1979, 67

(2): 274--276
14. Reich S. Almost convergence and nonliear ergodic theorems. JAppro Theory, 1978, 24(2): 269--272
15. Shimizu T, Takahashi W. Strong convergence theorem forasymptotica lly nonexpansive mappings. Nonliear Analysis, 1996, 26(2):265--272
16. Browder F F. Convergence of approximants to fixed points ofnonex pansive nonlinear mappings in Banach space. Archs Ration MechAnalysis, 1967, 24(1): 82--90
17. Petersen K. Ergodic theory. London: Cambridge University Press,1983

收稿日期:1997-12-09,接受日期:1998-06-12

Banach空间的Lipschitz对偶及其应用

作者： 彭济根， 徐宗本， Peng Jigen， Xu Zongben
作者单位： 西安交通大学理科研究中心及信息与系统科学研究所,西安,710049
刊名： 数学学报 ISTIC PKU
英文刊名： ACTA MATHEMATICA SINCA
年，卷(期)： 1999，42(1)

参考文献(17条)

1. Soderlind G Bounds on nonlinear operators in finite dimensionalBanach spaces 1986(01)

2. Pourciau B H Analysis and optimization of Lipschitz continuousmappings 1977(03)

3. 徐宗本.王利生 非线性Lipschitz连续算子的定量性质(I)：Lip数 1996(02)

4. 彭济根.徐宗本 关于非线性Lipschitz算子的Soderlind猜想 1997(05)

5. Conway J B A course in functional analysis 1985

6. Rudin W Functional analysis 1974

7. Larsen R Functional analysis 1973

8. Arens R F.Eells J J On embedding uniform and topologicalspaces 1956

9. Diestel J Seqences and series in Banach spaces 1984

10. Hirano N A proof of the mean ergodic theorem for nonexpansivemappings in Banach spaces 1980(03)

11. 游兆永.徐洪坤 渐近非扩张型映象的遍历收敛性定理 1990(04)

12. Tan K K.Xu H K The nonlinear ergodic theorem forasymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces 1992(02)

13. Reich S Weak convergence theorems for nonexpansive mappings inBanach spaces 1979(02)

14. Reich S Almost convergence and nonliear ergodic theorems 1978(02)

15. Shimizu T.Takahashi W Strong convergence theorem forasymptotica lly nonexpansive mappings 1996(02)

16. Browder F F Convergence of approximants to fixed points ofnonex pansive nonlinear mappings in Banach space 1967(01)

17. Petersen K Ergodic theory 1983

相似文献(3条)

引证文献(5条)

5.何光 一类Lipschitz算子方程的解及其应用[期刊论文]-内江师范学院学报 2009(12)