高校应用数学学报
2008, 23(2): 167-173

Cohen-Grossberg神经网络指数稳定性的新判则

万安华[1]， 王绵森[2]， 彭济根[2]

(1. 中山大学 数学与计算科学学院, 广东广州 510275; 2. 西安交通大学 理学院, 陕西西安 710049)

摘　要: 避免构造Lyapunov函数的困难, 运用广义Dahlquist数方法研究了Cohen-Grossberg神经网络模型的指数稳定性, 不但得到了Cohen-Grossberg神经网络平衡点存在惟一性和指数稳定性的全新充分条件, 而且给出了神经网络的指数衰减估计. 与已有文献结果相比, 所得的神经网络指数稳定的充分条件更为宽松, 给出的解的指数衰减速度估计也更为精确.

关键词: Cohen-Grossberg神经网络; 指数稳定性; 指数衰减估计; 广义Dahlquist数
中图分类号: O175.13
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2008)02-0167-07

§1 引　言

Cohen-Grossberg神经网络模型由下面的非线性常微分方程组描述[1,2]

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-a_i(u_i(t))\left[b_i(u_i(t))-\sum_{j=1}^{n}w_{ij}f_j(u_j(t))+J_i\right],\quad i=1,2,\cdots,n,\tag{1}$$

其中$u_i(t)$表示第i个神经元在时刻t的状态, n表示网络中神经元的个数, a_i表示放大函数, b_i表示自信号函数, $W=(w_{ij})_{n\times n}$表示联接权值矩阵, f_j表示激活函数, J_i 表示常数外部输入.

模型(1)包括了种群生物学、神经生物学和进化理论等学科中的许多模型, 如Volterra-Lotka模型、Gilpin-Ayala模型、Eigen-Schuster模型和Hartline-Ratliff模型等. 特别地, 著名的Hopfield神经网络模型也是其特例[3], 其由下面的常微分方程组所描述

$$C_i\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_i(t)}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}w_{ij}f_j(u_j(t))+J_i,\quad i=1,2,\cdots,n.\tag{2}$$

其中常数$C_i>0$和$R_i>0$分别表示电容和电阻.

Cohen-Grossberg神经网络的稳定性分析具有重要的理论意义和应用价值[1,2,4-6]. 但从目前的情况来看, Cohen-Grossberg神经网络的稳定性研究远不及Hopfield神经网络的稳定性研究深入. 其主要原因在于, (1)中的函数a_i,b_i与f_i 的非线性性都极大地增加了模型稳定性分析的难度. 已有的研究工作一般都是在对函数a_i,b_i与f_i某些很强的假设(如可微性、有界性及单调性)下开展的[2,4-6]. 下面给出本文的假设条件:

收稿日期: 2005-04-13
基金项目: 2007年度中山大学理工科青年教师科研启动基金(2007-34000-3171915)

(H_1) 每个a_i是局部Lipschitz连续的, 且$0 < \grave{\alpha}_i \le a_i(s) \le \acute{\alpha}_i$, $\forall s \in \mathbf{R}$.

(H_2) 每个b_i是局部Lipschitz连续的, 且存在常数$\lambda_i > 0$ 使得$(s_1 - s_2)\left[b_i(s_1) - b_i(s_2)\right] \ge \lambda_i(s_1 - s_2)^2$, $\forall s_1, s_2 \in \mathbf{R}$.

(H_3) 每个f_i满足Lipschitz条件(即存在常数$m_i > 0$使得$|f_i(s_1) - f_i(s_2)| \le m_i|s_1 - s_2|$, $\forall s_1, s_2 \in \mathbf{R}$). 不妨将$m_i$取为$f_i$的最小Lipschitz常数,即$m_i = \sup\limits_{s_1, s_2 \in \mathbf{R}, s_1 \ne s_2} \frac{|f_i(s_1) - f_i(s_2)|}{|s_1 - s_2|}$.

在最近的研究中, [4-5]在(H_1)-(H_3)假设下另外假设每个f_i的全局有界性, 再利用Lyapunov直接法给出了系统(1)的全局指数稳定性条件; 文[6]则另外假设了每个f_i的单调递增性, 利用Lyapunov直接法也得到了系统(1)的全局指数稳定性条件. 对某些重要的应用来说, 采用非单调的激活函数可以显著地改变神经网络系统的一些性能[7]. 本文对f_i不作有界性假设, 也不作单调性和可微性假设. 此外, 不像大多数已有文献都对$W = (w_{ij})_{n \times n}$作对称性假设, 本文对$W$不作任何假设.

目前, 神经网络的稳定性研究工作大多数是基于Lyapunov直接法的[2-6]. 然而, 由于没有一般通用的Lyapunov函数构造方法, 所以对于一个特定的系统要找到一个有效的Lyapunov函数通常说来比较困难. 本文将利用非线性系统的广义Dahlquist数稳定性分析方法[8], 深入研究Cohen-Grossberg神经网络模型(1)平衡点的存在性、惟一性和稳定性. 本文不但推导出模型(1)指数稳定的全新判别准则, 而且给出解的指数收敛速度的精确估计.

§2 预备知识及引理

本节简要回顾一般非线性系统的广义Dahlquist数稳定性分析方法.

设$(X, \|\cdot\|)$是一个Banach空间, Ω是X的一个开子集. 考虑下面的系统

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = F(x(t)),\ t \ge t_0\ , \tag{3}$$

其中$x(t) \in \Omega$, F是一个从Ω到X的非线性算子.

为研究非线性Lipschitz算子半群的渐近性态, 文[9]对一般非线性算子引入了如下概念.

定义2.1[9] 设Ω是Banach空间X的一个开子集,$F: \Omega \to X$是一个非线性算子,I表示恒同算子. 常数

$$\alpha_\Omega(F) = \sup_{x, y \in \Omega, x \ne y} \frac{1}{\|x - y\|} \lim_{r \to +\infty} [\|(F + rI)x - (F + rI)y\| - r\|x - y\|]$$

称为算子F在Ω上的广义Dahlquist数.

受上面定义的启发,我们在文[8]中对一般非线性算子进一步引入了下面的概念.

定义2.2[8] 对Ω, F, I的假设与定义2.1中同. 设x^0是Ω中任意固定的一点. 常数

$$\alpha_\Omega(F, x^0) = \sup_{x \in \Omega, x \ne x^0} \frac{1}{\|x - x^0\|} \lim_{r \to +\infty} \left[\|(F + rI)x - (F + rI)x^0\| - r\|x - x^0\|\right]$$

称为算子F在x^0的广义相对Dahlquist数.

文[8]推导出了广义(相对)Dahlquist数的一系列性质:

引理2.1[8] 若$\alpha_\Omega(F) < 0$, 则F在Ω上是一一映射; 若$\Omega = X$, 则F是一个同胚.

引理2.2[8] 设$x^* \in \Omega$是系统(3)的一个平衡点,且$\Gamma \subset \Omega$是x^*的一个邻域. 若$\alpha_\Gamma(F, x^*) < 0$, 则$x^*$是(3)在$\Gamma$中惟一的平衡点, x^*是指数稳定的, 其吸引域包含Γ,且(3)的任意以$x(t_0) \in \Gamma$为初始点的解$x(t)$的指数衰减估计满足$\|x(t) - x^*\| \le \mathrm{e}^{\alpha_\Gamma(F, x^*)(t - t_0)}\|x(t_0) - x^*\|$, $\forall t \ge t_0$.

§3 Cohen-Grossberg神经网络的指数稳定性

设$\mathbf{R}^n$表示n维实向量空间, 其中向量范数为l^1-范数$\|\cdot\|_1$, 即对任意的$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$, $\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^n |x_i|$. 另外, $\mathrm{sign}(r)$表示$r\in\mathbf{R}$的符号函数.

本节首先运用广义Dahlquist数方法来研究神经网络模型(1)平衡点的存在惟一性.

定理3.1 设(H_1)-(H_3)成立. 若

$$m_i\sum_{j=1}^n |w_{ji}| < \lambda_i, \quad i=1,2,\cdots,n, \tag{4}$$

则对任何一组常数外部输入J_i,神经网络模型(1)有惟一的平衡点u^*.

证 首先定义算子$F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$为$F(u)=\big(F_1(u),F_2(u),\cdots,F_n(u)\big)^{\mathrm{T}}$, $\forall u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$, 其中$F_i(u)=-\big[b_i(u_i)-\sum\limits_{j=1}^n w_{ij}f_j(u_j)+J_i\big]$. 显然,$u^*\in\mathbf{R}^n$是(1)的平衡点当且仅当$F_i(u^*)=0$, $i=1,2,\cdots,n$. 因此,(1)有惟一的平衡点u^*当且仅当$F(u)=0$有惟一解u^*.

由定义2.1,

$$\alpha_{\mathbf{R}^n}(F)=\sup_{x,y\in\mathbf{R}^n,x\neq y}\frac{1}{\|x-y\|_1}\lim_{r\to+\infty}\big[\|(F+rI)x-(F+rI)y\|_1-r\|x-y\|_1\big].$$

其中,

$$\begin{aligned}&\|(F+rI)x-(F+rI)y\|_1-r\|x-y\|_1\\ =\ &\sum_{i=1}^n\Big\{\Big|-\Big[b_i(x_i)-b_i(y_i)-\sum_{j=1}^n w_{ij}\big(f_j(x_j)-f_j(y_j)\big)\Big]+r(x_i-y_i)\Big|-r|x_i-y_i|\Big\}.\end{aligned}$$

当$x_i\neq y_i$时,对于充分大的$r>0$,有

$$\begin{aligned}&\Big|-\Big[b_i(x_i)-b_i(y_i)-\sum_{j=1}^n w_{ij}\big(f_j(x_j)-f_j(y_j)\big)\Big]+r(x_i-y_i)\Big|-r|x_i-y_i|\\ =\ &-\mathrm{sign}(x_i-y_i)\Big[b_i(x_i)-b_i(y_i)-\sum_{j=1}^n w_{ij}\big(f_j(x_j)-f_j(y_j)\big)\Big]\\ \leq\ &-|b_i(x_i)-b_i(y_i)|+\Big|\sum_{j=1}^n w_{ij}[f_j(x_j)-f_j(y_j)]\Big|.\end{aligned}$$

当$x_i=y_i$时,有

$$\begin{aligned}&\Big|-\Big[b_i(x_i)-b_i(y_i)-\sum_{j=1}^n w_{ij}\big(f_j(x_j)-f_j(y_j)\big)\Big]+r(x_i-y_i)\Big|-r|x_i-y_i|\\ =\ &-|b_i(x_i)-b_i(y_i)|+\Big|\sum_{j=1}^n w_{ij}[f_j(x_j)-f_j(y_j)]\Big|.\end{aligned}$$

于是,对任意的$x,y\in\mathbf{R}^n$,当$r>0$充分大时,有

$$\begin{aligned}&\|(F+rI)x-(F+rI)y\|_1-r\|x-y\|_1\leq-\sum_{i=1}^n\lambda_i|x_i-y_i|+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|w_{ij}||f_j(x_j)-f_j(y_j)|\\ \leq\ &-\sum_{i=1}^n\lambda_i|x_i-y_i|+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_j|w_{ij}||x_j-y_j|=-\sum_{i=1}^n\Big(\lambda_i-m_i\sum_{j=1}^n|w_{ji}|\Big)|x_i-y_i|\\ \leq\ &-\min_{1\leq i\leq n}\Big(\lambda_i-m_i\sum_{j=1}^n|w_{ji}|\Big)\|x-y\|_1.\end{aligned}$$

因此, $\alpha_{\mathbf{R}^n}(F)\leq-\min\limits_{1\leq i\leq n}\big(\lambda_i-m_i\sum\limits_{j=1}^n|w_{ji}|\big)<0$, 由引理2.1可知$F$是一个从$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^n$的同胚,因此$F(u)=0$有且仅有一个解$u^*$, 故而系统(1)有且仅有一个平衡点$u^*$.

注3.1 在每个f_i是有界的额外假设下,文[4]和[5]分别证明了(1)平衡点的存在性; 在每

个f_i是单调递增的及其它额外假设下,文[6]证明了(1)平衡点的存在惟一性. 上面的定理3.1在对f_i不作有界性和单调性假设的前提下, 给出了神经网络平衡点存在惟一性的简单判则.

下面采用广义相对Dahlquist数方法来研究Cohen-Grossberg神经网络模型(1)的稳定性.

定理3.2 设(H_1)-(H_3)成立. 若

$$m_i\acute{\alpha}_i\sum_{j=1}^{n}|w_{ji}|<\grave{\alpha}_i\lambda_i,\quad i=1,2,\cdots,n,\tag{5}$$

则对任何一组常数外部输入J_i, 神经网络模型(1)有惟一的平衡点u^*, u^*是全局指数稳定的, 且任意以$u(t_0)$为初始点的解$u(t)$的指数衰减满足

$$\|u(t)-u^*\|_1\le c\mathrm{e}^{-b(t-t_0)}\|u(t_0)-u^*\|_1,\quad t\ge t_0,\tag{6}$$

其中$c=\max\limits_{1\le i\le n}\acute{\alpha}_i/\min\limits_{1\le i\le n}\acute{\alpha}_i$, $b=\min\limits_{1\le i\le n}\big(\grave{\alpha}_i\lambda_i-m_i\acute{\alpha}_i\sum\limits_{j=1}^{n}|w_{ji}|\big)$.

证 显然(5)蕴涵(4)成立, 因此由定理3.1立即推出(1)有惟一的平衡点u^*.

令$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$,其中$x_i(t)=u_i(t)-u_i^*$, $i=1,2,\cdots,n$. 于是,我们得到

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=-a_i\big(x_i(t)+u_i^*\big)\Big\{b_i(x_i(t)+u_i^*)-b_i(u_i^*)-\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\big[f_j\big(x_j(t)+u_j^*\big)-f_j(u_j^*)\big]\Big\},\quad i=1,2,\cdots,n.\tag{7}$$

定义算子$G:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$为$G(x)=\big(G_1(x),G_2(x),\cdots,G_n(x)\big)^{\mathrm{T}}$, $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$, 其中$G_i(x)=-a_i\big(x_i+u_i^*\big)\big\{b_i(x_i+u_i^*)-b_i(u_i^*)-\sum\limits_{j=1}^{n}w_{ij}\big[f_j\big(x_j+u_j^*\big)-f_j(u_j^*)\big]\big\}$. 则系统(7)可表示为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=G(x(t)),\quad t\ge t_0.\tag{8}$$

显然, 0是系统(8)惟一的平衡点. 令矩阵$P=\mathrm{diag}(\acute{\alpha}_1,\acute{\alpha}_2,\cdots,\acute{\alpha}_n)$. 考虑下面的系统

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=P^{-1}GP(y(t)),\quad t\ge t_0.\tag{9}$$

易见, 0也是系统(9)惟一的平衡点. 我们有

$$\alpha_{\mathbf{R}^n}(P^{-1}GP,0)=\sup_{y\in\mathbf{R}^n,y\ne0}\frac{1}{\|y\|_1}\lim_{r\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\big[\big|(P^{-1}GP)_i(y)+ry_i\big|-r|y_i|\big].$$

当$y_i\ne0$时,对充分大的$r>0$,有

$$\begin{aligned}&\big|(P^{-1}GP)_i(y)+ry_i\big|-r|y_i|\\=\;&(P^{-1}GP)_i(y)\mathrm{sign}(y_i)\\=\;&-\frac{1}{\acute{\alpha}_i}a_i(\acute{\alpha}_iy_i+u_i^*)\big\{b_i(\acute{\alpha}_iy_i+u_i^*)-b_i(u_i^*)-\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\big[f_j(\acute{\alpha}_jy_j+u_j^*)-f_j(u_j^*)\big]\big\}\mathrm{sign}(y_i)\\\le\;&-\grave{\alpha}_i\lambda_i|y_i|+\frac{1}{\acute{\alpha}_i}a_i(\acute{\alpha}_iy_i+u_i^*)\Big|\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\big[f_j(\acute{\alpha}_jy_j+u_j^*)-f_j(u_j^*)\big]\Big|.\end{aligned}$$

当$y_i=0$时,有

$$\big|(P^{-1}GP)_i(y)+ry_i\big|-r|y_i|=-\grave{\alpha}_i\lambda_i|y_i|+\frac{1}{\acute{\alpha}_i}a_i(\acute{\alpha}_iy_i+u_i^*)\Big|\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\big[f_j(\acute{\alpha}_jy_j+u_j^*)-f_j(u_j^*)\big]\Big|.$$

因此,对任意的$y\in\mathbf{R}^n$,当$r>0$充分大时,有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left[\left|(P^{-1}GP)_i(y)+ry_i\right|-r|y_i|\right] &\le -\sum_{i=1}^{n}\grave{\alpha}_i\lambda_i|y_i|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|w_{ij}|\left|f_j(\acute{\alpha}_jy_j+u_j^*)-f_j(u_j^*)\right|\\ &\le -\sum_{i=1}^{n}\grave{\alpha}_i\lambda_i|y_i|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_j\acute{\alpha}_j|w_{ij}||y_j|\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\left(\grave{\alpha}_i\lambda_i-m_i\acute{\alpha}_i\sum_{j=1}^{n}|w_{ji}|\right)|y_i|\\ &\le -\min_{1\le i\le n}\left(\grave{\alpha}_i\lambda_i-m_i\acute{\alpha}_i\sum_{j=1}^{n}|w_{ji}|\right)\|y\|_1.\end{aligned}$$

由此可得$\alpha_{\mathbf{R}^n}(P^{-1}GP,0)\le -b<0$. 由引理2.2,立即推出系统(9)的零平衡点是全局指数稳定的,且以$y(t_0)$为初始点的任意解$y(t)$的指数衰减估计满足

$$\|y(t)\|_1\le \mathrm{e}^{-b(t-t_0)}\|y(t_0)\|_1,\quad t\ge t_0. \tag{10}$$

显然,当$x(t)$是系统(8)的解时, $y(t)=P^{-1}x(t)$是系统(9)的惟一解. 于是,由(10)可得

$$\|P^{-1}x(t)\|_1\le \mathrm{e}^{-b(t-t_0)}\|P^{-1}x(t_0)\|_1,\quad t\ge t_0. \tag{11}$$

将$x_i(t)=u_i(t)-u_i^*$, $i=1,2,\cdots,n$代入(11)中,即得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\acute{\alpha}_i}|u_i(t)-u_i^*|\le \mathrm{e}^{-b(t-t_0)}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\acute{\alpha}_i}|u_i(t_0)-u_i^*|,\quad t\ge t_0. \tag{12}$$

因此,

$$\|u(t)-u^*\|_1/\max_{1\le i\le n}\acute{\alpha}_i\le \mathrm{e}^{-b(t-t_0)}\|u(t_0)-u^*\|_1/\min_{1\le i\le n}\acute{\alpha}_i,\quad t\ge t_0,$$

即指数衰减估计式(6)成立.

推论3.1 对于Hopfield神经网络模型(2),若(H_3)成立,且

$$m_i\sum_{j=1}^{n}|w_{ji}|<\frac{1}{R_i},\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{13}$$

则对任何一组常数外部输入J_i, 模型(2)有惟一的平衡点u^*, u^*是全局指数稳定的, 且任意以$u(t_0)$为初始点的解$u(t)$的指数衰减满足

$$\|u(t)-u^*\|_1\le c_2\mathrm{e}^{-b_2(t-t_0)}\|u(t_0)-u^*\|_1,\quad t\ge t_0, \tag{14}$$

其中$c_2=\max\limits_{1\le i\le n}C_i/\min\limits_{1\le i\le n}C_i$, $b_2=\min\limits_{1\le i\le n}C_i^{-1}(R_i^{-1}-m_i\sum\limits_{j=1}^{n}|w_{ji}|)$.

证 模型(2)即模型(1)在$a_i(u_i(t))=1/C_i$, $b_i(u_i(t))=u_i(t)/R_i$, $i=1,2,\cdots,n$时的特例. 易验证$(H_1),(H_2)$满足, 其中$\grave{\alpha}_i=\acute{\alpha}_i=1/C_i$, $\lambda_i=1/R_i$. 由定理3.2, 立即可推得上面的结论.

§4 数值算例与仿真

本节将给出一个例子来说明§3中所得结果的有效性以及与已有文献结果的比较情况.

例4.1 考虑下面的二维Cohen-Grossberg神经网络模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}=-(3+\sin u_1(t))\left[2u_1(t)-f_1(u_1(t))/4-f_2(u_2(t))/8+J_1\right]\\ \dfrac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}=-(2+\cos u_2(t))\left[2u_2(t)-f_1(u_1(t))/16-f_2(u_2(t))/7+J_2\right],\end{cases} \tag{15}$$

其中函数f_1, f_2满足条件(H_3)且$m_1=1$, $m_2=2$.

1) 易验证条件$(H_1),(H_2)$都满足, 且$\acute{\alpha}_1=4$, $\grave{\alpha}_1=2$, $\acute{\alpha}_2=3$, $\grave{\alpha}_2=1$, $\lambda_1=\lambda_2=2$. 由于$m_1\acute{\alpha}_1(|w_{11}|+|w_{21}|)=\frac{5}{4}<\grave{\alpha}_1\lambda_1=4$, $m_2\acute{\alpha}_2(|w_{12}|+|w_{22}|)=\frac{45}{28}<\grave{\alpha}_2\lambda_2=2$, 故条件(6)满足.

于是,由定理3.2,可推出对于任何一组常数外部输入J_1, J_2,系统(15)有惟一的平衡点u^*, u^*是全局指数稳定的,且(15)的任意解$u(t)$的指数衰减满足(6)式,其中$c=\frac{4}{3}$, $b=\frac{11}{28}$.

2) 取$f_1(x)=-x$, $f_2(x)=-2x$. 由于f_1, f_2在$\mathbf{R}$上既不是有界函数, 也不是单调递增函数, 所以[4-6]的方法无法使用. 然而, 定理3.2的条件都满足, 故1)中得到的指数稳定性结果仍然成立. 下面我们利用Matlab软件进行仿真. 不妨取$(J_1, J_2)^{\mathrm{T}}=(-1,1)^{\mathrm{T}}$. 为比较, 我们考虑两种情形: 情形一(见图1), 初始状态取为$(u_1(0), u_2(0))^{\mathrm{T}}=(0.6,-0.3)^{\mathrm{T}}$; 情形二(见图2), 初始状态取为$(u_1(0), u_2(0))^{\mathrm{T}}=(-0.6,0.3)^{\mathrm{T}}$. 仿真结果表明, 系统(15)惟一的平衡点$u^*=(0.4946,-0.4510)^{\mathrm{T}}$是全局指数稳定的.

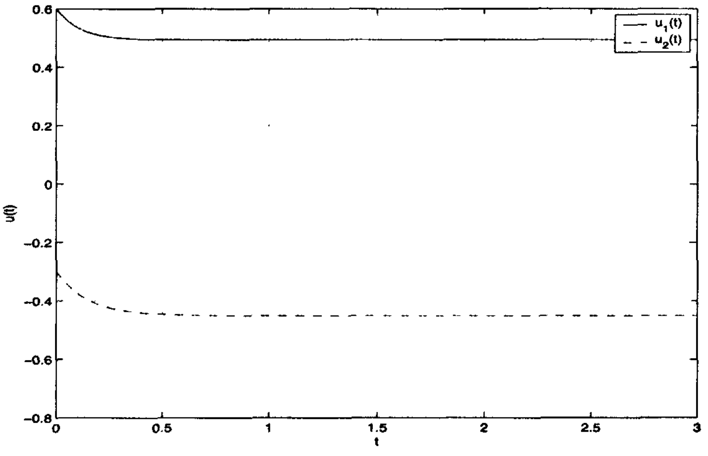

图1 初始状态为$(u_1(0), u_2(0))^{\mathrm{T}}=(0.6,-0.3)^{\mathrm{T}}$的情形

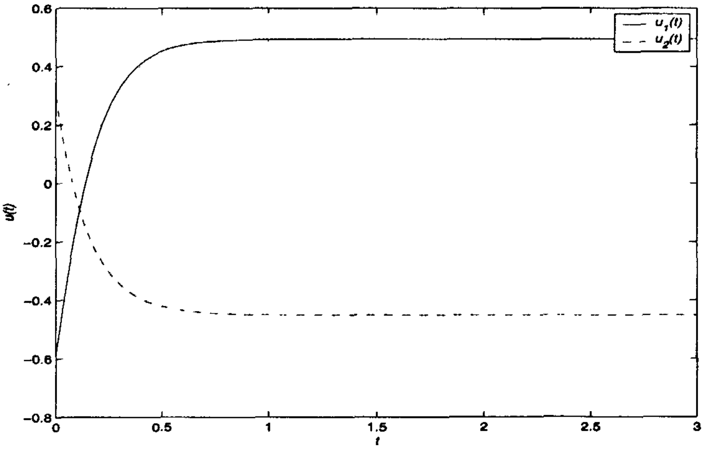

图2 初始状态为$(u_1(0), u_2(0))^{\mathrm{T}}=(-0.6,0.3)^{\mathrm{T}}$的情形

§5　结束语

本文避免了构造Lyapunov函数, 采用非线性系统的广义Dahlquist数稳定性分析方法, 由此给出了Cohen-Grossberg神经网络平衡点的存在惟一性与指数稳定性的全新判别准则. 与已有文献结果相比, 本文得到的结果放宽了神经网络模型指数稳定的充分条件, 对激活函数去掉了有界

性及单调性假设, 对联接权值矩阵也无须作任何假设,而且给出了更为精确的指数衰减速度估计, 从而具有更加广泛的应用范围.

参考文献:

[1] Cohen M A, Grossberg S. Absolute stability and global pattern formation and partial memory storage by competitive neural networks[J]. IEEE Trans Syst Man Cy, 1983, SMC-13: 815–821.

[2] Grossberg S. Nonlinear neural networks: principles, mechanisms, and architechtures[J]. Neural Networks, 1988, 1: 17–61.

[3] Tank D W, Hopfield J J. Simple "neural" optimization networks: an A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit[J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1986, 33(5): 533–541.

[4] Wang Lin, Zou Xingfu. Exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks[J]. Neural Networks, 2002, 15: 415–422.

[5] Liao Xiaofeng, Li Chunguang, Wong Kwok-wo. Criteria for exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks[J]. Neural Networks, 2004, 17: 1401–1414.

[6] Lu Wenlian, Chen Tianping. New conditions on global stability of Cohen-Grossberg neural networks[J]. Neural Computation, 2003, 15: 1173–1189.

[7] Morita M. Associative memory with non-monotone dynamics[J]. Neural Networks, 1993, 6(1): 115–126.

[8] Wan Anhua, Peng Jigen, Wang Miansen, et al. Generalized relative Dahlquist constant with application in stability analysis of nonlinear systems[J]. 应用数学, 2005, 18(2): 328–334.

[9] 彭济根, 徐宗本. 非线性Lipschitz算子半群的渐近性质及其应用[J]. 数学学报, 2002, 45(6): 1099–1106.

New criteria for exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks

WAN An-hua[1], WANG Mian-sen[2], PENG Ji-gen[2]

(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen Univ., Guangzhou 510275, China;
2. Faculty of Science, Xi'an Jiaotong Univ., Xi'an 710049, China)

Abstract: Avoiding the difficulty of constructing a proper Lyapunov function, the generalized Dahlquist constant approach is employed to investigate the exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks model. New sufficient conditions for the existence of an unique equilibrium and the exponential stability of the neural networks are presented, and the exponential decay estimate of the solution is proposed. Compared with the existing results, the new criteria provide more precise exponential convergence rate estimate under milder conditions.

Keywords: Cohen-Grossberg neural network; exponential stability; exponential decay estimate; generalized Dahlquist constant

MR Subject Classification: 34A34; 34D23

Cohen-Grossberg神经网络指数稳定性的新判则

作者：　万安华，　王绵森，　彭济根，　WAN An-hua，　WANG Mian-sen，　PENG Ji-gen
作者单位：　万安华,WAN An-hua(中山大学,数学与计算科学学院,广东广州,510275)，　王绵森,彭济根,WANG Mian-sen,PENG Ji-gen(西安交通大学,理学院,陕西西安,710049)
刊名：　高校应用数学学报A辑 ISTIC PKU
英文刊名：　APPLIED MATHEMATICS A JOURNAL OF CHINESE UNIVERSITIES
年，卷(期)：　2008，23(2)

参考文献(9条)

1. Cohen M A. Grossberg S Absolute stability and global pattern formation and partial memory storage by competitive neural networks 1983

2. Grossberg S Nonlinear neural networks:principles,mechanisms,and architechtures 1988

3. Tank D W. Hopfield J J Simple "neural" optimization networks:an A/D converter,signal decision circuit,and a linear programming circuit 1986(05)

4. Wang Lin. Zou Xingfu Exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks 2002

5. Liao Xiaofeng. Li Chunguang. Wong Kwok-wo Criteria for exponential stability of Cohen Grossberg neural networks 2004

6. Lu Wenlian. Chen Tianping New conditions on global stability of Cohen-Grossberg neural networks 2003

7. Morita M Associative memory with non-monotone dynamics 1993(01)

8. Wan Anhua. Peng Jigen. Wang Miansen Generalized relative Dahlquist constant with application in stability analysis of nonlinear systems[期刊论文]-应用数学 2005(02)

9. 彭济根. 徐宗本 非线性Lipschitz算子半群的渐近性质及其应用[期刊论文]-数学学报 2002(06)

相似文献(10条)

5.学位论文 祝庆 变时滞Cohen-Grossberg神经网络的稳定性分析 2008

本文通过应用Lyapunov方法和矩阵不等式对Cohen-Grossberg神经网络作了定性分析，包括具有脉冲时滞Cohen-Grossberg神经网络平衡点的存在性及其全局指数稳定性和变时滞Cohen-Grossberg神经网络的全局鲁棒指数稳定性。

本文的主要工作如下：

第一、在没有要求激活函数有界的前提条件下，分别运用了同胚映射理论和不动点定理给出了脉冲时滞Cohen-Grossberg神经网络模型平衡点的存在唯一性的充分条件。

第二、在平衡点存在唯一性的基础上，通过构造合适的Lyapunov函数结合积分不等式，给出了脉冲时滞Cohen-Grossberg神经网络平衡点全局指数稳定性的充分条件。通过比较，说明了本文得到的结果改进和概括了文献中的结论。给出了具体例子，描述了所得结果的有效性。

第三、分析了变时滞Cohen-Grossberg神经网络的全局鲁棒指数稳定性。通过应用同胚映射理论以及构造合适的Lyapunov函数得到了一个变时滞Cohen-Grossberg神经网络平衡点的存在唯一性及其全局鲁棒指数稳定性的判定准则。给出了所得结论的几个推论，结合实际例子说明了本文得到的结果概括了文献中的结果。

6.期刊论文 龙述君.LONG Shu-jun 具有分布时滞的脉冲Cohen-Grossberg神经网络的指数稳定性 -四川师范大学学报（自然科学版）2009,32(1)

利用非负矩阵的谱半径和M-矩阵的性质,以及不等式分析技巧研究了具有分布时滞和脉冲的Cohen-Grossberg神经网络,得到了其平衡点存在性和指数稳定性的充分判据,结果去掉了放大器函数αi(s)(i=1,2,…,n)的上界限制,从而推广了一些文献的结果.

7.学位论文 孟益民 几类时滞神经网络模型的动力学分析 2007

本文对几类具有时滞的神经网络模型的动力学性态进行了定性研究，讨论了这些神经网络模型周期解和平衡点的存在性、惟一性和全局稳定性。全文的内容共分为六章：

在第一章中，首先回顾了神经网络发展的历史及其研究现状，并分析了用泛函微分方程来刻画神经网络模型的依据。然后，对本文所要研究的几类具有时滞的神经网络模型的应用背景与动力学性态的研究现状进行说明。另外，在这一章里我们还给出了本文将要用到的一些基本定义和基本引理。

在第二章中，通过利用Halanay不等式，重合度理论中的延拓定理和一些分析技巧，我们获得了具变时滞Cohen-Grossberg神经网络周期解存在、惟一和全局指数稳定的充分条件，改进和推广了已有文献的一些相关结论。

在第三章中，研究了具连续分布时滞的Cohen-Grossberg神经网络的收敛性。在放松已有文献所要求的条件下，没有假定激励函数可微和单调，也不要求放大函数可微以及连接矩阵对称，通过构造适当的Lyapunov函数，并且利用不等式技巧获得了平衡点的存在性、惟一性、全局渐近稳定性、全局指数收敛性和全局指数稳定性的新结论．所利用的假设条件与系统参数有关，并且容易验证。

在第四章中，研究了具分布时滞的双向联想记忆(BAM)神经网络的动力学性质。不需要激励函数有界性和可微性，利用重合度理论的延拓定理和Kr瓣nosel'skii的锥不动点定理，我们获得了具分布时滞BAM神经网络模型周期解的存在性和全局指数稳定性的新结论．数值模拟的结果与我们的理论相一致。

在第五章中，研究具有不连续激励函数的时滞Cohen-Grossberg神经网络的动力学性质。利用M-矩阵理论和Lyapunov泛函方法，得到了平衡点存在性，惟一性和全局稳定性的充分条件．由于激励函数的不连续性，我们还引进了一种适当的极限来讨论输出的收敛性．所获得的条件与时滞无关且是容易验证的，并进行了应用举例和数值模拟。

在第六章中，研究了具时滞和周期系数的Cohen-Grossberg神经网络的稳定性。网络中的激励函数是一个可以具有跳跃间断点的单调不减函数，用来刻画神经元放大器的增益很高和趋向于无穷大的理想情形．在假设连结矩阵满足适当的条件下，获得了周期解存在、惟一和全局指数稳定的充分条件，且与时滞无关．所利用的假设条件与M-矩阵理论有关，容易验证．此外，由于激励函数的不连续性，通过引进一种适当的极限来研究时滞神经网络输出的收敛性．我们的结论推广了相关文献的结果，并给出了实例说明和数值模拟。

8.期刊论文 李源铭.蒋海军.LI Yuan-ming.JIANG Hai-jun 带时滞的高阶Cohen-Grossberg神经网络的指数稳定性 -新疆大学学报（自然科学版）2008,25(1)

就一类高阶时滞Cohen-Grossberg社昆网络进行研究,假设反应函数满足Lipschitz连续且有界,用非线性测度的方法得到了关于平衡点的存在性和惟一性的一种新的充分性的判别条件,同时,通过构造一个合适的Lyapunov函数,得到这个条件也保证了时滞神经网络的全局指数稳定性.

9.学位论文 刘青 时滞Cohen-Grossberg神经网络的局部稳定性及其吸引域问题 2009

在人工神经网络的实现过程中，由于信号传输的速度有限，时滞通常是不可避免的.因此，在定性分析这些网络时，考虑时间延迟的影响是非常重要的，这也引起了国内外学者的广泛关注。

最常见的Cohen-Grossberg神经网络模型在并行处理、联想记忆，特别是最优化计算等方面都有相当广泛的应用研究.很多文献都介绍了时滞Cohen-Grossberg神经网络模型的全局渐近稳定或指数稳定问题，并给出了保证全局渐近稳定或指数稳定的充分条件，而对于局部稳定性问题则很少有人涉足，在此情况下，本论文尝试对具常时滞Cohen-Grossberg神经网络和具分布时滞Cohen-Grossberg神经网络的平衡点的局部稳定性进行探讨，得到了其平衡点达到局部稳定和局部指数稳定的充分条件，并判断出其达到局部指数稳定时的吸引域范围.通过对二者结果的对比分析，归纳出一个重要结论，即在假设的条件满足的情况下，具常时滞Cohen-Grossberg神经网络模型的平衡点局部稳定的充分条件同样适用于具分布时滞Cohen-Grossberg神经网络模型。本文主要由4部分组成。

第1章，绪论。主要包括人工神经网络发展史、课题背景和本文主要研究内容的简要介绍及一些基本定义和引理。

第2章，讨论了具常时滞Cohen-Grossberg神经网络模型在两类范数定义下的局部稳定性和局部指数稳定性。通过构造Lyapunov函数以及应用一些不等式技巧等，得到了模型的平衡点达到局部稳定的一些充分条件，这些条件独立于时滞，

第3章，讨论了具分布时滞Cohen-Grossberg神经网络模型在两类范数定义下的局部稳定性和局部指数稳定性，得到了模型的平衡点达到局部稳定的一些充分条件。这些条件不仅独立于时滞，并与常时滞Cohen-Grossberg神经网络模型的局部稳定性条件相同，这是本文得到的一个重要结论。

第4章，结论部分。对全文进行了简要总结，并提出今后的研究方向。

10.学位论文 刘艳青 时滞神经网络模型的稳定性研究 2005

本文主要对几类时滞神经网络模型的平衡点和周期解的存在性及其全局指数稳定性进行了深入地研究,得出了一些新的结论.这些结论将为设计具有全局指数稳定的平衡点和周期解的神经网络提供理论依据.本文的主要工作如下:

第一、运用拓扑度理论、Holder不等式、M-矩阵的性质以及构造合适的Lyapunov函数方法,对具有常时滞和变时滞的模糊细胞神经网络模型的平衡点的存在性及其全局指数稳定性进行了研究,给出了平衡点存在性和全局指数稳定性的充分性判据,并给出了与时滞的变化有关的指数收敛率的估计.

第二、通过构造合适的Lyapunov函数并运用代数不等式及改进了的Lyapunov定理对具有变连接权及变时滞的细胞神经网络的平衡点的存在性和全局渐近稳定性和全局指数稳定性给出了充分性判据.

第三、运用积分不等式、M-矩阵的性质,以及建立在重合度基础上的Mawhin's Continuation定理研究了具有周期系数和周期时滞的细胞神经网络模型的周期解的存在性.利用常数变易法、积分不等式、Gronwall's引理研究了其周期解的指数稳定性,给出新的充分性判据,并给出了指数收敛率的估计.

第四、研究了带有周期系数和周期时滞的双向联想记忆神经网络模型的周期解的存在性和全局指数稳定性,给出了新的充分性判据.该判据不仅与系统的系数有关还与系统的周期和衰减率的平均值有关.

第五、运用不等式分析及构造合适的Lyapunov函数等方法对具有变时滞的Cohen-Grossberg神经网络模型的平衡点的存在性和全局指数稳定性进行了研究,给出了充分性判据,并给出了指数收敛率的估计.