第47卷第4期
2004年7月

数 学 学 报
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol.47, No.4
July, 2004

文章编号: 0583-1431(2004)04-0723-08　　文献标识码: A

非线性 Lipschitz 算子半群的表示

彭济根

(西安交通大学应用数学研究中心及信息与系统科学研究所 西安 710049)
(E-mail: jgpeng@mail.xjtu.edu.cn)

摘 要 本文通过引入若干 Lipschitz 对偶概念, 将非线性 Lipschitz 算子半群对偶映射到 Lipschitz 对偶空间中, 使其转化为线性算子半群. 该线性算子半群被证明是一个 C_0^*- 半群, 因而是某个 C_0- 半群的对偶半群. 从而证明了, 在等距意义下, 一个非线性 Lipschitz 算子半群可以延拓为一个 C_0- 半群. 基于这些结论, 本文给出了一系列全新的非线性 Lipschitz 算子半群的表示公式.

关键词 Lipschitz 算子; 非线性 Lipschitz 算子半群; Lipschitz 对偶半群
MR(2000) 主题分类 47H06, 47D05, 34G20
中图分类 O177, O175

Representation Formulas for Nonlinear Semigroups of Lipschitz Operators

Ji Gen PENG

(Research Center for Applied Mathematics & Institute for Information and Systems Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049*, P. R. China)*
(E-mail: jgpeng@mail.xjtu.edu.cn)

Abstract This paper is concerned with the representation problem of nonlinear semigroup of Lipschitz operators. By developing a series of novel dual notions of Banach space and Lipschitz operator, it is shown that a nonlinear semigroup of Lipschitz operators can induce a C_0^*-semigroup in Lipschitz dual space. Hence, it is proved that a nonlinear semigroup of Lipschitz operators can be isometrically embedded into a certain C_0-semigroup. On the basis of these results, a series of novel representation formulas for this type of nonlinear semigroup are therefore established.

Keywords Lipschitz operator; Nonlinear semigroup of Lipschitz operators; Lipschitz dual semigroup
MR(2000) Subject Classification 47H06, 47D05, 34G20
Chinese Library Classification O177, O175

1 引言与定义

设 X,Y 为数域 $\mathbf{R}$ 上的 Banach 空间, $C\subset X, D\subset Y$ 为子集. 映射 $T:C\to D$ 称为 Lipschitz 算子, 如果存在正常数 M, 使得

$$\|Tx_1-Tx_2\|_Y\le M\|x_1-x_2\|_X,\quad \forall x_1,x_2\in C,$$

收稿日期: 2002-09-18; 接受日期: 2003-06-19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10101019); 西安交通大学理科基金资助项目

其中 $\|\cdot\|_X$ 与 $\|\cdot\|_Y$ 分别表示空间 X 与 Y 上的范数. 为方便计, 以下将省略这些范数的指示下标.

若记 $L(C,D)$ 为映 C 到 D 的 Lipschitz 算子全体, 并对每个 $T\in L(C,D)$ 定义如下常数

$$L(T)=\sup_{x,\,y\in C,\,x\neq y}\frac{\|Tx-Ty\|}{\|x-y\|},\tag{1}$$

则易验证 $L(\cdot)$ 是 $L(C,D)$ 上的半范数, 因而 $(L(C,D),L(\cdot))$ 是一个半范线性空间 [1]. 进一步, 若给定 $x_0\in C$, 并令 $L_{x_0}(C,D)=\{T\in L(C,D):Tx_0=0\}$, 则易证 $(L_{x_0}(C,D),L(\cdot))$ 是一个 Banach 空间. 显然, 映 X 入 Y 的有界线性算子全体 $\mathbf{B}(X,Y)$ 是 $L_0(X,Y)$ 的闭子空间. 特别地, X 的对偶空间 X^* 是 $L_0(X,\mathbf{R})$ 的闭子空间.

定义 1 设 $\{T_t\}_{t\geq 0}\subset L(C,C)$ 为一单参数算子族. 如果它具有以下两个性质:

(i) $T_0=I$ (I 表示单位算子), 对任意 $t,s\geq 0$ 皆有 $T_tT_s=T_{t+s}$;

(ii) 对每个 $x\in C$, 映射 $t\mapsto T_tx$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续,

则称 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 为 C 上的 Lipschitz 算子半群. 进一步地, 如果存在实常数 ω 和 $M>0$, 使得对任意 $t\geq 0$ 皆成立 $L(T_t)\leq M\,\mathrm{e}^{\omega t}$, 则称 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 为指数有界 Lipschitz 算子半群.

定义 2 设 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 为 C 上的 Lipschitz 算子半群. 如果子集

$$D(A)=\Big\{x\in C:\text{极限}\lim_{t\to 0^+}t^{-1}(T_tx-x)\ \text{存在}\Big\}$$

非空, 则称 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 具有生成元 A, 其定义为

$$A:D(A)\to X,\quad Ax=\lim_{t\to 0^+}\frac{T_tx-x}{t}.$$

注 1 由定义可见, Lipschitz 算子半群是一类非常一般的非线性算子半群. 事实上, C_0- 半群 [2], 非线性压缩半群 [3,4] 以及一致 k-Lipschitzian 半群 [5] 都是特殊形式的指数有界 Lipschitz 算子半群. 值得注意的是, 一个非线性 Lipschitz 算子半群可能不具有生成元. 关于这一点, 可参见文 [3] 关于非线性压缩半群的讨论.

周知, C_0- 半群必有生成元, 而且它的许多性质与其生成元紧密相关. 例如, 一个 C_0- 半群可以用有关其生成元的各种公式表示 [2,6]. 有关非线性压缩半群的研究表明 [3,4], 非线性压缩半群与其生成元的关系是十分复杂的, 许多线性算子半群的重要性质对于非线性压缩半群都是失效的, 这其中包括非线性压缩半群的表示. 这表明, 对于一般的非线性 Lipschitz 算子半群, 直接平移线性算子半群性质的研究方法是相当有限的, 因而有必要发展全新的研究方法. 在文 [1] 中, 作者通过引入 Banach 空间的 Lipschitz 对偶等概念, 将非线性 Lipschitz 算子映入到一个新的空间中, 从而将诸多非线性问题转化为相关的线性问题.

本文基于文 [1] 提出的 "Lipschitz 对偶" 思想, 将一个非线性 Lipschitz 算子半群对偶映射到 Lipschitz 对偶空间中, 使其转化为一个线性算子半群. 本文将证明, 该线性算子半群是一个 C_0^*-半群, 因而是某个 C_0- 半群的对偶半群. 这一结论的重要性在于, 它表明一个非线性 Lipschitz 算子半群在等距意义下可以延拓为 C_0- 半群. 然后, 本文引入一个全新的 Lipschitz 对偶概念, 以刻画该线性算子半群与原非线性 Lipschitz 算子半群生成元之间的关系, 从而在一般框架下, 建立一系列全新的非线性 Lipschitz 算子半群的表示公式.

2 Lipschitz 对偶及其基本性质

本节将介绍有关 Lipschitz 对偶概念及其相关性质. 特别地, 基于这些 "对偶" 思想, 将引入非线性稠定算子的一种全新对偶, 这种对偶为线性算子半群过渡到非线性 Lipschitz 算子半群架起到了桥梁作用.

设 C 为 Banach 空间 X 的闭子集， $x_0 \in C$ 是给定的一点. 对每个 $x \in C$, 定义 Banach 空间 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})$ 上的泛函 x^{l*} 如下

$$x^{l*}(f) = f(x), \quad f \in L_{x_0}(C, \mathbf{R}). \tag{2}$$

容易验证 x^{l*} 是一个有界线性泛函，其范数 $\|x^{l*}\| = \|x - x_0\|$. 显然， x_0^{l*} 就是 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})$ 上的零元素，即 $x_0^{l*} = 0$. 进一步可证，对任意 $x, y \in C$, 皆成立 $\|x^{l*} - y^{l*}\| = \|x - y\|$. 因此，映射 $x \mapsto x^{l*}$ 是一个等距.

记 G 为集合 $\{x^{l*} : x \in C\}$ 的线性扩张的闭包，即 $G = \overline{\mathrm{span}}\{x^{l*} : x \in C\}$. 显然， G 是 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})$ 的对偶空间 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})^*$ 的闭子空间，因而是一个 Banach 空间.

引理 1[1] 设 C 是 X 的闭子集， $x_0 \in C$ 给定，则 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})$ 等距同构于 G 的对偶空间，即 $L_{x_0}(C, \mathbf{R}) \cong G^*$.

证明 因为 $G \subset L_{x_0}(C, \mathbf{R})^*$, 所以，由文 [7] 中的定理 4.6.2 知， G^* 等距同构于商空间 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})^{**}/\mathbf{G}^{\perp}$, 其中 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})^{**}$ 为 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})$ 的二次对偶空间， $G^{\perp}$ 是 G 的零化子.

下面将证明， $L_{x_0}(C, \mathbf{R})$ 等距同构于 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})^{**}/G^{\perp}$.

对每个 $V \in L_{x_0}(C, \mathbf{R})^{**}$, 定义 C 上的函数 f_V 为

$$f_V(x) = V(x^{l*}), \quad x \in C. \tag{3}$$

明显地， $f_V(x_0) = 0$, 而且，对任意 $x, y \in C$ 下面不等式成立

$$|f_V(x) - f_V(y)| = |V(x^{l*}) - V(y^{l*})| \leq \|V\| \cdot \|x^{l*} - y^{l*}\| = \|V\| \cdot \|x - y\|. \tag{4}$$

这表明 $f_V \in L_{x_0}(C, \mathbf{R})$. 因此，关系式 (3) 实际上建立了从 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})^{**}$ 到 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})$ 的一个映射，记为 Γ (即 $\Gamma(V) = f_V$). 可证 Γ 是一个线性满射，且它的零空间就是 $G^{\perp}$.

事实上，由 (3) 式易见， Γ 是线性的. 若令 j 为从 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})$ 到其二次对偶空间 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})^{**}$ 的自然映射，则由关系式 (3) 易验证，对任意 $f \in L_{x_0}(C, \mathbf{R})$, 有

$$\Gamma(j(f))(x) = j(f)(x^{l*}) = x^{l*}(f) = f(x), \quad \forall x \in C, \tag{5}$$

即 $\Gamma(j(f)) = f$. 于是，由 $f \in L_{x_0}$ 的任意性知 Γ 是一个满射，且复合映射 $\Gamma \circ j$ 正好是 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})$ 上的单位算子.

记 $N(\Gamma)$ 为 Γ 的零空间，即 $N(\Gamma) = \{V \in L_{x_0}(C, \mathbf{R})^{**}\text{: } \Gamma(V) = 0\}$. 直接由 (3) 式易见， $G^{\perp} \subseteq N(\Gamma)$. 为证明反向包含关系也成立，任取 $V \in N(\Gamma)$. 代入关系式 (3) 可得， $V(x^{l*}) = \Gamma(V)(x) = 0$ $(\forall x \in C)$. 注意到， G 是集合 $\{x^{l*} : x \in C\}$ 线性扩张的闭包，于是对任意 $\hat{m} \in G$, 皆有 $V(\hat{m}) = 0$, 即 $V \in G^{\perp}$. 因而，由 $V \in N(\Gamma)$ 的任意性知，反向包含关系 $N(\Gamma) \subset G^{\perp}$ 成立.

定义映射 $q : L_{x_0}(C, \mathbf{R})^{**}/G^{\perp} \to L_{x_0}(C, \mathbf{R})$ 为 $q(\widehat{V}) = \Gamma(V)$, $V \in L_{x_0}(C, \mathbf{R})^{**}$, 其中 $\widehat{V} \in L_{x_0}(C, \mathbf{R})^{**}/\mathbf{G}^{\perp}$ 表示由 $V \in L_{x_0}(C, \mathbf{R})^{**}$ 诱导的等价类. 由 Γ 的满射性知 q 是满射. 另外，由以上证明知， $G^{\perp} = N(\Gamma)$, 故 q 是单射. 因而， q 是双射. 以下证明 q 是一个等距.

首先，由不等式 (4) 可证，对任意 $V \in L_{x_0}(C, \mathbf{R})^{**}$, 有

$$\|q(\widehat{V})\| = \|\Gamma(V)\| = \inf_{U \in \widehat{V}} \|\Gamma(U)\| \leq \inf_{U \in \widehat{V}} \|U\| = \|\widehat{V}\|. \tag{6}$$

另外，因为 $\Gamma \circ j$ 是空间 $L_{x_0}(C, \mathbf{R})$ 上的单位算子，所以，对任意 $V \in L_{x_0}(C, \mathbf{R})^{**}$, 有

$$\Gamma(j(\Gamma(V))) = \Gamma \circ j(\Gamma(V)) = \Gamma(V). \tag{7}$$

即 $\widehat{V}=j(\widehat{\Gamma(V)})$. 注意到 j 是等距，于是对任意 $V\in L_{x_0}(C,\mathbf{R})^{**}$, 可得如下不等式

$$\|\widehat{V}\|=\|j(\widehat{\Gamma(V)})\|\le\|j(\Gamma(V))\|=\|\Gamma(V)\|=\|q(\widehat{V})\|. \tag{8}$$

由这个不等式并结合 (6) 式可知， q 是从 $L_{x_0}(C,\mathbf{R})^{**}/G^{\perp}$ 到 $L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 的等距映射．证毕.

注 2 引理 1 表明，对任意闭子集 C 与其中给定的点 $x_0\in C$, Banach 空间 $L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 是一个对偶空间，而且 C 可以等距嵌入到一个 Banach 空间 G. 后一结论属于 Arens 和 Eells [8]，但其证明相当复杂.

作为一个对偶空间， $L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ (其范数为 $L(\cdot)$) 可以赋予弱* 拓扑．基于引理 1, 我们可以刻画 $L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 的弱* 拓扑如下.

引理 2 设 $\{f_n\}$ 为 $L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 中的有界序列， $f\in L_{x_0}(C,\mathbf{R})$, 则命题 (i), (ii) 等价:

(i) $\{f_n\}$ 弱* 收敛于 f (简记为 $f_n\overset{w^*}{\to}f$);

(ii) 对任意 $x\in C$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$.

证明 (i)⇒(ii) 设 $f_n\xrightarrow{w^*}f$, 则由引理 1 知，对任意 $w\in G$, $w(f_n)\to w(f)$. 特别地，对任意 $x\in C$, $f_n(x)=x^{l*}(f_n)\to x^{l*}(f)=f(x)$.

(ii)⇒(i) 由定义 2 易见，命题 (ii) 等价于：对任意 $x\in C$, $x^{l*}(f_n)$ 收敛于 $x^{l*}(f)$. 因此，若命题 (ii) 成立，则由 $G=\overline{\mathrm{span}}\{x^{l*}:x\in C\}$ 和序列 $\{f_n\}$ 的有界性易验证，对任意 $w\in G$, $w(f_n)$ 收敛于 $w(f)$. 于是由引理 1 知， f_n 弱* 收敛于 f. 证毕.

注 3 在引理 2 中，序列 $\{f_n\}$ 的有界性是必要的．例如，设 $C=[0,1]\subset\mathbf{R}$, 序列 $\{f_n\}\subset L_0(C,\mathbf{R})$, 定义为

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(n^2x),\quad x\in C.$$

显然，对任意 $x\in C$, $f_n(x)\to 0$ $(n\to+\infty)$. 倘若 $\{f_n\}$ 弱* 收敛于 0, 那么 $\{f_n\}$ 必然有界．但是，直接的计算可得 $L(f_n)=n$, 即序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 无界，矛盾．因此 $\{f_n\}$ 不可能弱* 收敛.

设 $T\in L(C,C)$ 满足 $Tx_0=x_0$, 则算子 $T^{l*}:L_{x_0}(C,\mathbf{R})\to L_{x_0}(C,\mathbf{R})$,

$$(T^{l*})f(x)=f(Tx),\quad f\in L_{x_0}(C,\mathbf{R}),\quad x\in C \tag{9}$$

称为 T 的 Lipschitz 对偶算子.

引理 3 设 $T\in L(C,C)$ 满足 $Tx_0=x_0$, 则下列命题 (a)–(e) 成立:

(a) T^{l*} 是 $L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 上的有界线性算子，且它的范数 $\|T^{l*}\|=L(T)$;

(b) T^{l*} 是弱*- 弱* 连续的，即，若 $\{f_n\}$ 弱* 收敛于 f, 则 $\{T^{l*}f_n\}$ 弱* 收敛于 $T^{l*}f$;

(c) 若 $f,g\in L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 满足 $f\cdot g\in L_{x_0}(C,\mathbf{R})$, 则 $T^{l*}f\cdot T^{l*}g\in L_{x_0}(C,\mathbf{R})$, 且 $T^{l*}f\cdot T^{l*}g=T^{l*}(f\cdot g)$, 其中 $f\cdot g$ 定义为 $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$, $x\in C$;

(d) 单位算子 I 的 Lipschitz 对偶算子 I^{l*} 是 $L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 的单位算子．而且，若 $S\in L(C,C)$ 满足 $Sx_0=x_0$, 则 $(S\circ T)^{l*}=T^{l*}S^{l*}$, 其中 $S\circ T$ 表示 S 与 T 的复合算子 (即对任意 $x\in C$, $(S\circ T)(x)=S(Tx)$).

(e) 如果 T 可逆且其逆算子 $T^{-1}\in L(C,C)$, 则 T^{l*} 也可逆，且 $(T^{l*})^{-1}=(T^{-1})^{l*}$.

证明 (a) T^{l*} 的线性性质是显然的．由定义 (8) 可证，对任意的 $f\in L_{x_0}(C,\mathbf{R})$,

$$L(T^{l*}f)=\sup_{x,\,y\in C,\,x\neq y}\frac{|(T^{l*}f)(x)-(T^{l*}f)(y)|}{\|x-y\|}=\sup_{x,\,y\in C,\,x\neq y}\frac{|f(Tx)-f(Ty)|}{\|x-y\|}\le L(T)\cdot L(f).$$

因此 T^{l*} 有界，而且其范数满足 $\|T^{l*}\|\le L(T)$. 另一方面，对任意给定的 $y\in C$, 令

$$f_y(x)=\|x-Ty\|-\|x_0-Ty\|,\quad x\in C,$$

则易验证 $f_y \in L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 且 $L(f_y) \le 1$. 进一步可验证，对任意 $x \in C$, $(T^{l*}f_y)(x) = \|Tx - Ty\| - \|x_0 - Ty\|$ 且 $(T^{l*}f_y)(y) = -\|x_0 - Ty\|$, 于是

$$L(T)=\sup_{x,\,y\in C,\,x\neq y}\frac{\|Tx-Ty\|}{\|x-y\|}\le\sup_{x,\,y\in C,\,x\neq y}\frac{|(T^{l*}f_y)(x)-(T^{l*}f_y)(y)|}{\|x-y\|}=\sup_{x,\,y\in C,\,x\neq y}\|T^{l*}f_y\|\le\|T^{l*}\|.$$

(b) 设 $\{f_n\}$ 弱* 收敛于 f, 则由引理 2, 对任意 $x \in C$, $(T^{l*}f_n)(x) = f_n(Tx) \to f(Tx) = (T^{l*}f)(x)$. 因为 $\{f_n\}$ 是有界的，所以 $\{T^{l*}f_n\}$ 是有界的，从而由引理 2 知 $\{T^{l*}f_n\}$ 弱* 收敛于 $T^{l*}f$. 因而 T^{l*} 弱*- 弱* 连续.

命题 (c), (d) 可由 (9) 式直接得证.

(e) 设 $T \in L_{x_0}(C,C)$ 可逆，且 $T^{-1} \in L(C,C)$, 则由命题 (d) 可得，$T^{l*}(T^{-1})^{l*} = (T^{-1}\circ T)^{l*} = I^{l*} = (T\circ T^{-1})^{l*} = (T^{-1})^{l*}T^{l*}$. 因此 T^{l*} 可逆，且 $(T^{l*})^{-1} = (T^{-1})^{l*}$. 证毕.

基于以上介绍的"对偶"思想，下面我们将引入稠定非线性算子的一种全新对偶，这种对偶是下一节建立非线性 Lipschitz 算子半群表示定理的关键. 为此，我们首先引入一种 Lipschitz 连续泛函的延拓方式. 具体地，设 $f \in L(C,\mathbf{R})$, 定义 X 上的泛函 F_e 如下

$$F_e(x) = \sup_{y\in C}\{f(y) - L(f)\|x-y\|\},\quad x \in X,$$

则可证明 F_e 是 f 的延拓 (即对任意 $x \in C$, $F_e(x) = f(x)$), $F_e \in L(X,\mathbf{R})$ 且 $L(F_e) = L(f)$ (参见文 [9]). 为方便计，我们将称 F_e 为 f 的 $C-G$ 延拓.

定义 3　设 $B: D(B) \subset C \longrightarrow X$ 为稠定算子 (即 $\overline{D(B)} = C$), 且 $Bx_0 = 0$. 定义算子 $B_p: D(B_p) \subset L_{x_0}(C,\mathbf{R}) \to L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 为

$$(B_pf)(x) = \lim_{r\to 0^+}\frac{F_e(x+rBx)-f(x)}{r},\quad x \in D(B), \tag{10}$$

其中

$$D(B_p)=\left\{f \in L_{x_0}(C,\mathbf{R}) : \exists\, g\in L_{x_0}(C,\mathbf{R})\ \text{s.t.},\ \forall\, x\in D(B),\ g(x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{F_e(x+tBx)-f(x)}{t}\right\},$$

则称 B_p 为 B 的 Lip- 对偶算子.

值得指出的是，在定义 3 中，B 的稠定性是必要的，否则，B_p 没有定义.

下面的引理列举 Lip- 对偶算子 B_p 的一些性质. 由于这些性质很容易由定义直接得到，故省略其证明.

引理 4　设 $B: D(B) \to X$ 为稠定算子，$Bx_0 = 0$, B_p 为 B 的 Lip- 对偶算子，则下列性质 (a)–(e) 成立:

(a) B_p 是线性算子;

(b) B_p 是弱*- 弱* 可闭的，即若 $\{f_n\} \subset D(B_p)$ 弱* 收敛于 f 且 $\{B_pf_n\}$ 弱* 收敛于 0, 则 $f = 0$.

(c) 对任意 $x \in D(B)$ 与 $f \in D(B_p)$, 皆有 $|B_pf(x)| \le L(f)\|Bx\|$;

(d) 映射 $B \mapsto B_p$ 是正齐次的，即对任意正数 λ, 皆有 $(\lambda B)_p = \lambda B_p$;

(e) 若 $f, g \in D(B_p)$ 满足 $f\cdot g \in D(B_p)$, 则

$$B_p(f\cdot g) = B_pf\cdot g + f\cdot B_pg. \tag{11}$$

3 非线性 Lipschitz 算子半群的表示公式

上一节引入了一些 Lipschitz 对偶概念，并给出了其相关性质. 本节将基于这些概念，建立一系列指数有界非线性 Lipschitz 算子半群的表示公式.

设 $C \subset X$ 为闭子集，$x_0 \in C$, $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset L(C,C)$ 为 C 上的指数有界 Lipschitz 算子半群，满足 $T_t x_0 = x_0$ $(\forall t \geq 0)$. 若令 D_t 为 T_t 的 Lipschitz 对偶算子 (即 $D_t = T_t^{l*}$), 则容易验证，$\{D_t\}_{t\geq 0}$ 是 $L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 上的有界线性算子半群，即 $\forall t \geq 0$, D_t 是 $L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 上的有界线性算子，且 $D_0 = I^{l*}$, $D_t D_s = D_{t+s}$ $(\forall t, s \geq 0)$. 另外，由映射 $t \to T_t x$ 的连续性可得 $\forall f \in L_{x_0}(C,\mathbf{R})$, $x \in C$, $t \geq 0$,

$$(D_s f)(x) = f(T_s x) \longrightarrow f(T_t x) = (D_t f)(x), \text{ as } s \longrightarrow t,$$

于是由引理 2 知，映射 $t \mapsto D_t f$ 在 $[0,+\infty)$ 中弱* 连续 (注意到算子族 $\{D_t\}_{t\geq 0}$ 在 $[0,+\infty)$ 的任何紧子集上是有界的). 因此，根据文 [10], $\{D_t\}_{t\geq 0}$ 是 $L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 上的 C_0^*- 半群.

为方便计，以下称 $\{D_t\}_{t\geq 0}$ 为 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 的 Lipschitz 对偶半群. 在以下的讨论中，我们常用 $\langle f, x\rangle$ 表示泛函 f 在 x 处的取值.

定理 1 设 $C \subset X$ 为闭子集，$x_0 \in C$, $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset L(C,C)$ 为 C 上的指数有界 Lipschitz 算子半群，满足 $T_t x_0 = x_0$ $(\forall t \geq 0)$, $G = \overline{\operatorname{span}}\{x^{l*} : x \in C\}$, 则存在 Banach 空间 G 上的 C_0- 半群 $\{H_t\}_{t\geq 0}$, 使得 $\{D_t\}_{t\geq 0}$ 是 $\{H_t\}_{t\geq 0}$ 的对偶半群，即 $\forall f \in L_{x_0}(C,\mathbf{R})$,

$$\langle D_t f, w\rangle = \langle f, H_t w\rangle, \quad \forall w \in G, \quad t \geq 0. \tag{12}$$

特别地，对任意 $f \in L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 与 $x \in C$, 皆有 $\langle f, H_t x^{l*}\rangle = f(T_t x)$ $(t \geq 0)$.

证明 因为 $\{D_t\}_{t\geq 0}$ 是 $L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 上的 C_0^*- 半群，且由引理 1 知 $L_{x_0}(C,\mathbf{R}) \cong \mathbf{G}^*$, 所以，$\{D_t\}_{t\geq 0}$ 等距同构于 G^* 上的一个 C_0^*- 半群. 于是，由 C_0^*- 半群的性质知 [10], 存在 G 上的 C_0- 半群 $\{H_t\}_{t\geq 0}$, 使得 $\{D_t\}_{t\geq 0}$ 等距同构于 $\{H_t\}_{t\geq 0}$ 的对偶半群. 从而，由引理 1 可知，$\forall f \in L_{x_0}(C,\mathbf{R})$, 等式 (12) 成立. 余下的部分直接由 G 与 D_t 的定义可得证. 证毕.

注 4 因为 H_t 是 D_t 的对偶算子，所以 $\|H_t\| = \|D_t\| = L(T_t)$. 因此该定理表明，在等距意义下，一个非线性 Lipschitz 算子半群可以嵌入到 C_0- 半群.

因为 $\{D_t\}_{t\geq 0}$ 是 C_0^*- 半群，所以具有唯一一个弱* 生成元 D^*, 其定义为

$$D^* : D(D^*) \to L_{x_0}(C,R), \quad D^* f = w^*\text{-}\lim_{r\to 0^+} r^{-1}(D_r f - f), \tag{13}$$

其中 $D(D^*) = \{f \in L_{x_0}(C,\mathbf{R}) : \exists g \in L_{x_0}(C,\mathbf{R}), \text{s.t.}, g = w^*\text{-}\lim_{r\to 0^+} r^{-1}(D_r f - f)\}$ (见文 [2]).

引理 5 设 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 具有稠定的生成元 A. 若记 A_p 为 A 的 Lip- 对偶算子，D^* 为 $\{D_t\}_{t\geq 0}$ 的弱* 生成元，则 $D^* \subset A_p$, 即 $D(D^*) \subset D(A_p)$ 且 $\forall f \in D(D^*)$, $D^* f = A_p f$. 进一步地，如果 C 具有 Radon-Nikodym 性质，则 $A_p = D^*$.

证明 设 $f \in D(D^*)$. 令 F_e 为 f 的 C-G 延拓，则由引理 2 可证 $\forall x \in D(A)$,

$$(D^* f)(x) = \lim_{r\to 0^+} \frac{(D_r f)(x) - f(x)}{r} = \lim_{r\to 0^+} \frac{f(T_r x) - f(x)}{r} = \lim_{r\to 0^+} \frac{F_e(T_r x) - f(x)}{r}.$$

注意到，$\lim_{r\to 0^+} r^{-1}(\|T_r x - x - rAx\|) = 0$, 于是可得

$$(D^* f)(x) = \lim_{r\to 0^+} \frac{F_e(x + rAx) - f(x)}{r}, \quad x \in D(A).$$

这表明 $f \in D(A_p)$ 且 $A_p f = D^* f$. 因而由 $f \in D(D^*)$ 的任意性知 $D^* \subset A_p$.

假设 C 具有 Radon-Nikodym 性质. 若 $f \in D(A_p)$, 则由定义 3 可得 $\forall x \in D(A)$,

$$\langle A_p f, x\rangle = \lim_{r\to 0^+} \frac{F_e(x+rAx)-f(x)}{r}.$$

于是, 由等式 $\lim_{r\to 0^+} r^{-1}(\|T_r x - x - rAx\|) = 0$, 可得

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{f(T_r x)-f(x)}{r} = \langle A_p f, x\rangle,\quad x \in D(A). \tag{14}$$

另外, 由生成元 A 的定义易知, $\forall x \in D(A)$, 映射 $t \mapsto T_t x$ 在 $[0,+\infty)$ 中绝对连续, 故 C 的 Radon-Nikodym 性质蕴涵, 映射 $t \mapsto T_t x$ 在 $[0,+\infty)$ 中几乎处处可微, 因而 $T_t x \in D(A)$ 几乎处处成立. 从而由 (14) 式知, $\forall x \in D(A)$, 有

$$\langle A_p f, T_t x\rangle = \lim_{r\to 0^+} \frac{f(T_{r+t}x)-f(T_t x)}{r},\quad t \in [0,\infty)\ \text{a.e.}$$

即实函数 $g(t) = f(T_t x)$ 在 $[0,\infty)$ 中几乎处处可微, 且 $g'(t) = \langle A_p f, T_t x\rangle$. 两边积分可得

$$f(T_t x) - f(x) = \int_0^t \langle A_p f, T_r x\rangle dr,\quad x \in D(A).$$

因为 $\overline{D(A)} = C$, 所以上面的等式实际上对所有 $x \in C$ 成立, 即

$$(D_t f)(x) - f(x) = f(T_t x) - f(x) = \int_0^t \langle A_p f, T_r x\rangle dr,\quad x \in C, \tag{15}$$

于是, $\forall x \in C$, 有

$$\langle A_p f, x\rangle = \lim_{t\to 0^+} \frac{D_t f(x) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \left\langle \frac{D_t f - f}{t},\ x^{l*} \right\rangle.$$

由等式 (15) 可证, 函数族 $\{t^{-1}(D_t f - f)\}_{0<t<1} \subset L_{x_0}(C,\mathbf{R})$ 是有界的. 因此, 由引理 2 知 $t^{-1}(D_t f - f) \overset{w^*}{\to} A_p f$ (as $t \to 0^+$). 这表明 $f \in D(D^*)$ 且 $D^* f = A_p f$. 证毕.

定理 2 设 C 具有 Radon-Nikodym 性质, $L(T_t) \le M\,\mathrm{e}^{wt}$. 如果 $\{T_t\}_{t\ge 0}$ 具有稠定生成元 A, 则对任意 $x \in C$ 和 $f \in L_{x_0}(C,\mathbf{R})$, 下列等式 (R1)–(R5) 成立:

(R1) $f(T_t x) = \lim_{n\to\infty} \langle (I - \frac{1}{n}A_p)^{-n} f, x\rangle t \ge 0$;

(R2) $f(T_t x) = \mathrm{e}^{wt} \lim_{n\to\infty} \langle n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}\mathrm{e}^{jnt}}{(j-1)!} (jn + w - A_p)^{-1} f, x\rangle$, $t > 0$;

(R3) $f(T_t x) = \lim_{n\to\infty} \langle \exp\{t[n^2(I - A_p)^{-1} - nI]\} f, x\rangle$, $t \ge 0$;

(R4) $f(T_t x) = \lim_{n\to\infty} \langle [(1+t)I - tn(n - A_p)^{-1}]^{-n} f, x\rangle$, $t \ge 0$;

(R5) $f(T_t x) = \lim_{n\to\infty} \langle [(1-t)I + tn(n - A_p)^{-1}]^{n} f, x\rangle$, $0 \le t \le 1$;

(R6) 若 $f \in D(A_p)$, $\sigma > w$, 则 $\forall x \in C$, 有

$$f(T_t x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sigma-\infty\mathrm{i}}^{\sigma+\infty\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\lambda t} \langle (\lambda I - A_p)^{-1} f, x\rangle d\lambda,\quad t > 0.$$

在公式 (R1)–(R6) 中, 极限关于 t 在 $[0,+\infty)$ 的任何紧子集上一致.

证明 设 D^* 为 $\{D_t\}_{t\ge 0}$ 的弱* 生成元，H 为 C_0- 半群 $\{H_t\}_{t\ge 0}$ 无穷小生成元，则由定理 1 与引理 5 知，$D^* = A_p = H^*$，其中 H^* 表示 H 的对偶算子. 因此 $\forall\lambda\in\rho(H)$ ($\rho(H)$ 为 H 的预解集)

$$\langle(\lambda I - H)^{-1}x^{l*}, f\rangle = \langle(\lambda I - A_p)^{-1}f, x\rangle,\quad x\in C,\quad f\in L_{x_0}(C,\mathbf{R}).$$

注意到

$$f(T_t x) = \langle H_t x^{l*}, f\rangle\ (\forall x\in C,\ f\in L_{x_0}(C,\mathbf{R})),$$

于是，由 C_0- 半群的指数公式 [2] 可得到公式 (R1)，由文 [11] 中的命题 3.2 可得公式 (R2)，再由文 [6] 中的定理 4.6 可得公式 (R3), (R4) 与 (R5).

下面证明 (R6). 注意到，$\forall x\in C,\ f\in D(A_p)$，

$$\begin{aligned}\langle x, \lambda(\lambda I - A_p)^{-1}f - f\rangle &= \langle x, (\lambda I - A_p)^{-1}A_p f\rangle\\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\langle x, D_t A_p f\rangle\,dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,d(\langle x, D_t f\rangle),\end{aligned}$$

即 $\langle x,\lambda(\lambda I - A_p)^{-1}f - f\rangle$ 是函数 $t\mapsto\langle x, D_t f\rangle$ 的 Laplace-Stieltjes 变换. 于是由 Laplace-Stieltjes 逆变换公式 (参见文 [12])，可得

$$\begin{aligned}\langle x, D_t f\rangle &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\infty\mathrm{i}}^{\sigma+\infty\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\lambda t}\frac{\langle x,\lambda(\lambda I - A_p)^{-1}f - f\rangle}{\lambda}\,d\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\infty\mathrm{i}}^{\sigma+\infty\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\lambda t}\left[\langle x,(\lambda I - A_p)^{-1}f\rangle - \frac{\langle x, f\rangle}{\lambda}\right]d\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\infty\mathrm{i}}^{\sigma+\infty\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\lambda t}\langle x,(\lambda I - A_p)^{-1}f\rangle\,d\lambda.\end{aligned}$$

这正是 (R6). 证毕.

参 考 文 献

[1] Peng J. G., Xu Z. B., A novel dual notion of Banach space: Lipschiz dual space, *Acta Math. Sinica*, 1999, **42**: 61–70 (in Chinese).

[2] Pazy A., Semigroups of linear operators and applications to partial diferential equations, New York: Springer-Verlag, 1983.

[3] Barbu V., Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Groningen: Noordhoff, 1976.

[4] Miyadera I., Nonlinear semigroups (translated by Choong, Y. C. in English), Providence: Amer. Math. Soc., 1992.

[5] Downng D. J., Ray W. O., Uniformly Lipschitz semigroup in Hilbert spaces, *Canad. Math. Bull.*, 1982, **25**: 210–214.

[6] Shaw S.-Y., Approximation of unbounded functions and applications to representations of semigroups, *J. Approx. Theory*, 1980, **28**: 238–259.

[7] Larsen R., Functional analysis, New York: Marcel Dekker Inc., 1973.

[8] Shaw S.-Y., Li S.-Y., Representation formulas for C-semigroups, *Semigroup Forum*, 1993, **43**: 123–125.

[9] Arens R. F., Eells J. J., On embedding uniform and topological spaces, *Pacific J. Math.*, 1956, **6**: 397–403.

[10] Czipser J., Geher L., Extension of function satisfying a Lipschitz condition, *Acta. Math. Acad. Sci. Hunger.*, 1955, **6**: 213–220.

[11] Brattelli O., Robinson W., Operator algebras and quantum statistical mechanics I: C^*-and W^*-algebras, algebra, symmetry groups, decomposition of states, New York: Springer-Verlag, 1979.

[12] Peng J.-G., Chung S.-K., Laplace transforms and generators of semigroups of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, **126**: 2407–2416.

[13] Widder D. V., An introduction to transform theory, New York: Academic Press, 1971.

非线性Lipschitz算子半群的表示

作者： 彭济根
作者单位： 西安交通大学应用数学研究中心及信息与系统科学研究所,西安,710049
刊名： 数学学报 ISTIC PKU
英文刊名： ACTA MATHEMATICA SINICA
年，卷(期)： 2004，47(4)
被引用次数： 1次

参考文献(13条)

1. Peng J G. Xu Z B A novel dual notion of Banach space:Lipschiz dual space 1999

2. Pazy A Semigroups of linear operators and applications to partial diferential equations 1983

3. Barbu V Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces 1976

4. Miyadera I Nonlinear semigroups (translated by Choong, Y. C. in English)

5. Downg D J. Ray W. O Uniformly Lipschitz semigroup in Hilbert spaces 1982

6. Shaw S -Y Approximation of unbounded functions and applications to representations of semigroups 1980

7. Larsen R Functional analysis

8. Shaw S -Y. Li S.-Y Representation formulas for C-semigroups 1993

9. Arens R F. Eells J. J On embedding uniform and topological spaces 1956

10. Czipser J. Geher L Extension of function satisfying a Lipschitz condition 1955

11. Brattelli O. Robinson W Operator algebras and quantum statistical mechanics I: C*-and W*-algebras, algebra, symmetry groups, decomposition of states 1979

12. Peng J -G. Chung S.-K Laplace transforms and generators of semigroups of operators 1998

13. Widder D V An introduction to transform theory 1971

相似文献(3条)

引证文献(1条)