第45卷第6期 数 学 学 报 Vol.45, No.6
2002年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA Nov., 2002

文章编号: 0583-1431(2002)06-1099-08 文献标识码: A

非线性 Lipschitz 算子半群的渐近性质及其应用

彭济根 徐宗本

(西安交通大学应用数学研究中心及信息与系统科学研究所 陕西 西安 710049)
(Fax: (029)3237910; E-mail: jgpeng@xjtu.edu.cn; zbxu@xjtu.edu.cn)

摘 要 本文对一类非线性算子半群 ——Lipschitz 算子半群的渐近性质进行研究，刻划了非线性 Lipschitz 算子半群所具有的基本渐近性质 (这些性质与线性算子半群所具有的基本渐近性质相一致)，证明了作为线性算子对数范数的非线性推广，Dahlquist 数能用于刻划非线性 Lipschitz 算子半群的渐近性质．为克服 Dahlquist 数只对 Lipschitz 算子有定义的缺点，本文引入一个全新的特征数：广义 Dahlquist 数，并证明广义 Dahlquist 数比 Dahlquist 数能更为精确地刻划 Lipschitz 算子半群的渐近性质．作为应用，得到关于 Hopfield 型神经网络全局指数稳定性的一个新结果.

关键词 非线性 Lipschitz 算子半群；生成元；渐近性质；全局指数稳定性
MR(2000) 主题分类 47H06, 47D05, 34G20
中图分类 O175, O177

On Asymptotic Behaviours of Nonlinear Semigroup of Lipschitz Operators with Applications

Ji Gen PENG Zong Ben XU

(Research Center for Applied Mathematics, and Institute for Information & System Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China)
(Fax: (029)3237910; E-mail: jgpeng@xjtu.edu.cn; zbxu@xjtu.edu.cn)

Abstract This paper is concerned with the asymptotic behaviors of nonlinear semigroup of Lipschitz operators. A series of basic properties similar to those of linear semigroups are characterized. It is shown that the Dahlquist constant, which is a nonlinear extension of logarithmic norm of a bounded linear operator, can be applied to characterize the asymptotic behaviours of nonlinear semigroup of Lipschitz operators. Moreover, in order to characterize the asymptotic behaviours of nonlinear semigroups much better, a novel quantity of nonlinear operator, named the generalized Dahlquist constant, is defined. Unlike Dahlqust constant only defined for Lipschitz operator, this new quantity can be defined well for nonlinear operator. As an application, a new result on global exponential stability of Hopfield-type neural networks is proved.

Keywords Nonlinear semigroup of Lipschitz operators; Generators; Asymptotic behaviours; Global exponential stability

收稿日期: 2001-03-21; 接受日期: 2001-08-13
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10101019); 西安交通大学理科基金资助项目

MR(2000) Subject Classification 47H06, 47D05, 34G20
Chinese Library Classification O175, O177

1 预备知识

设 X 为 Banach 空间, C 为 X 的子集, $T: C \to C$ 为映射. 如果存在常数 $M > 0$, 使得 $\|Tx - Ty\| \leq M\|x - y\|$, $\forall x, y \in C$, 则称 T 为 Lipschitz 算子. 进一步地, 若对每个 Lipschitz 算子定义其最小 Lipschitz 常数

$$L(T) = \sup_{x,\, y \in C,\, x \neq y} \frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|}, \tag{1}$$

且记 $L(C,C)$ 为全体从 C 到 C 的 Lipschitz 算子构成的集合, 则易知, 泛函 $L(\cdot)$ 是 $L(C,C)$ 上的半范, 从而 $(L(C,C), L(\cdot))$ 是一个半范线性空间. 显然, 一个 X 中的有界线性算子 A 是定义在 X 上的 Lipschitz 算子, 且 A 的算子范数 $\|A\|$ 等于 $L(A)$. 另外, 由定义易知, $\forall T, S \in L(C,C)$, $L(TS) \leq L(T) \cdot L(S)$, 因而 $L(\cdot)$ 是算子范数的非线性推广.

设 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 为 $L(C,C)$ 中以 t 为参数的单参数算子族. 如果 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 满足下列条件:

(i) $T_0 = I$(I 为恒等算子), $T_{t+s} = T_t T_s$, $\forall t, s \geq 0$, 且

(ii) $\forall x \in C$, $\lim_{t\to 0^+} T_t x = x$,

则称 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 为 C 上的 Lipschitz 算子半群, 并且称如下定义的算子 $A: D(A) \subset C \to C$,

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t x - x}{t}, \quad D(A) = \left\{ x \in C: \text{ 极限} \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t x - x}{t} \text{ 存在} \right\} \tag{2}$$

为其 (无穷小) 生成元. 进一步地, 若存在常数 w 与 $M > 0$, 使得 $L(T_t) \leq M\,\mathrm{e}^{wt}$, 则称 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 指数有界.

显然, 压缩算子半群 (参见文 [1,2]) 是一类特殊的指数有界 Lipschitz 算子半群. 另外, 若 $C = X$, 且每个算子 T_t 是线性的, 则 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 退化为 C_0- 半群.

注 1 (i) 易验证, 定义中的条件 (ii) 等价于 "$\forall x \in C$, 映射 $t \mapsto T_t x$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续". (ii) 已知, 线性算子半群 T_t 的生成元 A 是一定存在的, 且 T_t 就是 A 所引导的线性系统 $x'(t) = Ax(t)$ 的解算子 (即, $x(t) = T_t x$ 是该系统以 x 为初值的解). 对于非线性算子半群, 其生成元是不一定存在的, 即使存在, 半群与其生成元所引导的系统 $x'(t) = Ax(t)$ 之间的关系也非常复杂 (可参见文 [1,2] 中关于压缩半群的讨论). 文 [3] 对这些问题作了一定的探讨, 证明了: 若 Banach 空间 X 具有 Radon-Nikodym 性质, 则每个非线性 Lipschitz 算子半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 的生成元 A 一定存在, 且 $\forall x \in D(A)$, $T_t' x = AT_t x$ 对几乎所有的 $t \geq 0$ 成立. (iii) 熟知, 作为特殊的 Lipschitz 算子半群, C_0- 半群是指数有界的. 至于 (非线性)Lipschitz 算子半群是否一定指数有界, 仍不得而知. 不过, 类似于线性情形 (参见文 [4, 定理 2.2(a)]) 可证明: $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 指数有界的充分必要条件是, $\operatorname{inflim}_{t\to 0^+} L(T_t) < +\infty$.

由于算子半群与抽象系统 $x'(t) = Ax(t)$ 的解算子之间存在本质的联系, 因此有关算子半群的研究具有基本重要的意义. 对于线性算子半群, 经过几十年的发展, 有关其研究已形成较为完善的理论、方法体系 (参见文 [4,5]), 并在诸多数学物理问题中得到成功的应用. 而对于非线性算子半群, 迄今为此, 有关其研究仍主要集中于与耗散算子相关联的压缩算子半群. 即便如此, 仍

有许多基本问题未能得到解决 [1,2]. 鉴于此, 文 [3] 运用 "对偶" 方法与推广线性算子特征数的方法 (见文 [6,7]), 在一般框架下对非线性 Lipschitz 算子半群作了一些尝试性的研究.

本文在文 [3] 的基础上, 对非线性 Lipschitz 算子半群的渐近性质作进一步的研究. 所获结果表明, 非线性 Lipschitz 算子半群不仅具有线性算子半群的许多基本的渐近性质, 而且, 作为线性算子对数范数的非线性推广, Soderlind [9] 所引入的 Dahlquist 数能用于刻划非线性 Lipschitz 算子半群的渐近性质. 另外, 针对 Dahlquist 数只对 Lipschitz 算子有定义的缺点, 本文引入了一个全新的特征数: 广义 Dahlquist 数. 实例表明, 广义 Dahlquist 数比 Dahlquist 数能更精确地刻划 Lipschitz 算子半群的渐近性质. 作为应用, 本文对 Hopfield 型神经网络的全局指数稳定性作了一定的刻划, 推广了以往的有关工作.

2 基本渐近性质

设 C 为 Banach 空间 X 的闭子集, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 为定义在 C 上的 Lipschitz 算子半群, 则 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 有如下基本的渐近性质.

性质 1 若 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 指数有界, 则下列命题等价:

(i) 存在常数 $M>0, w<0$, 使得 $L(T_t)\leq M\,\mathrm{e}^{wt}$;

(ii) 存在 $t_0>0$, 使得 $L(T_{t_0})<1$;

(iii) $\lim_{t\to+\infty} L(T_t)=0$.

证明 (i)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(ii) 显然, 仅证 (ii)$\Longrightarrow$(i). 因为 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 指数有界, 所以

$$M_1 \triangleq \sup_{0\leq t\leq t_0} L(T_t)<\infty.$$

任意给定 $t>0$, 令 $t=nt_0+s$, 其中 $0<s<t_0$, 则由 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 的半群性质知, $L(T_t)\leq L(T_{nt_0})\,L(T_s)\leq M_1\,(L(T_{t_0}))^n\leq M\,\mathrm{e}^{wt}$, 其中 $w=\frac{1}{t_0}\log L(T_{t_0}), M=M_1\,L(T_{t_0})^{-1}$. 显然, M,w 是仅依赖于 t_0 的常数, 且由 $L(T_{t_0})<1$ 知, $w<0$. 证毕.

该性质表明, 只要半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 在某个时刻 t_0 压缩, 则它最终压缩, 即存在 $r\geq t_0$, 使得 $\forall t\geq r, T_t$ 是压缩的. 因而, 由压缩不动点原理知, $T_t\,(t\geq 0)$ 有公共不动点 x^* (事实上, 由压缩不动点原理知, T_r 有唯一不动点 x^*. 假设存在 $s>0$, 使 $T_s x^*\neq x^*$, 则由 $T_r(T_s x^*)-T_r x^*=T_s x^*-x^*$ 知, T_r 不可能压缩, 从而矛盾). 进而, 若 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 为系统 $x'(t)=Ax(t)$ 的解算子 (即 $\forall x\in D(A), x(t)=T_t x$ 是该系统以 x 为初值的解), 则 x^* 为该系统的唯一平衡点, 且该平衡点是全局指数稳定的. 这与 C_0- 半群所反映的线性情形是一致的.

性质 2 若 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 指数有界, $x^*\in C$ 是 $T_t\ (t\geq 0)$ 的公共不动点, 则下列命题等价:

(i) 存在常数 $M>0, w<0$, 使得 $\forall t\geq 0, x\in C, \|T_t x-x^*\|\leq M\,\mathrm{e}^{wt}\|x-x^*\|$;

(ii) 存在常数 $\alpha>0, \gamma<1$, 使 $\forall x\in C$, 有 $\tau(x)\in[0,\alpha]$, 满足 $\|T_{\tau(x)}x-x^*\|\leq\gamma\,\|x-x^*\|$;

(iii) 存在 $t_0>0, \beta<1$, 使得 $\forall x\in C, \|T_{t_0}x-x^*\|\leq\beta\,\|x-x^*\|$.

证明 为方便计, 不妨设 $0\in C$ 且 $x^*=0$ (否则, 考虑 $\hat{C}=C-x^*$ 与半群 $\{\hat{T}_t\}_{t\geq 0}$, 其中 $\hat{T}_t x=T_t(x+x^*)-x^*, x\in\hat{C}$).

(i)$\Longrightarrow$(ii) 取常数 $\alpha>|w^{-1}\log M|$, 并令 $\gamma=M\,\mathrm{e}^{w\alpha}$, 则由 $w<0$ 知, $\gamma<1$ 且 $\forall x\in C$, $\|T_\alpha x\|\leq\gamma\|x\|$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 设 $x\in C$, $\tau(x)$ 如条件所给. 定义序列 $\{x_n\}_{n\in N}\subset C$ 与数列 $\{\tau\}_{n\in N}$ 为

$$x_0=x,\quad \tau_0=\tau(x),\quad \tau_n=\sum_{i=0}^{n-1}\tau(x_i),\quad x_n=T_{\tau_n}x,\quad n\geq 1,$$

则易知 $x_n=T_{\tau_n}x=T_{\tau(x_{n-1})}T_{\tau_{n-1}}x=T_{\tau(x_{n-1})}x_{n-1}$. 于是

$$\|T_{\tau_n}x\|\leq\gamma\|x_{n-1}\|\leq\cdots\leq\gamma^n\|x\|. \tag{3}$$

不妨设 $L(T_t)\leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ 且 $\omega\geq 0$ (注意到 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 指数有界). 选取 $k\in N$ 充分大, 使得 $\beta\triangleq Me^{\omega\alpha}\cdot\gamma^k<1$.

情形 I $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\tau_n\leq k\alpha$. 此时由 (3) 式可证 $\forall n\in N$, 皆有

$$\|T_{k\alpha}x\|\leq L(T_{k\alpha-\tau_n})\,\|T_{\tau_n}x\|\leq M\,\mathrm{e}^{(k\alpha-\tau_n)\omega}\gamma^n\|x\|.$$

令 $n\to\infty$, 则 $\|T_{k\alpha}x\|=0$. 于是, 令 $t_0=k\alpha$, 则命题 (iii) 成立.

情形 II $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\tau_n>k\alpha$. 因为序列 $\{\tau_n\}$ 单调增, $0\leq\tau_n\leq n\alpha$ 且 $\tau_{n+1}-\tau_n\leq\alpha$, 所以必存在某个 $l\geq k$, 使得 $(k-1)\alpha<\tau_l\leq k\alpha$. 于是, $\forall x\in C$,

$$\|T_{k\alpha}x\|\leq L(T_{k\alpha-\tau_l})\|T_{\tau_l}x\|\leq M\,\mathrm{e}^{(k\alpha-\tau_l)\omega}\gamma^l\|x\|\leq\beta\|x\|.$$

取 $t_0=k\alpha$, 即得命题 (iii).

综合以上两种情形, 可知命题 (iii) 成立.

(iii)$\Longrightarrow$(i) 令 $w=\frac{1}{t_0}\log\beta$, 则由 $\beta<1$ 知 $w<0$. 设 $t>0$, 并令 $t=nt_0+h$, 其中 $n\in N$, $0<h<t_0$, 则 $\forall x\in C$,

$$\begin{aligned}\|T_tx\|&=\|T_tx-T_t0\|\leq L(T_h)\|T_{nt_0}x\|\leq L(T_h)\beta\|T_{(n-1)t_0}x\|\\&\leq L(T_h)\beta^n\|x\|\leq L(T_h)\mathrm{e}^{nt_0w}\|x\|.\end{aligned}$$

于是, 令 $M=\sup_{0\leq h\leq t_0}L(T_h)\,\mathrm{e}^{-wh}$, 即得 $\|T_tx\|\leq M\,\mathrm{e}^{wt}$. 证毕.

注 2 如果半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 是连续系统 $x'(t)=Ax(t)$ 的解算子, 则该系统的平衡点 x^* 就是 T_t $(t\geq 0)$ 的公共不动点. 因而性质 2 表明: 只要该系统的解曲线在某个时刻与平衡点的距离小于曲线的起点与平衡点的距离, 则解曲线按指数方式收敛于该平衡点.

注 3 性质 2 是 C_0- 半群相应结论的非线性推广 (见文 [4,5]), 其中 "(ii)$\Longrightarrow$(iii)" 的证明技巧源于文 [4, 定理 4.13].

性质 3 设 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 指数有界, $x^*\in C$ 是 T_t $(t\geq 0)$ 的公共不动点, $x\in C$. 若存在 $p\in[0,+\infty)$, 使得

$$\int_0^\infty\|T_tx-x^*\|^p\,dt<+\infty, \tag{4}$$

则 $\lim_{t\to+\infty}T_tx=x^*$.

证明 反证法. 假设存在 $\delta>0$ 与数列 $\{t_k\}_{k\in N}$, 使得 $t_k\to\infty$ $(k\to\infty)$ 且 $\|T_{t_k}x-x^*\|\geq\delta$. 不妨令 $t_k<t_{k+1}$, 且 $d\triangleq\min_{k\in N}|t_{k+1}-t_k|>0$.

设 $L(T_t) \le M\,\mathrm{e}^{wt}$ (其中 $M \ge 1, w \ge 0$). 由于 $\forall k \in N$, 当 $t \in [t_k - d, t_k]$ 时, $\|T_{t_k}x - x^*\| = \|T_{t_k}x - T_{t_k}x^*\| \le L(T_{t_k - t})\|T_t x - x^*\|$, 故 $\|T_t x - x^*\| \ge \delta \cdot (M\,\mathrm{e}^{wd})^{-1}$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|T_t x - x^*\|^p\,dt &\ge \sum_{k=1}^\infty \int_{t_k-d}^{t_k} \|T_t x - x^*\|^p\,dt \\ &\ge \sum_{k=1}^\infty \delta \cdot (M\,\mathrm{e}^{wd})^{-p} d = \infty.\end{aligned}$$

这与条件 (4) 相矛盾, 即假设不成立. 证毕.

从以上性质可知, 非线性 Lipschitz 算子半群继承了 C_0- 半群的许多基本渐近性质, 这体现了它们的共性. 但是, 非线性半群毕竟与线性半群有着本质的区别, 因而, C_0- 半群的许多性质是不能推广到非线性情形的. 譬如, 对于 C_0- 半群 $\{T_t\}_{t\ge0}$, 当且仅当条件 (4) 对所有 $x \in X$ 成立时 (其中 $x^* = 0$), $\{T_t\}_{t\ge0}$ 是指数稳定的 (即, 存在正常数 M, w, 使得 $\|T_t\|(= L(T_t)) \le M\,\mathrm{e}^{-wt}$)(参见文 [定理 4.13]). 但下面的例子表明, 这样的结论不能推广到非线性情形.

例 1 设 $X = R, C = X$, 定义算子族 $\{T_t\}_{t\ge0}$ 为: $\forall t \ge 0$,

$$T_t : C \to C,\quad T_t x = \frac{x}{\sqrt{tx^2+1}},\quad x \in C.$$

易证 $T_t \in L(C, C)$, 且为 C 上的非线性 Lipschitz 算子半群. 显然 $x^* = 0$ 为 T_t 的公共不动点. 若取 $p = 4$, 则 $\forall x \in C$,

$$\int_0^\infty \|T_t x\|^p\,dt = \int_0^\infty \frac{x^4}{(tx^2+1)^2}\,dt = x^2 < \infty.$$

即, 条件 (4) 对所有的 $x \in C$ 成立. 但是 $L(T_t) = \sup_{x\in C}|\frac{d}{dx}T_t x| = 1$. 因而, 不可能存在正常数 M, w, 使得 $L(T_t) \le M\,\mathrm{e}^{-wt}$ $(t \ge 0)$.

3 生成元与渐近性质的关系

周知, 线性算子半群的渐近性质与其生成元有着密切的关系. 譬如, C_0- 半群的稳定性在大多数情况下可由其生成元的谱分布完全确定; 从定量化方面考虑, C_0- 半群的稳定性可由其生成元的某些特征数来刻划, 这些特征数有如谱界、对数范数 [10](对应矩阵即为矩阵测度) 等等. 在这一节, 我们首先证明, 作为对数范数的非线性推广, Soderlind [10] 引入的 Dahlquist 数能应用于刻划 Lipschitz 算子半群的渐近性质; 其次, 我们引入一个新的特征数 —— 广义 Dahlquist 数, 它克服了 Dahlquist 数只对 Lipschitz 算子有定义的缺陷, 所获结论表明, 广义 Dahlquist 数比 Dahlquist 数能更精确地刻划 Lipschitz 算子半群的渐近性质. 作为应用, 得到了有关 Hopfield 型神经网络的全局指数稳定性的一个结果, 推广了现有的工作 [8].

设 $A \in L(C, C)$, 其 Dahlquist 数 $\mu(A)$ 定义为 [9]

$$\mu(A) = \lim_{r\to+\infty}[L(A + rI) - r]. \tag{5}$$

显然, 当 $C = X$ 且 A 为有界线性算子时, $\mu(A)$ 就是 A 的对数范数 [10](特别地, 当 A 是矩阵时, $\mu(A)$ 即为 A 的矩阵测度 [11]). 因此, Dahlquist 数是对数范数 (特别, 矩阵测度) 的非线性推广.

由文 [10] 知，线性算子 A 所生成的线性半群 $T_t=\mathrm{e}^{At}$ 必满足：$\|T_t\|(=L(T_t))\le \mathrm{e}^{\mu(A)t}$, $t\ge 0$. 下面的定理将这一结论直接推广到了非线性 Lipschitz 算子半群.

定理 1 设 $\{T_t\}_{t\ge 0}$ 为定义在 C 上的 Lipschitz 算子半群，$A\in L(C,X)$ 为其生成元，则 $\forall\, t\ge 0$, $L(T_t)\le \mathrm{e}^{\mu(A)t}$, 其中 $\mu(A)$ 为 A 的 Dahlquist 数.

证明 因为 $A\in L(C,X)$ (即 A 是 Lipschitz 连续的), 所以由生成元的定义易知，$\forall\, x\in C$, $t\ge 0$, $T_t'x=AT_tx$. 由此可得，$\forall\, r>0$, $x,y\in C$,

$$\mathrm{e}^{rt}(T_tx-T_ty)=(x-y)+\int_0^t \mathrm{e}^{rs}[(A+rI)T_sx-(A+rI)T_sy]\,dt.$$

即得

$$\mathrm{e}^{rt}\|T_tx-T_ty\|\le\|x-y\|+L(A+rI)\int_0^t \mathrm{e}^{rs}\|T_sx-T_sy\|\,ds.$$

从而 $\mathrm{e}^{rt}L(T_t)\le 1+L(A+rI)\int_0^t \mathrm{e}^{rs}L(T_s)\,ds$, $r>0$. 于是，由著名的 Gronwell 不等式可得，$L(T_t)\le \mathrm{e}^{(L(A+rI)-r)t}$. 令 $r\to+\infty$, 则有 $L(T_t)\le \mathrm{e}^{\mu(A)t}$. 证毕.

推论 1 设 A 为 Lipschitz 算子半群 $\{T_t\}_{t\ge 0}$ 的生成元，$A\in L(C,X)$. 若对某个 $\lambda>0$, $L(A+\lambda I)<\lambda$, 则存在 $w>0$, 使得 $\forall\, t\ge 0$, $L(T_t)\le \mathrm{e}^{-wt}$.

证明 易证函数 $f(r)=L(A+rI)-r$ $(r>0)$ 是单调减的，因而，由 (5) 式知，$\mu(A)\le L(A+\lambda I)-\lambda<0$. 于是，取 $w=\lambda-L(A+\lambda I)$ 即满足：$L(T_t)\le \mathrm{e}^{-wt}$. 证毕.

注 4 定理 1 的意义在于：若生成元 A 的 Dahlquist 数 $\mu(A)<0$, 则 $L(T_t)<1$, 即 T_t 是压缩的. 因而 $T_t(t\ge 0)$ 有唯一公共不动点 x^*. 显然，$x^*\in D(A)$ 且 $Ax^*=0$. 于是，相应的系统 $x'(t)=Ax(t)$ 有唯一的平衡点 x^*, 且系统的解按下列方式指数收敛于 x^*, $\|x(t)-x^*\|\le \mathrm{e}^{-|\mu(A)|t}\|x_0-x^*\|$, 其中 $x_0=x(0)$ 为初始值.

值得注意的是，尽管 Dahlquist 数能用于刻划非线性 Lipschitz 算子半群的渐近性质，但它仅仅对 Lipschitz 算子有定义，因而，它仅适用于生成元是 Lipschitz 算子的 Lipschitz 算子半群. 因此，为在一般框架下刻划 Lipschitz 算子半群渐近性质与其生成元的关系，有必要寻求新的特征数. 为此，我们作如下尝试.

给定算子 $A:D(A)\subset C\to X$. $\forall\, x,y\in D(A)$, 作函数 $f(r)=\|(A+rI)x-(A+rI)y\|-r\|x-y\|$, $r>0$. 易验证，f 是单调减的，因而极限 $\lim_{r\to+\infty}f(r)$ 存在. 由此我们可引入

定义 1 设 $A:D(A)\subset C\to X$, 则称如下定义的常数

$$\alpha(A)\triangleq\sup_{x,y\in D(A),\,x\ne y}\frac{1}{\|x-y\|}\lim_{r\to+\infty}(\|(A+rI)x-(A+rI)y\|-r\|x-y\|)\tag{6}$$

为 A 的广义 Dahlquist 数.

显然，广义 Dahlquist 数的定义不限于 Lipschitz 算子，且当 A 为 C 上的 Lipschitz 算子 (即 $A\in L(C,C)$) 时，$\alpha(A)\le\mu(A)$.

定理 2 设 $A:D(A)\subset C\to X$ 为 Lipschitz 算子半群 $\{T_t\}_{t\ge 0}$ 的生成元. 若 $\forall\, x\in D(A)$, 及几乎所有的 $t\ge 0$, $T_tx\in D(A)$, 则 $\forall\, x,y\in D(A)$, $\|T_tx-T_ty\|\le \mathrm{e}^{\alpha(A)t}\|x-y\|\, t\ge 0$. 进一步地，若 $D(A)$ 在 C 中稠密，则 $L(T_t)\le \mathrm{e}^{\alpha(A)t}$.

证明 由生成元的定义知，$\forall\, x\in D(A)$ 与几乎所有的 $t\ge 0$, $(T_tx)_t'=AT_tx$. 由此可证 $\forall\, x,y\in D(A)$, $r>0$, $t>s\ge 0$,

$$\mathrm{e}^{rt}(T_tx-T_ty)=\mathrm{e}^{rs}(T_sx-T_sy)+\int_s^t \mathrm{e}^{ra}[(A+rI)T_ax-(A+rI)T_ay]\,da,$$

即得

$$e^{rt}\|T_tx-T_ty\|-e^{rs}\|T_sx-T_sy\|\le\int_s^t e^{ra}\|(A+rI)T_ax-(A+rI)T_ay\|\,da.$$

于是, 对几乎所有的 $t\ge0$, 有 $(e^{rt}\|T_tx-T_ty\|)'_t\le e^{rt}\|(A+rI)T_tx-(A+rI)T_ty\|$. 因而

$$\|T_tx-T_ty\|'_t\le\|(A+rI)T_tx-(A+rI)T_ty\|-r\|T_tx-T_ty\|.$$

令 $r\to+\infty$, 则有 $\|T_tx-T_ty\|'_t\le\alpha(A)\,\|T_tx-T_ty\|$. 从 0 到 t 积分, 即得

$$\|T_tx-T_ty\|\le e^{\alpha(A)t}\,\|x-y\|.$$

进一步地, 由 (1) 式易知, 若 $\overline{D(A)}=C$, 则 $L(T_t)\le e^{\alpha(A)t}$. 证毕.

注 5 定理 2 中的条件 "$\forall x\in D(A)$ 与几乎所有的 $t\ge0$, $T_tx\in D(A)$" 不是本质的. 显然, 当 $D(A)=C$ 时, 该条件自然满足, 因而定理 1 是定理 2 的特殊情形. 熟知, 对于线性半群, 则该条件是平凡的. 对于一般的非线性 Lipschitz 算子半群, 文 [3] 已证明, 若 X 具有 Radon-Nikodym 性质, 则该条件满足.

以下例子表明, 作为 Dahlquist 数的推广, 广义 Dahlquist 数能用于刻划生成元不是 Lipschitz 算子的非线性 Lipschitz 半群的渐近性质, 因而其应用更为广泛.

例 2 设 $C=X=R$. 考虑 C 上的 Lipschitz 算子半群 $\{T_t\}_{t\ge0}$,

$$T_t:C\to C,\quad T_tx=\frac{x}{\sqrt{x^2+(1-x^2)e^{2t}}},\quad x\in C,\quad t\ge0.$$

易知算子 $A:C\to X$, $Ax=-x-x^3$ 为该半群的生成元. 显然, $A\notin L(C,C)$, 因而无法定义其 Dahlquist 数. 但是, 易验证 A 的广义 Dahlquist 数 $\alpha(A)=-1$, 因此由定理 2 知, $L(T_t)\le e^{-t}$, 这也可以由 T_t 的定义直接验证.

注 6 已知, 当 $A\in L(C,X)$ (即 A 是 Lipschitz 算子) 时, 不等式 $\alpha(A)\le\mu(A)$ 恒成立. 而例 2 也表明, 当 $\mu(A)=\infty$ 时, 严格不等式 $\alpha(A)<\mu(A)$ 成立. 一个有趣的问题是, 是否存在 Lipschitz 算子 A (即 $A\in L(C,X)$), 使得 $\alpha(A)<\mu(A)$ 成立.

作为应用实例, 现在考虑如下 Hopfield 型神经网络 [8]

$$\frac{d}{dt}u_i=-u_i+\sum_{j=1}^n w_{ij}g_j(u_j)+I_i,\quad i=1,2,\ldots,n,\tag{7}$$

其中 u_i 为第 i 个神经元的输入, $v_i=g_i(u_i)$ 为输出, $W=(w_{ij})_{n\times n}$ 为神经元之间的连接矩阵, I_i 是第 i 个神经元的外部输入. 这里仅仅假设函数 g_i 单调增, 且 Lipschitz 连续的, 即存在常数 m_i, 使得 $|g_i(r)-g_i(s)|\le m_i|r-s|$, $r,s\in R$.

令 $X=R^n$, 并赋予 l^1- 范数. 定义算子 $A:X\to X$, 为

$$(Au)_i=-u_i+\sum_{j=1}^n w_{ij}g_j(u_j)+I_i,$$

其中 $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)^t$, $Au=((Au)_1,(Au)_2,\ldots,(Au)_n)^t$. 由假设知, $A\in L(X,X)$, 因而 A

生成一个 ω- 型半群 [1], 记为 $\{T_t\}_{t\geq 0}$. 因为, $\forall u,v\in X$, 当 $r>0$ 充分大时

$$\begin{aligned}
\|r(u-v)+Au-Av\| &= \sum_{i=1}^{n}\left|(r-1)(u_i-v_i)+\sum_{j=1}^{n}w_{ij}(g_j(u_j)-g_j(u_j))\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(r-1)|u_i-v_i|+\sum_{j=1}^{n}w_{ij}(g_j(u_j)-g_j(u_j))\,sgn(u_i-v_i)\right] \\
&= (r-1)\sum_{i=1}^{n}|u_i-v_i|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}(g_j(u_j)-g_j(u_j))\,sgn(u_i-v_i) \\
&\leq (r-1)\|u-v\|+\sum_{j=1}^{n}\Big[w_{jj}(g_j(u_j)-g_j(u_j))\,sgn(u_j-v_j) \\
&\quad +(g_j(u_j)-g_j(v_j))\sum_{i\neq j}^{n}w_{ij}\,sgn(u_i-v_i)\Big] \\
&\leq (r-1)\|u-v\|+\sum_{j=1}^{n}|g_j(u_j)-g_j(u_j)|\left[w_{jj}+\sum_{i\neq j}^{n}|w_{ij}|\right],
\end{aligned}$$

其中 $sgn(r)$ 表示实数 r 的符号. 所以 A 的广义 Dahlquist 数 $\alpha(A)$ 满足

$$\alpha(A)\leq -1+\max_{1\leq j\leq n} m_j\left[w_{jj}+\sum_{i\neq j}^{n}|w_{ij}|\right]^{+}\triangleq\gamma,$$

其中 $[t]^{+}=\max\{0,t\}$. 于是, 由定理 2 知, $L(T_t)\leq e^{\gamma t}$. 因而, 当 $\gamma<0$ 时, 算子 T_t $(t>0)$ 是压缩的, 故有唯一的公共不动点 u^*. 显然, u^* 即为网络 (7) 的平衡点, 且满足 $\|u(t)-u^*\|\leq e^{\gamma t}\|u_0-u^*\|$, $t\geq 0$, 其中 $u(t)=T_tu_0$ 是以 u_0 为初值的解. 从而, 平衡点 u^* 是全局指数稳定的.

注 7 文 [8] 在额外假设 "g_i 在 R 上一致有界" 下, 运用传统的 Liapunov 直接法证明了, 当 $\gamma<0$ 时, 网络 (7) 是全局指数稳定的, 但没有给出明确的指数衰减估计.

参 考 文 献

[1] Barbu V., Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff: Leyden, 1976.
[2] Miyadera I., Nonlinear Semigroups (Translated by Choong Y. C. in English), Providence: Amer. Math. Soc., 1992.
[3] Peng J. G., Theoretical Researches on Nonlinear Lipschitz Operators and their Applications, Dissertation for Ph.D. of Xi'an Jiaotong University, 1998 (in Chinese).
[4] Zheng Q., Strongly Continuous Semigroups of Linear Operators, Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology, 1994 (in Chinese).
[5] Pazy A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, New York: Springer-Verlag, 1983.
[6] Peng J. G., Xu Z. B., A novel dual notion of Banach space—Lipschitz dual space, *Acta. Math. Sinica*, 1999, **42**(2): 61–70 (in Chinese).
[7] Peng J. G., Xu Z. B., A novel dual notion of nonlinear operator—Lipschitz dual operator, *Acta Math. Sinica*, 2002, **45**(3): 469–480 (in Chinese).
[8] Liang X. B., Wu L. D., Globally exponential stability of neural networks of type of Hopfield, *Science in China*, 1995, **25A**(5): 523–532 (in Chinese).
[9] Soderlind G., Bounds on nonlinear operators in finite dimensional Banach spaces, *Numer. Math.*, 1986, **50**: 27–44.
[10] Strom T., On logarithmic norms, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1975, **12**(3): 741–753.
[11] Horn R. A., Johnson C. R., Matrx Analysis, London: Cambridge Univ. Press, 1985.

非线性Lipschitz算子半群的渐近性质及其应用

作者：彭济根， 徐宗本
作者单位：西安交通大学应用数学研究中心及信息与系统科学研究所,陕西,西安,710049

刊名：数学学报ISTIC PKU
英文刊名：ACTA MATHEMATICA SINICA
年，卷(期)：2002，45(6)
被引用次数：4次

参考文献(11条)

1. Barbu V Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces 1976

2. Miyadera I Nonlinear Semigroups (Translated by Choong YCin English) 1992

3. Peng J G Theoretical Researches on Nonlinear Lipschitz Operators and their Applications 1998

4. Zheng Q Strongly Continuous Semigroups of Linear Operators 1994

5. Pazy A Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations 1983

6. Peng J G.Xu Z B A novel dual notion of Banach space:Lipschitz dual space 1999(02)

7. Peng J G.Xu Z B A novel dual notion of nonlinear operator-Lipschitz dual operator[期刊论文]-数学学报 2002(03)

8. Liang X B.Wu L D Globally exponential stability of neural networks of type of Hopfield 1995(05)

9. SODERLIND G Bounds on nonlinear operators in finite dimensional Banach spaces 1986

10. Strom T On logarithmic norms 1975(03)

11. HornRA.Johnson C R Matrx Analysis 1985

相似文献(2条)

引证文献(4条)