第45卷第3期　　数 学 学 报　　Vol.45, No.3
2002年5月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　May, 2002

文章编号: 0583-1431(2002)03-0469-12　　文献标识码: A

非线性 Lipschitz 算子的 Lipschitz 对偶算子及其应用

彭济根　徐宗本

(西安交通大学应用数学研究中心及信息与系统科学研究所 陕西 西安 710049)
(Fax: (029)3237910; E-mail: jgpeng@xjtu.edu.cn; zbxu@xjtu.edu.cn)

摘　要　在文 [1] 中我们对非线性 Lipschitz 算子定义了其 Lipschitz 对偶算子，并证明了任意非线性 Lipschitz 算子的 Lipschitz 对偶算子是一个定义在 Lipschitz 对偶空间上的有界线性算子. 本文还进一步证明: 设 C 为 Banach 空间 X 的闭子集，C_L^* 为 C 的 Lipschitz 对偶空间，U 为 C_L^* 上的有界线性算子，则当且仅当 U 为 w^*-w^* 连续的同态变换时，存在 Lipschitz 连续算子 T, 使 U 为 T 的 Lipschitz 对偶算子. 这一结论的理论意义在于: 它表明一个非线性 Lipschitz 算子的可逆性问题可转化为有界线性算子的可逆性问题. 作为应用，通过引入一个新概念 ——PX- 对偶算子，在一般框架下给出了非线性算子半群的生成定理.

关键词　非线性 Lipschitz 算子; Lipschitz 对偶空间; Lipschitz 对偶算子; PX- 对偶算子; C_0-Lipschitz 半群; 生成元
MR(2000) 主题分类　47H05, 47H12, 47D05
中图分类　O175, O177

A Novel Dual Notion of a Nonlinear Lipschitz Operator: Lipschitz Dual Operator

PENG Ji Gen　XU Zong Ben

(*Research Center for Applied Mathematics, and Institute for Information & System Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China*)
(*Fax:* (029)3237910; *E-mail: jgpeng@xjtu.edu.cn; zbxu@xjtu.edu.cn*)

Abstract　In [1], a dual operator notion of a nonlinear operator, named Lipschitz dual operator, was introduced, and it was mainly shown that the Lipschitz dual operator of any a nonlinear Lipschitz operator in Banach space X is a bounded linear operator on the Lipschitz dual space X_L^* of X. In this paper, we further prove that, for a bounded linear operator U on X_L^*, if and only if U is a w^*-continuous homomorphism, there is a Lipschitz operator T in X such that U is the Lipschitz dual operator of T. It is therefore deduced that the invertibility of any a nonlinear Lipschitz operator is equivalent to the invertibility of its Lipschitz dual operator. As an application example, by developing a new concept, named PX-dual operator, a generation theorem of nonlinear operator semigroup is established.

Keywords　Nonlinear Lipschitz operator; Lipschitz dual space; Lipschitz dual operator; PX-dual operator; C_0-Lipschitz semigroup; Generator

收稿日期: 2000-01-04; 接受日期: 2001-03-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10101019); 西安交通大学理科基金资助项目

MR(2000) Subject Classification 47H05, 47H12, 47D05
Chinese Library Classification O175, O177

1 引言

设 X,Y 为 Banach 空间, $C\subset X$ 为闭子集. 映射 $T:C\to Y$ 称为 Lipschitz 算子, 如果存在常数 $M>0$, 使

$$\|Tx-Ty\|\le M\|x-y\|,\ \ \forall\, x,y\in C.$$

记 $\mathrm{Lip}(C,Y)$ 为所有映 C 到 Y 的 Lipschitz 算子全体, 则由文 [1,2] 知, $\mathrm{Lip}(C,Y)$ 是以

$$L(T)=\sup_{x,y\in C,\,x\ne y}\frac{\|Tx-Ty\|}{\|x-y\|},\ \ T\in \mathrm{Lip}(C,Y) \tag{1}$$

为半范数的赋范线性空间. 进一步地, 对任意取定的 $x_0\in C$, 子空间 $\mathrm{Lip}_{x_0}(C,Y)=\{T\in \mathrm{Lip}(C,Y):T(x_0)=0\}$ 是以 $L(\cdot)$ 为范数的 Banach 空间.

本文主要考虑 Banach 空间 $\mathrm{Lip}_{x_0}(C,Y)$. 为方便起见, 不妨设 $x_0=0$ (否则, 考虑 $\overline{C}=C-x_0$, $\overline{T}(x)=T(x+x_0)-T(x_0)$).

定义[1] 若 Y 为数域 $\mathbf{R}$, 则称 Banach 空间 $\mathrm{Lip}_0(C,\mathbf{R})$ 为 C 的 Lipschitz 对偶空间, 并简记为 C_L^*.

设 $T\in \mathrm{Lip}_0(C,Y)$, 定义映射 $T_L^*:Y_L^*\to C_L^*$ 为

$$(T_L^*f)(x)=f(Tx),\ \ \forall\, f\in Y_L^*,\ \ x\in C,$$

则称 T_L^* 为 T 的 Lipschitz 对偶算子.

在文 [1] 中我们已证明, Lipschitz 对偶空间 C_L^* 是某个包含 C 的 Banach 空间的对偶空间 (即, 存在 Banach 空间 G, 使 $C_L^*=G^*, C\subset G$ 在等距嵌入意义下), 对任意一个非线性 Lipschitz 算子 T, 其 Lipschitz 对偶算子 T_L^* 是定义在 Y_L^* 上的有界线性算子, 且 $\|T_L^*\|=L(T)$.

因此, 引入 "Lipschitz 对偶空间与 Lipschitz 对偶算子" 的意义在于: 一个非线性 Lipschitz 算子的诸多性质可望借助于其 Lipschitz 对偶算子的线性有界 —— 这一特性得以研究. 事实上, 文 [1,3] 以实例表明了这一方法的有效性.

在运用这种 Lipschitz 对偶方法研究非线性算子的性质时, 常常遇到这样一个逆问题: 既然一个非线性 Lipschitz 算子的 Lipschitz 对偶算子是定义在 Lipschitz 对偶空间上的有界线性算子, 那么, 对于一个定义在 Lipschitz 对偶空间上的有界线性算子 U, 在什么条件下存在非线性 Lipschitz 算子 T, 使得 U 为 T 的 Lipschitz 对偶算子, 即 $U=T_L^*$? 比如, 对于非线性 Lipschitz 算子 T, 当运用其 Lipschitz 对偶算子 T_L^* 的线性有界 —— 这一特性研究其可逆性时, 如果已知 T_L^* 是可逆的, 那么总希望存在 $S\in \mathrm{Lip}_0(Y,X)$, 使 $(T_L^*)^{-1}$ 是 S 的 Lipschitz 对偶算子 (即 $(T_L^*)^{-1}=S_L^*$), 从而 T 可逆, 且 S 为 T 的逆算子.

本文主要是解决这一问题, 即给出这样一个充分必要条件: 对于一个定义在 Lipschitz 对偶空间上的有界线性算子 U, 当且仅当其满足这个条件时, 存在非线性 Lipschitz 算子 T 使 $U=T_L^*$. 由此证明非线性 Lipschitz 算子 T 可逆当且仅当其 Lipschitz 对偶算子 T_L^* 可逆. 作为应用, 本文第三节通过引入一个新概念 ——PX- 对偶算子, 建立非线性算子半群的生成定理.

若不作特别声明，文中记 X 为 Banach 空间， C 为 X 的闭子集 (不假定有界); 记 X^* 为 X 的对偶空间 (共轭空间), 并记 $\langle f,x\rangle$ 为泛函 $f\in X^*$ 在 $x\in X$ 处的取值; 记 $B(X)$ 为 X 中有界线性算子全体，并对每个 $S\in B(X)$, 记 S^* 为 S 的对偶算子 (共轭算子); $\mathbf{R}$ 为实数或复数域， $\mathbf{N}$ 为整数集.

2 主要结果

设 $\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$ 为所有定义在 C 上的 Lipschitz 连续函数全体， $e\in\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$ 为 1- 函数 (即 $e(x)\equiv 1,\forall x\in C$).

回想，算子 $U:\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})\longmapsto\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$ 称为 $\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$ 上的同态，如果 $\forall f,g\in\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$, 当 $f\cdot g\in\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$ 时

$$U(f\cdot g)=U(f)\cdot U(g),$$

其中 $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x),x\in C$.

引理 1　设 U 为 C_L^* 上的有界线性算子，定义算子 $U_1:\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})\longmapsto\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$ 为

$$U_1f=U(f-f(0)e)+f(0)e,\quad f\in\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R}),$$

则 (i) U_1 是 $\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$ 上的有界线性算子； (ii) U_1 为 $\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$ 上的同态当且仅当 U 为 C_L^* 上的同态.

证明　(i) 注意到， $f\in\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})\Longleftrightarrow f-f(0)e\in C_L^*$.

(ii) 设 U 为 C_L^* 上的同态，并令 $f,g\in\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$, $f\cdot g\in\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$. 由于

$$f-f(0)e\in C_L^*,\quad g-g(0)e\in C_L^*,\quad \text{且 } (f-f(0)e)\cdot(g-g(0)e)\in C_L^*,$$

所以，由 U 的线性可得

$$\begin{aligned}U_1f\cdot U_1g&=[U(f-f(0)e)+f(0)e]\cdot[U(g-g(0)e)+g(0)e]\\&=U(f-f(0)e)\cdot U(g-g(0)e)+g(0)\,U(f-f(0)e)\\&\quad+f(0)\,U(g-g(0)e)+f(0)g(0)e\\&=U(f\cdot g-f(0)g-g(0)f+f(0)g(0)e)+f(0)g(0)e\\&\quad+g(0)\,U(f-f(0)e)+f(0)\,U(g-g(0)e)\\&=U(f\cdot g-f(0)g(0)e)+f(0)g(0)e\\&=U_1(f\cdot g),\end{aligned}$$

即 U_1 是 $\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$ 上的同态.

反之，设 U_1 为 $\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$ 上的同态. 注意到 $C_L^*\subset\mathrm{Lip}(C,\mathbf{R})$, 且 $\forall f\in C_L^*, U_1f=Uf$, 即知 U 为 C_L^* 上的同态. 证毕.

引理 2[1]　(i) 存在 Banach 空间 G, 使得 $G^*=C_L^*$, 并且 $\forall x\in C$, 若定义 $j(x)$ 为

$$\langle f,j(x)\rangle=f(x),\quad\forall f\in C_L^*,$$

则 $j(x)\in G$.

(ii) 设 $\{f_n\}\subset C_L^*$ 为任意给定的有界序列, 则 $\{f_n\}$ 按 w^*- 拓扑收敛于 $f\in C_L^*$ 的充分必要条件是, $\forall x\in C$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$.

引理 3[1] 设 $T\in \mathrm{Lip}_0(C,C)$, 则 T 的 Lipschitz 对偶算子 T_L^* 是 w^*- w^* 连续的有界线性算子 (即, 若 $\{f_n\}\subset C_L^*$ 按 w^*- 拓扑收敛于 $f\in C_L^*$, 则 $\{T_L^*f_n\}$ 按 w^*- 拓扑收敛于 T_L^*f).

定理 1 设 U 为 C_L^* 上的有界线性算子, 则下列命题等价:

(i) 存在算子 $T\in \mathrm{Lip}_0(C,C)$, 使 U 为 T 的 Lipschitz 对偶算子, 即 $U=T_L^*$.

(ii) U 是 w^*- w^* 连续的同态.

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii) 设 $f,g\in C_L^*$ 且 $f\cdot g\in C_L^*$, 则由 Lipschitz 对偶算子的定义知, $\forall x\in C$,

$$U(f\cdot g)(x)=T_L^*(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(Tx)=f(Tx)\,g(Tx)=(T_L^*f)(x)\,(T_L^*g)(x)=\big((Uf)\cdot(Ug)\big)(x),$$

即知 U 为同态. 另外, 由引理 3 知, U 是 w^*- w^* 连续的.

(ii)$\Longrightarrow$(i) 对任意给定的 $x_0\in C$, 定义 X^* 上的泛函 j 为

$$j(f)=\big(U(f\,|_C)\big)(x_0),\quad f\in X^*,$$

其中 $f\,|_C$ 为 f 在 C 上的限制, 则易知 $j\in X^{**}$. 另外, 设 $\{f_n\}\subset X^*$ 按 w^*- 拓扑收敛于 $f\in X^*$, 则由引理 2 知, $\{f_n\,|_C\}\subset C_L^*$ 按 w^*- 拓扑收敛于 $f\,|_C\in C_L^*$. 又因为 U 是 w^*- w^* 连续的, 所以 $\{U(f_n\,|_C)\}$ 按 w^*- 拓扑收敛于 $U(f\,|_C)$. 于是, $j\in X^{**}$ 是 w^*- 连续的. 从而由连续线性泛函表现定理 [4] 知, 存在唯一的 $y_0\in X$, 使 $\forall f\in X^*$, $j(f)=f(y_0)$, 从而 $(U(f\,|_C))(x_0)=f(y_0)$.

下证 $y_0\in C$. 为此, 令 $D=C\cup\{y_0\}$, U_1 如引理 1 中一样由 U 确定, 并令

$$M=\{f\in \mathrm{Lip}(D,\mathbf{R}):(U_1f\,|_C)(x_0)=f(y_0)\}.$$

则由以上证明知, $X^*+R\triangleq\{f+\alpha e: f\in X^*,\alpha\in\mathbf{R}\}$ 在 D 上的限制 (即每个元素限制在 D 上取值) 包含于 M. 另外, 因为 U 是 w^*-w^* 连续的, 所以, $M\subset \mathrm{Lip}(D,\mathbf{R})$ 为 w^*- 闭子空间 (即, 若 $\{f_\sigma\}\subset M, f_\sigma(x)\to f(x)$ $(\forall x\in D)$, 则 $f\in M$).

设 $f\in \mathrm{Lip}(D,\mathbf{R})$, $k\in N$(整数集), 定义 D 上的泛函 R_kf 如下

$$(R_kf)(x)=\begin{cases} k, & f(x)>k;\\ f(x), & |f(x)|\le k;\\ -k, & f(x)<-k,\end{cases}$$

则易证, $R_kf\in \mathrm{Lip}(D,\mathbf{R})$ 且 $L(R_kf)\le L(f)$. 另外, $|R_kf|=R_k|f|$ 且 $\forall x\in D$, $(R_kf)(x)\to f(x)$ $(k\to\infty)$.

给定常数 $L>0$, 取多项式 $P_n(t)=\sum_i\lambda_i(n)t^i$, 使得 $\forall n>1$,

$$\sup_{-k\le t\le k}|P_n'(t)|\le L\ \text{ 且 }\ \forall t\in[-k,k],\quad \lim_{n\to\infty}P_n(t)=|t|.$$

$\forall f\in M$, 令 $P_n(R_kf)=\sum_i\lambda_i(n)(R_kf)^i$ (其中 $(R_kf)^i(x)=((R_kf)(x))^i$), 则 $\forall x\in D$, $k\in N$,

$$(P_n(R_kf))(x)\to|(R_kf)(x)|,\quad n\to\infty,$$

即, 序列 $\{P_n(R_kf)-P_n((R_kf)(0))e\}_{n\in N}\in D_L^*$ 按 w^*- 拓扑收敛于 $|R_kf|-|(R_kf)(0)|e\ (n\to\infty)$. 于是, 由于 U 是 w^*-w^* 连续的且 U_1 是同态, 因此, $\forall f\in M$,

$$\begin{aligned}U_1(|R_kf|_C)(x_0)&=\lim_{n\to\infty}U_1(P_n(R_nf)|_C)(x_0)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_i\lambda_i(n)(U_1(R_kf|_C)(x_0))^i\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_i\lambda_i(n)((U_1f|_C)(x_0)-(U_1(f-R_kf)|_C)(x_0))^i\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_i\lambda_i(n)(f(y_0)-(U_1(f-R_kf)|_C)(x_0))^i\\&=\lim_{n\to\infty}P_n(f(y_0)-(U_1(f-R_kf)|_C)(x_0))\\&=|f(y_0)-(U_1(f-R_kf)|_C)(x_0)|.\end{aligned}$$

又因为, 当 $k\to\infty$ 时

$$U_1((|R_kf|)|_C)(x_0)\to U_1(|f|_C|)(x_0),\quad U_1((f-R_kf)|_C)(x_0)\to 0,$$

所以, 结合以上两式可得, $U_1(|f|_C|)(x_0)=|f(y_0)|$, 即 $|f|\in M$.

设 $f,g\in M$, 则由以上证明知

$$f\vee g\triangleq\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)\in M;$$
$$f\wedge g\triangleq\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)\in M,$$

于是, M 在序关系 “$f\le g\Longleftrightarrow\forall x\in D,\ f(x)\le g(x)$” 下成为一个格 [5].

任意给定 $f\in \mathrm{Lip}(D,\mathbf{R})$, $L(f)\le 1$. $\forall x,y\in D$, 取 $g\in X^*$, 使 $g(x)-g(y)=f(x)-f(y)$. 令

$$f_{xy}=g+f(y)e-g(y)e,$$

则易知, $f_{xy}(x)=f(x), f_{xy}(y)=f(y)$. 另外可证

$$f=\bigwedge_{x\in D}\bigvee_{y\in D}f_{xy}. \tag{2}$$

设 $x\in D$, 令 $\Gamma_x=\{G\subset D:\bigvee_{y\in G}f_{xy}\in M\}$. 因为 $\forall x,y\in D$, $f_{xy}\in M$, 所以 $\forall x\in D,\Gamma_x\ne\phi$. 设 $\beta\subset\Gamma_x$ 为全序子集, 令 $Q=\cup\{G:G\in\beta\}$, 则网 $\{\bigvee_{y\in G}f_{xy}:G\in\beta\}_{x\in D}$ 点点收敛于 $\bigvee_{y\in Q}f_{xy}$. 又由 M 的 w^*- 闭性知, $\bigvee_{y\in Q}f_{xy}\in M$. 于是, Γ_x 的每个全序子集有上确界. 从而由 Zorn 引理知, Γ_x 有极大元 G_0. 另外, 用反证法易证 $G_0=D$, 因而 $\forall x\in D,\bigvee_{y\in D}f_{xy}\in M$.

进一步可证明 $f=\bigwedge_{x\in D}\bigvee_{y\in D}f_{xy}\in M$. 从而, 由 $f\in \mathrm{Lip}(D,\mathbf{R})$ 的任意性知, $M=\mathrm{Lip}(D,\mathbf{R})$.

设 $f(x)=\inf\{\|z-x\|:z\in C\}$, 则易证 $f\in\mathrm{Lip}(D,\mathbf{R})$ 且 $f|_C=0$. 假设 $y_0\notin C$, 则由 C 的闭性知, $f(y_0)>0$. 但是, 由于 $f\in M$, 因而 $(U_1f|_C)(x_0)=f(y_0)$, 即 $f(y_0)=0$, 矛盾. 于是 $y_0\in C$, 即 $D=C$.

到此已证明: $\forall x \in C$, 存在唯一的 $y \in C$, 使得 $\forall f \in C_L^*$, $(Uf)(x) = f(y)$. 若令 $y = Tx$, 则易知 $T \in \mathrm{Lip}_0(C,C)$ 且 $T_L^* = U$. 证毕.

注 1 若 C 有界, 并在 $\mathrm{Lip}_0(C,R)(= C_L^*)$ 中赋予如下范数

$$\|T\| = \max\left\{L(T), \sup_{x\in C}\|T(x)\|\right\},$$

则在乘法 $f\cdot g$ 下 $\mathrm{Lip}_0(C,\mathbf{R})$ 成为一个交换 Banach 代数. 在这种情况下, Weaver [6] 运用交换代数的方法讨论了 $\mathrm{Lip}_0(C,\mathbf{R})$ 上同态变换的表示问题. 值得注意的是, 当 C 无界时, $\mathrm{Lip}_0(C,\mathbf{R})$ 不成为一个代数. 而定理 1 是不假设 C 有界的. 因此, 就同态变换的表示问题而言, 定理 1 不失为文 [6] 的结论的完善.

当 $C = X$ 时, 应用连续线性泛函表现定理可证明如下结论.

定理 2 设 U 为 X_L^* 上的有界线性算子. 如果 U 是 w^*- w^* 连续的, 则存在算子 $T \in \mathrm{Lip}_0(X,X)$, 使得 $\forall f \in X^*, Uf = T_L^* f$.

证明 设 $x \in X$, 并定义 X^* 上的泛函 j_x 为

$$j_x(f) = (Uf)(x), \quad f \in X^*.$$

则易知 $j_x \in X^{**}$. 又因为 U 是 w^*- w^* 连续的, 所以 j_x 是 w^*- 连续的. 于是由连续线性泛函表现定理知, 存在唯一的 $y \in X$, 使得 $\forall f \in X^*, f(y) = j_x(f)$. 若令 $y = Tx$, 则 $\forall f \in X^*$, $f(Tx) = (Uf)(x)$. 显然, $T0 = 0$. 另外, $\forall x_1, x_2 \in X$,

$$\begin{aligned}
\|Tx_1 - Tx_2\| &= \sup_{f\in X^*, \|f\|=1} f(Tx_1 - Tx_2) \\
&= \sup_{f\in X^*, \|f\|=1} [(Uf)(x_1) - (Uf)(x_2)] \\
&\le \sup_{f\in X^*, \|f\|=1} L(Uf)\|x_1 - x_2\| \\
&\le \sup_{f\in X^*, \|f\|=1} \|U\|\, L(f)\|x_1 - x_2\| \\
&= \|U\| \cdot \|x_1 - x_2\|,
\end{aligned}$$

由此即知, $T \in \mathrm{Lip}_0(X,X)$. 证毕.

推论 1 设 $T \in \mathrm{Lip}_0(C,C)$, 则 T 可逆 (即 T 是 $1-1$ 的, 且 $T^{-1} \in \mathrm{Lip}_0(C,C)$) 的充分必要条件是, $T_L^* \in B(C_L^*)$ 是可逆的.

证明 设 T 可逆, 则易验证 T^{-1} 的 Lipschitz 对偶算子 $(T^{-1})_L^*$, 满足

$$T_L^*(T^{-1})_L^* = (T^{-1})_L^* = I.$$

即 T_L^* 可逆, 且 $(T_L^*)^{-1} = (T^{-1})_L^*$.

反之, 设 T_L^* 可逆. 由定理 1 知, T_L^* 是 w^*- w^* 连续的, 因此 $(T_L^*)^{-1}$ 也是 w^*- w^* 连续的. 另外, 由引理 3 知, T_L^* 是同态, 因此, $\forall f, g \in C_L^*$, 当 $f\cdot g \in C_L^*$ 时

$$f\cdot g = T_L^*((T_L^*)^{-1}f)\cdot T_L^*((T_L^*)^{-1}g) = T_L^*((T_L^*)^{-1}f)\cdot (T_L^*)^{-1}g).$$

这表明 $(T_L^*)^{-1}$ 是同态. 于是由定理 1 知，存在 $S \in \mathrm{Lip}_0(C,C)$, 使得 $S_L^* = (T_L^*)^{-1}$. 易证 $S \circ T = T \circ S = id$ (恒等算子), 从而 T 可逆. 证毕.

推论 1 表明，非线性 Lipschitz 算子 T 的可逆性与其 Lipschitz 对偶算子 T_L^* 的可逆性是一致的. 而后者是一个有界线性算子. 因此，通过 Lipschitz 对偶算子的引入，一个非线性 Lipschitz 算子的可逆性问题完全可转化为一个有界线性算子的可逆性问题.

3 非线性算子半群的生成的应用

生成性问题是算子半群理论中重要的研究课题之一. 对于线性算子半群，正是由于 Hille 与 Yosida 建立的生成性定理 [7,8], 半群的研究才得以展开，从而建立了较完善的理论. 对于非线性算子半群，目前的研究主要集中于与耗散算子相关联的压缩半群 [9,10]. 如何在更一般的框架下研究非线性算子半群？这成为广泛关注的问题. 而半群的生成性是该问题的焦点之一.

这一节，我们将运用有关 Lipschitz 对偶算子的结论，特别是定理 1, 对非线性算子半群的生成性问题作以探讨. 主要是通过引入"PX- 对偶算子"—— 这一新概念，将线性算子半群的生成条件用于非线性算子半群的生成性刻画. 有关线性算子半群的资料参见文 [7,8,11].

定义 1 算子族 $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathrm{Lip}_0(C,C)$ 称为 C_0-Lipschitz 半群，如果

(i) $T(0) = I, T(t)T(s) = T(s+t)$ $(\forall t, s \geq 0)$;

(ii) $\forall x \in C, T(t)x : [0,\infty) \longmapsto X$ 是连续的.

进一步地，若存在常数 M, w, 使得 $L(T(t)) \leq M\,\mathrm{e}^{wt}$ $(\forall t \geq 0)$, 则称 $\{T(t)\}$ 为指数有界的 C_0-Lipschitz 半群.

另外，算子 $A : D(A) \subset C \longmapsto X$ 称为 $\{T(t)\}$ 的生成元，如果

$$\begin{cases} Ax = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t}, \\ D(A) = \left\{x \in C : \text{极限} \ \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} \ \text{存在}\right\}. \end{cases}$$

显然，若 $L(T(t)) \leq 1$ $(\forall t \geq 0)$, 则 $\{T(t)\}$ 为压缩半群；若 $C = X$, 且每个 $T(t)$ 退化为有界线性算子，则 $\{T(t)\}$ 为 (线性)C_0- 半群.

易证明，若 A 为指数有界 C_0-Lipschitz 半群 $\{T(t)\}$ 的生成元，则 $\forall x \in D(A), u(t) = T(t)x$ 为初值问题

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad u(0) = x$$

的唯一强解.

为探讨 C_0-Lipschitz 半群的生成性，引入如下一个新概念：

定义 2 设算子 $A : D(A) \subset C \to X$ 满足 $\overline{D(A)} = C$, 且 $\forall x \in D(A)$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < t < \delta$ 时， $x + tAx \in C$, 则如下定义的算子 $A_p : D(A_p) \subset C_L^* \longmapsto C_L^*$,

$$\begin{cases} A_p f(x) = \lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{f(x+rAx) - f(x)}{r}, \quad f \in D(A_p), \quad x \in D(A), \\ D(A_p) = \left\{f \in C_L^* : \exists g \in C_L^* \ \text{使} \ \forall x \in D(A), \ \ g(x) = \lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{f(x+rAx) - f(x)}{r}\right\} \end{cases}$$

称为 A 的 PX- 对偶算子.

注 2 为保证由每个 $f\in D(A_p)$ 所确定的 A_pf 是唯一的, 条件 "$\overline{D(A)}=C$" 是必需的.

引理 4[3] PX- 对偶算子有如下的基本性质:

(i) A_p 是 C_L^* 上的线性算子;

(ii) 设 $f,g\in D(A_p)$, 则 $f\cdot g\in D(A_p)$ 的充要条件是 $A_pf\cdot g+f\cdot A_pg\in C_L^*$, 并且当 $f\cdot g\in D(A_p)$ 时

$$A_p(f\cdot g)=A_pf\cdot g+f\cdot A_pg; \tag{3}$$

(iii) 若 $A\in \mathrm{Lip}_0(X,X)$, 则 A_p 是 w^*- 稠定的 w^*-w^* 闭算子, 并且 $\forall f\in X^*, A_pf=f\circ A$;

(iv) 设 $D(t)=(T(t))_L^*$ 为 $T(t)$ 的 Lipschitz 对偶算子, 则由引理 3 易知, $\{D(t)\}$ 是 C_L^* 上的 C_0^*- 半群 [7,11] (即每个 $D(t)$ 是 C_L^* 上 w^*-w^* 连续的有界线性算子, $\{D(t)\}$ 满足半群关系, 并且 $\forall f\in C_L^*, D(t)f:[0,\infty)\longmapsto C_L^*$ 是 w^*- 连续的). 若 A 为 C_0-Lipschitz 半群 $\{T(t)\}$ 的生成元, 则 A_p 为 $\{D(t)\}$ 的 w^*- 生成元.

引理 5 设 A_p 为算子 A 的 PX- 对偶算子, $r\in C^\infty(\mathbf{R})$ 是具有紧支集的光滑函数, 则 $\forall f\in D(A_p), r\circ f\in C_L^*$ 且 $\forall x\in D(A)$,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{r\circ f(x+tAx)-r\circ f(x)}{t}=r'(f(x))\,A_pf(x).$$

特别, 当 C 为有界集时, $r\circ f\in D(A_p)$ 且 $A_p(r\circ f)=r'(f(\cdot))\,A_pf$.

证明 由于 r 光滑且具有紧支集, 因此 $r\circ f\in C_L^*$. 另外, $\forall x\in D(A)$,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{r\circ f(x+tAx)-r\circ f(x)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{r(f(x+tAx))-r(f(x))}{t}=r'(f(x))\,A_pf(x).$$

特别, 当 C 为有界集时, 因为 $r'(f(\cdot))\,A_pf\in C_L^*$, 所以由定义 2 知, $r\circ f\in D(A_p)$ 且 $A_p(r\circ f)=r'(f(\cdot))\,A_pf$. 证毕.

注 3 由引理 4 易知, 对每个 $f\in D(A_p)$, 可选取序列 $\{f_n\}\subset C_L^*$ 满足: $\forall n\in\mathbf{N}$, $\sup_{x\in C}|f_n(x)|<\infty$, 并使得 $\{f_n\}$ 按 w^*- 拓扑收敛于 f.

事实上, 选取具有紧支集的光滑函数列 $\{r_n\}\subset C^\infty(\mathbf{R})$ 为

$$r_n(s)=\begin{cases} s, & |s|\le n;\\ \phi_n(s), & n<|s|<n+\dfrac{1}{n};\\ 0, & |s|\ge n+\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

其中 ϕ_n 光滑, 并使得 $r_n\in C^\infty(\mathbf{R})$. 易证明, $\{r_n\}$ 满足 $\forall s\in\mathbf{R}, \lim_{n\to\infty}r_n(s)=s$.

令 $f_n=r_n\circ f$, 则 $\{f_n\}$ 即为所求.

引理 6 设 $A:D(A)\subset X^*\to X^*$ 为 w^*- 稠定的 w^*-w^* 闭线性算子, 并且, 存在 $w\in\mathbf{R}$, 使得 $\forall\lambda>w,\lambda\in\rho(A)$ (A 的预解集), 则存在 X 中的闭稠定线性算子 $B:D(B)\subset X\to X$, 使得 $B^*=A$.

证明 由于 A 是 w^*-w^* 闭, 因此, 易证 $(\lambda I-A)^{-1}$ ($\forall\lambda>w$) 是 w^*-w^* 连续的. 于是, 由线性泛函表示定理知, 存在 X 上的有界线性算子 J_λ, 使 $J_\lambda^*=(\lambda I-A)^{-1}$.

因为, $\forall\lambda,\mu>w$,

$$J_\lambda^*-J_\mu^*=(\lambda I-A)^{-1}-(\mu I-A)^{-1}=(\mu-\lambda)J_\lambda^*J_\mu^*,$$

所以 $\{J_\lambda^*\}_{\lambda>w}$ 是伪预解式.

下证 $\forall\lambda>w, N(J_\lambda)=\{0\}, \overline{R(J_\lambda)}=X$, 其中 J_λ^* 与 $R(J_\lambda)$ 分别表示 J_λ 的零空间与值域.

设 $x\in X, J_\lambda x=0$, 则 $\forall x^*\in X^*$,

$$0=\langle x^*, J_\lambda x\rangle=\langle J_\lambda^* x^*, x\rangle=\langle(\lambda I-A)^{-1}x^*, x\rangle,$$

即 $\forall f\in D(A), \langle f,x\rangle=0$. 又因为 $D(A)$ 是 w^*- 稠密的, 所以 $x=0$, 也即 $N(J_\lambda)=0$.

假设存在 $x\in X\setminus\overline{R(J_\lambda)}$, 则由 Hahn-Banach 定理知: 存在 $0\neq x^*\in X^*$, 使 $x^*(\overline{R(J_\lambda)})=0$. 于是, $\forall x\in X$,

$$0=\langle J_\lambda x; x^*\rangle=\langle x,(\lambda I-A)^{-1}x^*\rangle,$$

这表明 $(\lambda I-A)^{-1}x^*=0$, 从而 $x^*=0$. 但这与 $x^*\neq 0$ 相矛盾. 这一矛盾表明: $\overline{R(J_\lambda)}=X$.

到此已证明: $\{J_\lambda\}$ 是满足条件 $N(J_\lambda)=\{0\}, \overline{R(J_\lambda)}=X$ 的伪预解式, 于是由文 [13] 知, 存在 X 中的闭稠定线性算子 $B: D(B)\subset X\to X$, 使得 $(\lambda I-B)^{-1}=J_\lambda$, 从而

$$(\lambda I-B^*)^{-1}=((\lambda I-B)^{-1})^*=(\lambda I-A)^{-1},$$

即得 $B^*=A$. 证毕.

定理 3 设 $A: D(A)\subset C\to C$ 为稠定的算子 (即 $\overline{D(A)}=C$), A_p 为 A 的 PX- 对偶算子. 若下列条件之一满足:

(i) (Hille-Yosida-Phillips): A_p 是 w^*- 稠定的 w^*-w^* 闭算子, 并且存在常数 M, w, 使 $\forall\lambda>w, \lambda\in\rho(A_p)$ (A_p 的正则集), 且 $\forall\lambda>w, n\in N$,

$$\|(\lambda I-A_p)^{-n}\|\leq\frac{M}{(\lambda-w)^n};$$

(ii) (Peng-Chung): A_p 是 w^*- 稠定的 w^*-w^* 闭算子, 并且存在常数 M, w, 使 $\forall\lambda>w, \lambda\in\rho(A_p)$, 且 $\forall\lambda>0, n\in N$,

$$\begin{cases}\lambda\|(\lambda+w-A_p)^{-1}\|\leq M,\\ \lambda\left\|\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^j}{j!}\,\mathrm{e}^{(j-1)n}(jn+n+w-A_p)^{-1}\right\|\leq M,\end{cases}$$

则存在 C 上的一个指数有界 C_0-Lipschitz 半群 $\{T(t)\}$, 满足

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(T(t)x)-f(x+tAx)}{t}=0,\quad f\in D(A_p),\quad x\in D(A). \tag{4}$$

证明 1° 设条件 (i) 成立, 则由文 [7, 定理 2.39] 知, 存在 C_L^* 上的 (线性)C_0^*- 半群 $\{D(t)\}$, $\|D(t)\|\leq M\,\mathrm{e}^{wt}$, 并且其 w^*- 生成元为 A_p.

由 C_0^*- 半群的性质知, 若 $f\in D(A_p)$, 则 $\forall t\geq 0$, $D(t)f\in D(A_p)$, 并且

$$A_p(D(t)f)=\frac{d}{dt}D(t)f,\quad A_pD(t)f=D(t)A_pf, \tag{5}$$

其中求导是在 w^*- 拓扑下进行的, 即 $\forall x \in C$,

$$A_p(D(t)f)(x) = \frac{d\,D(t)f(x)}{dt}.$$

设 $f, g \in D(A_p)$. 选取具有紧支集的光滑函数族 $\{r_n\}$ 如注 4, 则

$$\big(r_n \circ (D(t)f)\big) \cdot \big(r_n \circ (D(t)g)\big) \in C_L^*.$$

给定 $\lambda > 2w, u > 0$, 定义

$$R_{\lambda,n} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\big(r_n \circ (D(t)f)\big) \cdot \big(r_n \circ (D(t)g)\big)\,dt, \tag{6}$$

$$R_{\lambda,n,u} = \int_0^u \mathrm{e}^{-\lambda t}\big(r_n \circ (D(t)f)\big) \cdot \big(r_n \circ (D(t)g)\big)\,dt. \tag{7}$$

其中积分按 w^*- 拓扑定义. 显然, $R_{\lambda,n,u} \xrightarrow{w^*} R_{\lambda,n}$ $(u \to +\infty)$.

因为, $\forall x \in D(A)$, 依 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{s \to 0^+} \frac{R_{\lambda,n,u}(x + sAx) - R_{\lambda,n,u}(x)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0^+} \int_0^u \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{r_n(D(t)f(x + sAx))\, r_n(D(t)g(x + sAx)) - r_n(D(t)f(x))\, r_n(D(t)g(x))}{s}\,dt \\
&= \int_0^u \mathrm{e}^{-\lambda t}[r'_{n,f}(A_pD(t)f)(x) \cdot r_n(D(t)g(x)) + r'_{n,g}(A_pD(t)g)(x) \cdot r_n(D(t)f(x))]\,dt \\
&= \int_0^u \mathrm{e}^{-\lambda t}\left[r'_{n,f}\frac{d\,D(t)f(x)}{dt} \cdot r_n(D(t)g(x)) + r'_{n,g}\frac{d\,D(t)g(x)}{dt} \cdot r_n(D(t)f(x))\right]dt \\
&= \int_0^u \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{d(r_n(D(t)f(x)) \cdot r_n(D(t)g(x)))}{dt}\,dt \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda u}(r_n(D(u)f(x)) \cdot r_n(D(u)g(x)) - r_n(f(x)) \cdot r_n(g(x)) + \lambda R_{\lambda,n,u}(x),
\end{aligned}$$

其中 $r'_{n,f} = r'_n(D(t)f(x))$, $r'_{n,g} = r'_n(D(t)g(x))$, 所以, $R_{\lambda,n,u} \in D(A_p)$ 且

$$A_pR_{\lambda,n,u} = \mathrm{e}^{-\lambda u}(r_n \circ D(u)f) \cdot (r_n \circ D(u)g) - (r_n \circ f) \cdot (r_n \circ g) + \lambda R_{\lambda,n,u}.$$

又因为 A_p 是 w^*-w^* 闭的, 所以, 令 $u \to +\infty$ 可得

$$A_pR_{\lambda,n} = -(r_n \circ f) \cdot (r_n \circ g) + \lambda R_{\lambda,n},$$

即 $R_{\lambda,n} = (\lambda I - A_p)^{-1}((r_n \circ f) \cdot (r_n \circ g))$. 另外, 由线性半群的性质知

$$(\lambda I - A_p)^{-1}((r_n \circ f) \cdot (r_n \circ g)) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} D(t)((r_n \circ f) \cdot (r_n \circ g))\,dt. \tag{8}$$

比较 (6) 式与 (8) 式, 并由 Laplace 变换的唯一性知: $\forall t \geq 0$,

$$D(t)((r_n \circ f) \cdot (r_n \circ g)) = \big(r_n \circ (D(t)f)\big) \cdot \big(r_n \circ (D(t)g)\big).$$

于是, 令 $n \to \infty$, 由 $D(t)$ 的 w^*-w^* 连续性可得: $D(t)(f \cdot g) = D(t)f \cdot D(t)g$(若 $f \cdot g \in C_L^*$). 从而, 由 $D(A_p)$ 的 w^*- 稠密性即知 $D(t)$ 是同态.

因为 $D(t)$ 是 w^*-w^* 连续的, 所以由定理 1 知: 存在 $T(t) \in \mathrm{Lip}_0(C, C)$, 使得 $(T(t))_L^* = D(t)$.

设 $G^* = C_L^*$(见引理 2), 则由文 [7, 定理 2.39] 知, 存在 G 上的 C_0- 半群 $\{S(t)\}$, 使得 $S(t)^* = D(t)$. 因此, 参照引理 2 可得 $\forall x \in C$, $t, s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - T(s)x\| &= \sup_{f \in X^*, \|f\|=1} |f(T(t)x - T(s)x)| \\
&= \sup_{f \in X^*, \|f\|=1} |f(T(t)x) - f(T(s)x)| \\
&\leq \sup_{f \in C_L^*, L(f)=1} |f(T(t)x) - f(T(s)x)| \\
&= \sup_{f \in C_L^*, L(f)=1} |\langle D(t)f - D(s)f, j(x)\rangle| \\
&= \sup_{f \in C_L^*, L(f)=1} |\langle f, (S(t) - S(s))j(x)\rangle| \\
&\leq \|S(t)j(x) - S(s)j(x)\|.
\end{aligned}$$

于是, 由 $S(t)j(x) : [0, \infty) \longmapsto G$ 的连续性知, $T(t)x : [0, \infty) \longmapsto C$ 是连续的. 从而, $\{T(t)\}$ 是 C 上的 C_0-Lipschitz 半群. 另外, 因为 $L(T(t)) = \|D(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{wt}$, 所以 $\{T(t)\}$ 又是指数有界的.

因为 A_p 为 $\{D(t)\}$ 的 w^*- 生成元, 所以, $\forall f \in D(A_p)$, $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0^+} \frac{f(T(t)x) - f(x)}{t} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{D(t)f(x) - f(x)}{t} = A_p f(x) \\
&= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + tAx) - f(x)}{t}.
\end{aligned}$$

由此可得 (4) 式.

2° 设条件 (ii) 成立. 令 $G^* = C_L^*$ (见引理 2), 则由引理 6 知, 存在 G 上的闭稠定线性算子 B 使得: $B^* = A_p$. 从而 $\forall \lambda > w, \lambda \in \rho(B)$, 且

$$\lambda\|(\lambda + w - B)^{-1}\| \leq M; \quad \lambda\left\|\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \mathrm{e}^{(j-1)n}(jn + n + w - B)^{-1}\right\| \leq M.$$

于是, 由文 [12, 定理 3.2] 知, B 生成 G 上的一个 C_0- 半群 $\{S(t)\}$. 记 $\{D(t)\}$ 为 $\{S(t)\}$ 的伴随半群文 [7, 11], 即 $D(t) = S(t)^*$, 则 $A_p = B^*$ 为 $\{D(t)\}$ 的 w^*- 生成元. 因为 $\{D(t)\}$ 是 C_L^* 上的 C_0^*- 半群, 所以, 余下的证明类似于情形 1° 可得. 到此定理证毕.

注 4 熟知, 压缩半群可由一个耗散算子依指数公式得到 [9, 10], 但至于该耗散算子是否为生成元, 在文 [9, 10] 已证明, 只有在非常强的条件下才有肯定的回答.

同样在定理 3 中, 我们不知道 A 是否为 $\{T(t)\}$ 的生成元. 不过由 (4) 式易知, 当 A_p 的定义域 $D(A_p)$ 足够大时, A 即为 $\{T(t)\}$ 的生成元. 比如, 当 $A \in \mathrm{Lip}_0(C, C)$ 时, A 为 $\{T(t)\}$ 的生成元.

注 5 由于 PX- 对偶算子的定义是直观的, 因此可由定理 3 得到 C_0-Lipschitz 半群的多种表示定理. 限于篇幅, 在此不作详述.

后记 引入并研究 Lipschitz 对偶算子的目的就在于, 运用线性算子的丰富内容研究非线性算子的性质. 本文证明的有关 Lipschitz 对偶算子的主要结论表明, 某些关于非线性算子的问题可以转化为相关的线性算子问题. 作为例证, 本文对非线性算子半群的生成性 —— 这一非常重要但又十分困难的研究课题作了尝试性的研究. 但这毕竟是一个尝试, 有许多工作需待完善. 希望本文的工作能起到抛砖引玉的作用.

参 考 文 献

[1] Peng J. G., Xu Z. B., A novel dual notion of Banach space: Lipschitz dual space, *Acta Math. Sinica*, 1999, **42**(1): 61–70 (in Chinese).

[2] Soderlind G., Bounds on nonlinear operators in finite dimensional Banach spaces, *Numer Math.*, 1986, **50**(1): 27–44.

[3] Peng J. G., The Theoretical Researches on Nonlinear Lipschitz Operators and its Applications, Thesis for Ph.D. at Xi'an Jiaotong University, 1998 (in Chinese).

[4] Conway J. B., A Course in Functional Analysis, New York: Springer-Verlag, 1985.

[5] Nieberg P. M., Banach Lattice, New York: Springer-Verlag, 1990.

[6] Weaver N., Order completeness in Lipschitz algebras, *J. Funct Anal.*, 1995, **130**: 118–130.

[7] Zheng Q., Strongly Continuous Semigroups of Linear Operators, Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1994 (in Chinese).

[8] Hille E., Phillips R. S., Functional Analysis and Semigroups, Providence: Amer Math Soc Colloquium Publications, 1957.

[9] Barbu V., Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff: Leyden, 1976.

[10] Miyadera I., Nonlinear Semigroups (translated by Choong Y. C.), Providence: Amer. Math. Soc., 1992.

[11] Bratteli O., Robinson W., Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I: C^* and W^*-Algebras, Algebras, Symmetry Groups, Decomposition of States, New York: Springer-Verlag, 1979.

[12] Peng Jigen, Chung Si-Kit. Laplace transforms and generators of semigroups of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, **126**(8): 2407–2416.

[13] Yosida K., Functional Analysis (5th.edt.), New York: Springer-Verlag, 1978.

非线性Lipschitz算子的Lipschitz对偶算子及其应用

作者： 彭济根， 徐宗本
作者单位： 西安交通大学应用数学研究中心及信息与系统科学研究所陕西,西安,710049
刊名： 数学学报 ISTIC PKU
英文刊名： ACTA MATHEMATICA SINICA
年，卷(期)： 2002，45(3)

参考文献(13条)

1. Peng J G.Xu Z B A novel dual notion of Banach space:Lipschitz dual space 1999(01)

2. SODERLIND G Bounds on nonlinear operators in finite dimensional Banach spaces 1986(01)

3. Peng J G The Theoretical Researches on Nonlinear Lipschitz Operators and its Applications 1998

4. CONWAY J B A Course in Functional Analysis 1985

5. Nieberg P M Banach Lattice 1990

6. Weaver N Order completenes s in Lipschitz algebras 1995

7. Zheng Q Strongly Continuous Semigroups of Linear Operators 1994

8. HILLEE.Phillips R S Functional Analysis and Semigroups 1957

9. Barbu V Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces 1976

10. Miyadera I.translated by Choong Y C) Nonlinear Semigroups 1992

11. Bratteli O.Robinson W Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I: C* and W*-Algebras AlgebrasSymmetry GroupsDecomposition of States 1979

12. Peng Jigen.Chung Si-Kit Laplace transforms and generators of semigroups of operators 1998(08)

13. Yosida K Functional Analysis (5th.edt.) 1978

相似文献(3条)

引证文献(4条)

4.何光 一类Lipschitz算子方程的解及其应用[期刊论文]-内江师范学院学报 2009(12)