第7卷第1期 应用泛函分析学报 Vol. 7 No. 1
2005年3月 ACTA ANALYSIS FUNCTIONALIS APPLICATA March, 2005

文章编号：1009-1327（2005）01-0039-07

关于非线性Lipschitz算子半群生成元的存在性

彭济根

（西安交通大学理学院应用数学研究中心，陕西 西安 710049）

摘要： 基于作者先前提出的Lipschitz对偶思想，对非线性Lipschitz算子半群引入了若干Lipschitz对偶概念，得到了一类非线性Lipschitz算子半群存在生成元的特征刻画．这一结果直接将关于C_0-半群如下结论推广到了非线性情形：C_0-半群具有有界生成元当且仅当它一致连续．

关键词： Lipschitz算子；非线性Lipschitz算子半群；Lipschitz对偶半群；生成元

1 引 言

设X，Y为数域$\mathbf{R}$上的Banach空间，映射T：$X\to Y$称为Lipschitz算子，如果存在正常数M使得

$$\|Tx-Ty\|\leq M\|x-y\|,\quad \forall\, x,\, y\in X \tag{1}$$

记$L(X,\,Y)$为映X入Y的Lipschitz算子全体，并对每个$T\in L(X,\,Y)$定义常数$L(T)$为

$$L(T)=\sup_{x,\,y\in X,\,x\neq y}\frac{\|Tx-Ty\|}{\|x-y\|} \tag{2}$$

则容易证明，非负泛函$L(\cdot)$是$L(X,Y)$上的半范数，从而$(L(X,Y),L(\cdot))$是一个赋半范线性空间．另外，由(2)式易见，$L(T)=0$当且仅当T是常值算子（即，存在$y_0\in Y$使得，$\forall\, x\in X$皆有$Tx=y_0$）．因此，若记Q为常值算子全体，则商空间$L(X,Y)/Q$是Banach空间．事实上，不难验证，对任意给定的$x_0\in X$，$L_{x_0}(X,Y)=:\{T\in L(X,Y):Tx_0=0\}$是Banach空间而且等距同构于$L(X,Y)/Q$[1]．

显然，从X到Y的有界线性算子全体$\mathbf{B}(X,Y)$是$L_0(X,Y)$的一个真子集，特别地，X的对偶空间X^*是$L_0(X,\mathbf{R})$的一个闭子空间．而且，由(2)式易证，若$T\in\mathbf{B}(X,Y)$，则$L(T)$等于T的算子范数$\|T\|$．

定义1 设$\{T_t\}_{t\geq0}\subset L(X,X)$为单参数Lipschitz算子族．如果它满足如下两个性质：

(i) $T_0=I$（I表示X上的恒等算子），$T_tT_s=T_{t+s}(\forall\, t,s\geq0)$；

(ii) $\forall\, x\in X$，映射$t\mapsto T_tx$在$t=0$处连续．

则称$\{T_t\}_{t\geq0}$为X上的Lipschitz算子半群．进一步地，若存在实常数w和$M>0$使得，$L(T_t)\leq Me^{wt}(\forall\, t\geq0)$，则称$\{T_t\}_{t\geq0}$是指数有界的．

注1 不难验证，若$\{T_t\}_{t\geq0}$是X上的Lipschitz算子半群，则$\forall\, x\in X$映射$t\mapsto T_tx$在整个定义区间$[0,+\infty)$上连续．

易见，C_0-半群[2]，非线性压缩半群[3,4]，以及k-一致Lipschitz半群[5]都是特殊形式的Lipschitz算子半群．因而，Lipschitz算子半群形成一个非常广泛的算子半群类．值得指出的是，尽管这些常见的算子半群都是指数有界的，但一般的非线性Lipschitz半群是否指数有界仍然是个公开性问题．不过，不难证明：Lipschitz算子半群$\{T_t\}_{t\geq0}$指数有界的充分必要条件是，

收稿日期：2003-08-04

基金项目：国家自然科学基金(10101019)；西安交通大学理科基金资助

$\limsup_{t\to 0^+} L(T_t) < \infty$ (参见[6]).

定义2 设 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 为 X 上的Lipschitz 算子半群. 若集合

$$D(A)=\left\{x\in X:\exists\ y\in X\ \text{s.t.}\ y=\lim_{t\to 0^+}\frac{T_tx-x}{t}\right\}$$

非空,则称 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 具有生成元 A,其定义为

$$A: D(A)\to X,\quad Ax=\lim_{t\to 0^+}\frac{T_tx-x}{t} \tag{3}$$

周知,作为特殊的Lipschitz 算子半群,C_0- 半群的生成元总是存在的. 但在非线性情形,算子半群生成元的存在性却是一个非常困难的研究课题. 事实上,在文献[3,4]中,作者就以较大篇幅讨论了压缩算子半群生成元的存在性,并给出了非线性压缩半群无生成元的实例. 本文的主要目的是,运用文[1,6]所提出的Lipschitz 对偶方法,通过引入有关非线性Lipschitz 算子半群的若干Lipschitz 对偶概念,给出一类非线性Lipschitz 算子半群存在生成元的特征刻画,从而将有关线性算子半群的如下经典结论推广到了非线性情形:C_0- 半群的生成元有界当且仅当它一致连续(即,按算子范数连续)[2].

2 Lipschitz 对偶及其相关性质

这一节,我们引入有关非线性Lipschitz 算子半群的若干Lipschitz 对偶概念,并证明其相关性质. 为此,设 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 为 X 上的 Lipschitz 算子半群,并定义集合 D_s 如下:

$$D_s=\left\{x\in X:\liminf_{t\to 0^+}\frac{\|T_tx-x\|}{t}<+\infty\right\} \tag{4}$$

引理1 设 X 具有Radon-Nikodym 性质,$\{T_t\}_{t\geq 0}$ 指数有界. 如果 D_s 非空,则 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 的生成元 A 存在,且 $\overline{D(A)}=\overline{D_s}$,其中 $\overline{D}$ 表示集合 D 的闭包.

证明 设 $L(T_t)\leq Me^{wt}$. 任取 $x\in D_s, T>0$. 由定义(4)知,存在序列 $\{t_n\}_{n\in \mathrm{N}}\subset(0,T]$ 使得,t_n 单调收敛于0(当 $n\to+\infty$)且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\|T_{t_n}x-x\|}{t_n}=\liminf_{t\to 0^+}\frac{\|T_tx-x\|}{t}<+\infty \tag{5}$$

进而,存在正常数 α 使得 $\|T_{t_n}x-x\|\leq\alpha\cdot t_n$. 任意给定 $t,s\in[0,T],t>s$. 令 $t-s=k_nt_n+h_n$,其中 k_n 为正整数,$0<h_n<t_n$,则由(5)式可得

$$\begin{aligned}
\|T_tx-T_sx\| &= \|T_sT_{t-s}x-T_sx\|\leq Me^{ws}\|T_{t-s}x-x\|\\
&\leq Me^{ws}\left(\|T_{k_nt_n+h_n}x-T_{k_nt_n}x\|+\|T_{k_nt_n}x-x\|\right)\\
&\leq Me^{ws}\left(Me^{wk_nt_n}\|T_{h_n}x-x\|+\sum_{j=0}^{k_n-1}\|T_{(j+1)t_n}x-T_{jt_n}x\|\right)\\
&\leq M^2e^{wt}\|T_{h_n}x-x\|+Me^{ws}\sum_{j=0}^{k_n-1}Me^{wjt_n}\|T_{t_n}x-x\|\\
&\leq M^2e^{wt}\left(\|T_{h_n}x-x\|+\alpha k_nt_n\right)\\
&\leq M^2e^{wt}(\|T_{h_n}x-x\|+\alpha(t-s))
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$,则得

$$\|T_tx-T_sx\|\leq M^2e^{wt}\alpha(t-s)$$

即,映射 $t\mapsto T_tx$ 在 $[0,T]$ 中是Lipschitz 连续的. 因此,由 X 的Radon-Nikodym 性质与 $T>0$ 的任意性知,T_tx 在 $[0,\infty)$ 中几乎处处可微,即,

$$\frac{\mathrm{d}T_t x}{\mathrm{d}t} = \lim_{r\to 0^+}\frac{T_{t+r}x - T_t x}{r} = \lim_{r\to 0^+}\frac{T_r(T_t x) - T_t x}{r}, \quad \text{a.e.}.$$

于是，由定义 2 可知，$T_t x \in D(A)$ 在 $[0,\infty)$ 中几乎处处成立. 令 $t\to 0^+$，则 $T_t x \to x$，因而 $x\in \overline{D(A)}$. 因此，由 $x\in D_s$ 的任意性知，$\overline{D_s}\subset\overline{D(A)}$.

反向包含关系“$\overline{D(A)}\subset\overline{D_s}$”直接由定义可得. 证毕.

设 $T\in L(X,X)$. 定义算子 $T^{l*}: L(X,\mathbf{R})\to L(X,\mathbf{R})$ 为

$$(T^{l*}f)(x) = f(Tx), \quad f\in L(X,R),\ x\in X \tag{6}$$

以下称 T^{l*} 为算子 T 的 Lipschitz 对偶算子[8]，它具有下面基本性质.

引理 2[8]　设 $T\in L(X,X)$，则 T^{l*} 是有界线性算子，且它的范数等于 $L(T)$.

设 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 为 X 上的Lipschitz 算子半群. 记 $D_t = T_t^{l*}$，则由引理2 知，D_t 是空间 $L(X,\mathbf{R})$ 上的有界线性算子. 进一步可验证，单参数算子族 $\{D_t\}_{t\geq 0}$ 具有如下两个性质：

(i) $D_0 = I$，$D_t D_s = D_{t+s}(\forall\, t,\ s>0)$；

(ii) $\forall\, f\in L(X,\mathbf{R})$，映射 $t\mapsto D_t f$ 满足：$\forall\, x\in X$，$(D_t f)(x)\to(D_s f)(x)$ (as $t\to s$).

即，$\{D_t\}_{t\geq 0}$ 是一个有界线性算子半群，它在 $L(X,\mathbf{R})$ 的某种“弱”拓扑下连续. 文[1,9]称 $\{D_t\}_{t\geq 0}$ 为 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 的 Lipschitz 对偶半群，定义集合 $D(B)$ 为

$$D(B)=\left\{f\in L(X,R):\exists\, g\in L(X,R)\ \text{s.t.}\ g(x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{(D_t f)(x)-f(x)}{t},\ \forall\, x\in X\right\} \tag{7}$$

则易知 $D(B)$ 是非空的. 事实上，任取 $f\in L(X,\mathbf{R})$，$t>0$，令

$$g_t(x) = \int_0^t (D_r f)(x)\mathrm{d}r, \quad \forall\, x\in X \tag{8}$$

则不难验证，$g_t\in D(B)$.

定义算子 B: $D(B)\to L(X,\mathbf{R})$ 为

$$(Bf)(x) = \lim_{t\to 0^+}\frac{(D_t f)(x) - f(x)}{t}, \quad x\in X \tag{9}$$

设 $f\in L(C,\mathbf{R})$，$t>0$，g_t 如(8)式所定义，则易证

$$D_t f - f = Bg_t \tag{10}$$

进一步可证，若 $f\in D(B)$，则

$$(D_t f)(x) - f(x) = \int_0^t (D_r Bf)(x)\mathrm{d}r, \quad x\in X \tag{11}$$

引理 3　设 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 具有生成元 A，算子 B 由(9)式定义. 如果 $\overline{D(A)} = X$，那么集合

$$\Gamma=\left\{f\in L(X,R):\exists\, g\in L(X,R)\ \text{s.t.}\ g(x)=\lim_{r\to 0^+}\frac{f(x+rAx)-f(x)}{r},\ x\in D(A)\right\} \tag{12}$$

是非空的，且 $D(B)\subseteq\Gamma$. 进一步地，若 X 具有 Radon-Nikodym 性质，且 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 指数有界，则 $\Gamma = D(B)$

证明　设 $f\in D(B)$，则由定义知，$\forall\, x\in X$

$$(Bf)(x) = \lim_{r\to 0^+}\frac{(D_r f)(x) - f(x)}{r} = \lim_{r\to 0^+}\frac{f(T_r x) - f(x)}{r} \tag{13}$$

注意到，

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\| T_r x - x - rAx\|}{r} = 0, \quad \forall\, x\in D(A) \tag{14}$$

于是，结合(13)式可得

$$(Bf)(x) = \lim_{r\to 0^+}\frac{f(x+rAx) - f(x)}{r}, \quad \forall\, x\in D(A) \tag{15}$$

这表明，$f \in \Gamma$. 因此，由 $f \in D(B)$ 的任意性知，$D(B) \subseteq \Gamma$.

设 X 具有Radon-Nikodym 性质，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ 指数有界. 若 $f \in \Gamma$，则由定义知，存在 $g \in L(X, \mathbf{R})$ 使得，

$$g(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x + rAx) - f(x)}{r}, \quad \forall\, x \in D(A)$$

将(14)式代入，得

$$g(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(T_r x) - f(x)}{r}, \quad \forall\, x \in D(A) \tag{16}$$

由定义2可证，$\forall\, x \in D(A)$，向量值函数 $T_t x$ 在$[0, +\infty)$ 的任何紧子集上是Lipschitz 连续的，因而，由 X 的Radon-Nikodym 性质知，$T_t x$ 在 $[0, +\infty)$ 内几乎处处可微，即，$T_t x \in D(A)$ 对几乎所有的 $t \in [0, +\infty)$ 成立. 于是，代入(16)可得，$\forall\, x \in D(A)$

$$g(T_t x) = \lim_{r\to 0^+} \frac{f(T_r T_t x) - f(T_t x)}{r} = \lim_{r\to 0^+} \frac{f(T_{t+r} x) - f(T_t x)}{r}, \quad \text{a.e.}$$

即，实函数 $h(t) = f(T_t x)$ 在 $[0,\infty)$ 内几乎处处可微，且 $h'(t) = g(T_t x)$. 两边积分可得

$$f(T_t x) - f(x) = \int_0^t g(T_r x)\mathrm{d}r, \quad \forall\, x \in D(A),\ t > 0 \tag{17}$$

因为 $\overline{D(A)} = X$，所以(17)式实际上对所有的 $x \in X$ 皆成立，即，

$$f(T_t x) - f(x) = \int_0^t g(T_r x)\mathrm{d}r, \quad \forall\, x \in X,\ t > 0 \tag{18}$$

于是，求微分得到

$$g(x) = \lim_{r\to 0^+} \frac{f(T_r x) - f(x)}{r}, \quad x \in X$$

因此，$f \in D(B)$ 且 $Bf = g$. 从而，由 $f \in \Gamma$ 的任意性，$\Gamma \subseteq D(B)$. 证毕.

注2 显然，若生成元 A 满足 $A \in L(X,X)$，则 $X^* \subset D(B)$ 且 $Bf = f \circ A$ $(\forall\, f \in X^*)$，其中 $f \circ A$ 定义为 $(f \circ A)(x) = f(Ax)(\forall\, x \in X)$.

引理4 设 $T \in L(X,X)$，$\lambda \in \mathbf{R}$ 满足 $|\lambda| > L(T)$，则 $\lambda I - T$ 是 X 的同胚映射，$(\lambda I - T)^{-1} \in L(X,X)$，且

$$L((\lambda I - T)^{-1}) \leq \frac{1}{|\lambda| - L(T)} \tag{19}$$

证明 设 $|\lambda| > L(T)$. 假设存在 $x, y \in X$ 使得 $\lambda x - Tx = \lambda y - Ty$，则 $|\lambda| \cdot \|x - y\| = \|Tx - Ty\| \leq L(T)\|x - y\|$，即，$|\lambda| \leq L(T)$，矛盾. 因此，$\lambda I - T$ 是单射. 为证明 $\lambda I - T$ 的满射性，对每个 $y \in X$，定义算子 T_y: $X \to X$ 为

$$T_y x = \lambda^{-1}(Tx + y), \quad x \in X$$

易证 $T_y \in L(X,X)$ 且 $L(T_y) = |\lambda|^{-1}L(T) < 1$. 故，由Banach 压缩不动点定理知，$T_y$ 有唯一不动点，记为 x^*. 显然，$y = \lambda T_y x^* - Tx^* = \lambda x^* - Tx^*$. 于是，由 $y \in X$ 的任意性知，$\lambda I - T$ 是满射.

因为，$\forall\, x, y \in X$,

$$\|(\lambda I - T)x - (\lambda I - T)y\| = \|\lambda(x - y) - (Tx - Ty)\| \geq (|\lambda| - L(T))\|x - y\|$$

所以，由定义直接可得不等式(19). 证毕.

3 生成元的存在性

本节运用上一节所介绍的Lipschitz 对偶思想，证明关于非线性Lipschitz 算子半群生成元存在性的如下结论：

定理1　设 X 具有Radon-Nikodym 性质，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ 为 X 上的指数有界Lipschitz 算子半群. 如果 $\lim\limits_{t\to 0^+} L(T_t - I) = 0$，则存在 X 的同胚变换 V 使得，Lipschitz 算子半群 $\{VT_tV^{-1}\}_{t\geq 0}$ 具有唯一生成元 A_v 且 $A_v \in L(X, X)$. 从而，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ 具有唯一生成元 A 且 $\overline{D(A)} = X$.

反之，若 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 具有生成元 $A \in L(X,X)$，则 $\lim\limits_{t\to 0^+} L(T_t - I) = 0$.

证明　设 $\lim\limits_{t\to 0^+} L(T_t - I) = 0$，则由 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 的半群性质易证:作为 $L(X,X)$ 值映射，$t \mapsto T_t$ 在 $[0, +\infty)$ 中连续，因而存在 $\delta > 0$ 使得，$\forall\ t \in (0,\delta)$，$L(T_t - I) < 1$. 给定 $t_0 \in (0, \delta)$，并令

$$V = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} T_r \mathrm{d}r$$

因为 $L(I - V) < 1$，所以，由引理4 知，$V(= I - (I - V))$ 是 X 的同胚映射，且 $V^{-1} \in L(X,X)$. 注意到，$\forall\ t > 0$，

$$VT_t - V = \frac{1}{t_0}\left(\int_{t_0}^{t_0+t} T_r \mathrm{d}r - \int_0^t T_r \mathrm{d}r\right) \tag{20}$$

我们得到，$\lim\limits_{t\to 0^+} r^{-1}(VT_rV^{-1} - I) = t_0^{-1}(T_{t_0}V^{-1} - V^{-1})$. 因此，Lipschitz 算子半群 $\{VT_tV^{-1}\}_{t\geq 0}$ 具有生成元 A_v，且 $A_v = t_0^{-1}(T_{t_0}V^{-1} - V^{-1}) \in L(X,X)$. 显然，$A_v$ 是唯一的.

设 D_s 如(4)式所示，$x \in X$. 因为

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to 0^+} \frac{\| T_t x - x \|}{t} &= \liminf_{t\to 0^+} \frac{\| V^{-1}(VT_t x) - V^{-1}(Vx) \|}{t} \\
&\leq L(V^{-1}) \cdot \liminf_{t\to 0^+} \frac{\| VT_t x - Vx \|}{t} \\
&= L(V^{-1}) \cdot \liminf_{t\to 0^+} \frac{\| (VT_tV^{-1} - I)(Vx) \|}{t} \\
&\leq L(V^{-1}) \cdot L(A_v) \cdot \| Vx \|
\end{aligned}$$

所以，$x \in D_s$，进而由 $x \in X$ 的任意性知，$D_s = X$. 于是，由引理1 知，$\{T_t\}$ 具有生成元 A，且 $\overline{D(A)} = \overline{D}_s = X$.

设 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 具有生成元 $A \in L(X,X)$. 令 $D_t = T_t^{l*}$，B 如(9)式所定义. 则由注2 知，$X^* \subset D(B)$. 故，由(11)式可证，$\forall\ t > 0$，$f \in X^*$，$x \in X$，

$$\begin{aligned}
f(T_t x) - f(x) &= (D_t f)(x) - f(x) = \int_0^t (D_r Bf)(x)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^t (D_r(f \circ A))(x)\mathrm{d}r = \int_0^t f(AT_r x)\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

于是，$\forall\ t > 0$，

$$\begin{aligned}
L(T_t - I) &= \sup_{x\neq y} \frac{\| T_t x - x - (T_t y - y) \|}{\| x - y \|} \\
&= \sup_{x\neq y} \sup_{f\in X^*,\ \|f\|=1} \frac{|f(T_t x) - f(x) - (f(T_t y) - f(y))|}{\| x - y \|} \\
&= \sup_{x\neq y} \frac{1}{\| x - y \|} \sup_{f\in X^*,\ \|f\|=1} \left|\int_0^t (f(AT_r x) - f(AT_r y))\mathrm{d}r\right| \\
&\leq \sup_{x\neq y} \frac{1}{\| x - y \|}\int_0^t L(A) \cdot \| T_r x - T_r y \| \mathrm{d}r \\
&\leq L(A) \cdot \int_0^t L(T_r)\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

显然，$\lim\limits_{t\to 0^+} L(T_t - I) = 0$. 证毕.

推论1 设 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 为 X 上的 C_0- 半群，则 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 的生成元有界当且仅当 $\lim\limits_{t\to 0^+}\|T_t - I\| = 0$（即，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ 一致连续）.

证明 注意到，当 $T_t(t\geq 0)$ 为线性算子时，定理1 中 V 是 X 上的同构映射. 此时，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ 的生成元 A 与 A_v 满足关系式：$A_v = VAV^{-1}$. 因此，A 有界当且仅当 A_v 有界. 于是，该推论由定理1 直接得证. 证毕.

注3 值得注意的是，在一般非线性情形，定理1 中的映射 V 是非线性的，因而，关系式 $A_V = VAV^{-1}$ 不一定成立. 尽管如此，仍有理由猜测：$\{T_t\}_{t\geq 0}$ 具有生成元 $A\in L(X, X)$ 当且仅当 $\lim\limits_{t\to 0^+} L(T_t - I) = 0$.

定理1 的意义还在于，它表明，一个 Lipschitz 算子生成的算子半群具有非常强的连续性，而这种“强”连续性使得该半群可以延拓为算子群. 事实上，若 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 由 $A\in L(X,X)$ 生成，则由定理1 知，当 $t>0$ 充分小时，$L(T_t - I)<1$. 于是，由引理4 得知，当 $t>0$ 充分小时，T_t 可逆且 $T_t^{-1}\in L(X,X)$. 进一步运用 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 的半群性质可证明，$\forall\, t>0$，T_t 可逆且 $T_t^{-1}\in L(X, X)$. 若定义 $\{\tilde{T}_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 为：$\tilde{T}_t = T_t$，$t\geq 0$；$\tilde{T}_t = T_{-t}^{-1}$，$t<0$. 则易验证，$\{\tilde{T}_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是一个算子群，且满足：$\lim\limits_{t\to 0} L(\tilde{T}_t - I) = 0$.

结论 尽管非线性Lipschitz 算子半群与线性算子半群之间存在许多本质上的差距，但多年来对非线性 Lipschitz 算子的研究表明，作者提出的 Lipschitz 对偶方法能够将有关非线性 Lipschitz 算子的许多研究课题转化为相关的线性问题. 事实上，作者运用这一思想对非线性 Lipschitz 算子的许多性质作了较系统的研究，获得了较为深刻的结果[1,6-10]. 本文运用这一思想给出了一类非线性Lipschitz 算子半群存在生成元的特征刻画，这只是为研究非线性算子半群生成元存在性问题而作的一个尝试. 希望本文的工作能够在有关非线性算子半群的研究方面起到抛砖引玉的作用.

参考文献：

[1] 彭济根，徐宗本. 非线性Lipschitz 算子的Lipschitz 对偶算子及其应用[J]. 数学学报，2002，45(3)：469—480.

[2] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations [M]. Springer-Verlag，New York，1983.

[3] Barbu V. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces[M]. Noordhoff：Leyden，1976.

[4] Miyadera I. Nonlinear Semigroups (translated by Y. C. Choong in English)[M]. Amer Math Soc，Providence，1992.

[5] Downng D J，Ray W O. Uniformly Lipschitz semigroup in Hilbert space[J]. Canadian Math Bull，1982，25：210—214.

[6] 彭济根，徐宗本. 关于非线性 Lipschitz 算子的理论研究及其应用[D]. 西安交通大学博士学位论文，1998.

[7] Qiao H，Peng J G，Xu Z B. Non-Linear measures：A new approach to exponential stability analysis for hopfield-type neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks，2001，12(2)：360—370.

[8] 彭济根，徐宗本. Banach 空间的Lipschitz 对偶空间及其应用[J]. 数学学报，1999，42(1)：61—70.

[9] 彭济根，徐宗本. 非线性Lipschitz 算子半群的表示[J]. 数学学报，2004，47(4)：723—730.

[10] 彭济根，徐宗本. 非线性Lipschitz 算子半群的渐近性质及其应用[J]. 数学学报，2002，45(6)：1—8.

On Existence of Generator of Nonlinear Lipschitzian Semigroup

PENG Ji-gen

Research Center for Applied Mathematics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, *China*

Abstract: This paper is concerned with the existence of generator of Lipschitzian semigroup. By developing some novel dual notions related to Lipschitzian semigroup, a necessary and sufficient condition for the existence of generator of Lipschitzian semigroup is proved. This obtained result is a nonlinear generalization of the well-known theorem that a C_0- semigroup is uniformly continuous if and only if its generator is bounded.

Key words: Lipschitz operator; nonlinear Lipschitzian semigroup; Lipschitz dual semigroup; generator

关于非线性Lipschitz算子半群生成元的存在性

作者：　彭济根， PENG Ji-gen
作者单位：　西安交通大学理学院应用数学研究中心,陕西,西安,710049
刊名：　应用泛函分析学报
英文刊名：　ACTA ANALYSIS FUNCTIONALIS APPLICATA
年，卷(期)：　2005，7(1)
被引用次数：　0次

参考文献(10条)

1. 彭济根.徐宗本 非线性Lipschitz算子的Lipschitz对偶算子及其应用[期刊论文]-数学学报 2002(03)

2. Pazy A Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations 1983

3. Barbu V Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces 1976

4. Miyadera I.Y. C. Choong Nonlinear Semigroups 1992

5. Downng D J.Ray W O Uniformly Lipschitz semigroup in Hilbert space 1982

6. 彭济根 关于非线性Lipschitz算子的理论研究及应用[学位论文] 1998

7. QIAO H.Peng J G.Xu Z B Non-Linear measures: A new approach to exponential stability analysis for hopfield-type neural networks 2001(02)

8. 彭济根.徐宗本 Banach空间的Lipschitz对偶空间及其应用[期刊论文]-数学学报 1999(01)

9. 彭济根.徐宗本 非线性Lipschitz算子半群的表示[期刊论文]-数学学报 2004(04)

10. 彭济根.徐宗本 非线性Lipschitz算子半群的渐近性质及其应用[期刊论文]-数学学报 2002(06)

相似文献(3条)