文章编号:1672-4291(2008)01-0015-04

奇异摄动系统状态反馈 H_∞控制

刘丽丽[1,2], 彭济根[2]
(1 陕西师范大学 数学与信息科学学院, 陕西 西安 710062;
2 西安交通大学 理学院, 陕西 西安 710049)

摘 要:利用线性矩阵不等式方法研究了奇异摄动系统的 H_∞控制问题.结合奇异摄动系统和它所对应的广义系统的关系,给出奇异摄动系统可状态反馈 H_∞控制的条件及控制器的求解.这种方法适用于标准和非标准的奇异摄动系统,仿真结果表明该方法是简单和有效的.

关键词:奇异摄动系统; 广义系统; H_∞控制; 线性矩阵不等式
中图分类号: O231 **文献标识码**: A

State feedback H_∞ control for singularly perturbed systems

LIU Li-li[1,2], PENG Ji-gen[2]
(1 College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, Shaanxi, China; 2 School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, Shaanxi, China)

Abstract: H_∞ control problem of singularly perturbed systems is discussed by using linear matrix inequality approach. Combining a singularly perturbed system with the related generalized system, a condition for the H_∞ performance of singularly perturbed systems is derived. Based on it, a sub-optimal controller is explicitly constructed. The proposed result can be applied not only to standard case, but also to nonstandard singularly perturbed systems. The result of a simulated example shows that the method is effective.

Key words: singularly perturbed system; singular system; H_∞ control; linear matrix inequality
MR subject classification: 93C05, 93D05

奇异摄动方法作为处理复杂系统的重要方法在控制领域取得了重要的成果[1],奇异摄动理论也逐渐成为一个独立的控制理论分支.奇异摄动系统的 H_∞ 控制问题已获得了广泛研究[2-6].已有文献通常是对系统做快慢子系统分解,首先对快子系统设计 H_∞ 控制器,其次对修正 的慢子系统设计 H_∞ 控制器.这种方法要求原系统为标准的奇异摄动系统.文献[5] 中对非标准的奇异摄动系统采用对 Riccati 方程分解方法 得到 H_∞ 控制问题的解.本文用线性矩阵不等式方法解决奇异摄动系统 H_∞ 次优控制问题,运用广义系统 H_∞ 控制的结论,给出奇异摄动系统 H_∞ 性能小于 γ 的线性矩阵不等式条件以及状态反馈 次优 H_∞ 控制器的求解方法.仿真结果验证了该方法的简单和有效.

定义 1[7] 对线性系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\omega}(t), \\ \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\omega}(t). \end{cases} \tag{1}$$

其传递函数是 $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$,系统的 H_∞ 范数定义为 $\| \boldsymbol{G}(s) \|_\infty = \sup_\omega \sigma(\boldsymbol{G}(\mathrm{j}\omega))$,即系统频率响应的最大奇异值的峰值.其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 是系统的状态,$\boldsymbol{\omega}(t)$ 为系统的扰动输入,$\boldsymbol{z}(t)$ 为被调输出.

引理 1[7] 系统(1)渐近稳定且 $\| \boldsymbol{G}(s) \|_\infty < \gamma$ 的充要条件是存在对称矩阵 $\boldsymbol{P} > 0$,使得

收稿日期:2007-10-18
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10531030); 陕西省自然科学基础研究计划资助项目(2007406)
作者简介:刘丽丽,女,博士研究生,主要研究方向为控制理论.

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA & PB & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I & D^{\mathrm{T}} \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \tag{2}$$

此结论已被推广到广义系统.

引理 2[8] 对广义系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + B\omega(t), \\ z(t) = Cx(t) + D\omega(t). \end{cases} \tag{3}$$

其传递函数矩阵为 $G(s) = C(sE - A)^{-1}B + D$,其中 E 为奇异矩阵.系统正则、无脉冲模、渐近稳定且 $\| G(s) \|_{\infty} < \gamma$ 的充要条件是存在矩阵 Y,使

$$E^{\mathrm{T}}Y = Y^{\mathrm{T}}E \geqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}A & Y^{\mathrm{T}}B & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}Y & -\gamma I & D^{\mathrm{T}} \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \tag{4}$$

本文考虑奇异摄动系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_{11}\omega(t), \\ \varepsilon\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_{12}\omega(t), \\ z(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + D_1\omega(t). \end{cases} \tag{5}$$

其中 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 是系统的状态,$\omega(t)$ 为系统的扰动输入,$z(t)$ 为被调输出,$\varepsilon > 0$ 为小的摄动参数.

记 $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $A_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \frac{1}{\varepsilon}A_{21} & \frac{1}{\varepsilon}A_{22} \end{bmatrix}$,

$$B_{1\varepsilon} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ \frac{1}{\varepsilon}B_{12} \end{bmatrix},$$

$$C = [C_1 \quad C_2],$$

将系统改写为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\varepsilon}x(t) + B_{1\varepsilon}\omega(t), \\ z(t) = Cx(t) + D_1\omega(t). \end{cases} \tag{6}$$

系统从扰动输入到被调输出的传递函数为

$$T_{\omega z} = D_1 + C(sI - A_{\varepsilon})^{-1}B_{1\varepsilon}.$$

由引理 1,系统(6) 渐进稳定且 $\| T_{\omega z} \|_{\infty} < \gamma$ 的充要条件是存在对称矩阵 $X > 0$,使

$$\begin{bmatrix} A_{\varepsilon}^{\mathrm{T}}X + XA_{\varepsilon} & XB_{1\varepsilon} & C^{\mathrm{T}} \\ B_{1\varepsilon}^{\mathrm{T}}X & -\gamma I & D_1^{\mathrm{T}} \\ C & D_1 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \tag{7}$$

对确定的 ε,上式为线性矩阵不等式,可由 matlab 中 LMI 工具箱中 feasp 求解器求解.若 ε 为一取值较小的待定参数,则上述矩阵不等式不容易求解.

令奇异摄动系统(5) 中参数 ε 为 0,得广义系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_{11}\omega(t), \\ 0 = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_{12}\omega(t), \\ z(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + D_1\omega(t). \end{cases} \tag{8}$$

系统(8) 的传递函数为

$$G_{\omega z} = D_1 + C(sE - A)^{-1}B_1.$$

其中 $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}$.

由引理 2,系统渐进稳定且 $\| G_{\omega z} \|_{\infty} < \gamma$ 的充要条件是存在矩阵 Y 满足下面的矩阵不等式:

$$E^{\mathrm{T}}Y = Y^{\mathrm{T}}E \geqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}A & Y^{\mathrm{T}}B_1 & C^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}}Y & -\gamma I & D_1^{\mathrm{T}} \\ C & D_1 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \tag{9}$$

为求解含参数的矩阵不等式(7),将其与不含参数的矩阵不等式(9) 作比较.设 X 有与 A_{ε} 相容的分块形式 $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^{\mathrm{T}} & X_4 \end{bmatrix}$. 在(7) 中代入 X、A_{ε}、$B_{1\varepsilon}$、C 的分块,可得

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & C_1^{\mathrm{T}} \\ \Phi_{12}^{\mathrm{T}} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & C_2^{\mathrm{T}} \\ \Phi_{13}^{\mathrm{T}} & \Phi_{23}^{\mathrm{T}} & -\gamma I & D_1^{\mathrm{T}} \\ C_1 & C_2 & D_1 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \tag{10}$$

其中 $\Phi_{11} = A_{11}^{\mathrm{T}}X_1 + X_1A_{11} + \frac{1}{\varepsilon}A_{21}^{\mathrm{T}}X_2^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon}X_2A_{21}$,

$$\Phi_{12} = A_{11}^{\mathrm{T}}X_2 + X_1A_{12} + \frac{1}{\varepsilon}A_{21}^{\mathrm{T}}X_4 + \frac{1}{\varepsilon}X_2A_{22},$$

$$\Phi_{13} = X_1B_{11} + \frac{1}{\varepsilon}X_2B_{12},$$

$$\Phi_{22} = A_{12}^{\mathrm{T}}X_2 + X_2^{\mathrm{T}}A_{12} + \frac{1}{\varepsilon}A_{22}^{\mathrm{T}}X_4 + \frac{1}{\varepsilon}X_4A_{22},$$

$$\Phi_{23} = X_2^{\mathrm{T}}B_{11} + \frac{1}{\varepsilon}X_4B_{12}.$$

设 Y 有与 A 相容的分块形式 $\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix}$,则由 $E^{\mathrm{T}}Y = Y^{\mathrm{T}}E$ 可得 $Y_2 = 0$, $Y_1 = Y_1^{\mathrm{T}}$,在(9) 中代入 Y、A、B_1、C 的分块得

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & C_1^{\mathrm{T}} \\ \Psi_{12}^{\mathrm{T}} & \Psi_{22} & Y_4^{\mathrm{T}}B_{12} & C_2^{\mathrm{T}} \\ \Psi_{13}^{\mathrm{T}} & B_{12}^{\mathrm{T}}Y_4 & -\gamma I & D_1^{\mathrm{T}} \\ C_1 & C_2 & D_1 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \tag{11}$$

其中 $\Psi_{11} = A_{11}^{\mathrm{T}}Y_1 + Y_1A_{11} + A_{21}^{\mathrm{T}}Y_3 + Y_3^{\mathrm{T}}A_{21}$,

$$\Psi_{12} = Y_1A_{12} + A_{21}^{\mathrm{T}}Y_4 + Y_3^{\mathrm{T}}A_{22},$$

$$\Psi_{22} = A_{22}^{\mathrm{T}}Y_4 + Y_4^{\mathrm{T}}A_{22},$$

$$\Psi_{13} = Y_1B_{11} + Y_3^{\mathrm{T}}B_{12}.$$

比较(10) 与(11) 式左边的矩阵,令 $X_1 = Y_1 = Y_1^{\mathrm{T}}$, $X_2 = \varepsilon Y_3^{\mathrm{T}}$, $X_2^{\mathrm{T}} = \varepsilon Y_3$, $X_4 = \varepsilon Y_4$,则(10) 式可改写为

$$\boldsymbol{\Psi}+\varepsilon\begin{bmatrix}0 & A_{11}^{\mathrm{T}}Y_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ Y_3A_{11} & A_{12}^{\mathrm{T}}Y_3+Y_3^{\mathrm{T}}A_{12} & Y_3B_{11} & 0\\ 0 & B_{11}^{\mathrm{T}}Y_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}<0. \tag{12}$$

综合上述分析,得

定理 1　对奇异摄动系统(5),存在 ε^*,使 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon^*$ 时系统稳定且 $\|\boldsymbol{T}_{\omega z}\|_\infty<\gamma$ 的充要条件是存在 $\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{Y}_3$、$\boldsymbol{Y}_4=\boldsymbol{Y}_4^{\mathrm{T}}$,使下列线性矩阵不等式成立:

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & C_1^{\mathrm{T}}\\ \Psi_{12}^{\mathrm{T}} & \Psi_{22} & Y_4^{\mathrm{T}}B_{12} & C_2^{\mathrm{T}}\\ \Psi_{13}^{\mathrm{T}} & B_{12}^{\mathrm{T}}Y_4 & -\gamma I & D_1^{\mathrm{T}}\\ C_1 & C_2 & D_1 & -\gamma I\end{bmatrix}<0, \tag{13}$$

且 ε^* 为最优化问题

$$\max_{Y_1,Y_3,Y_4}\ \varepsilon \tag{14}$$

$$\text{s.t}\quad \boldsymbol{\Psi}<0,$$

$$\begin{bmatrix}Y_1 & \varepsilon Y_3^{\mathrm{T}}\\ \varepsilon Y_3 & \varepsilon Y_4\end{bmatrix}>0,$$

$$\boldsymbol{\Psi}+\varepsilon\begin{bmatrix}0 & A_{11}^{\mathrm{T}}Y_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ Y_3A_{11} & A_{12}^{\mathrm{T}}Y_3+Y_3^{\mathrm{T}}A_{12} & Y_3B_{11} & 0\\ 0 & B_{11}^{\mathrm{T}}Y_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}<0$$

的解.

注 1　上述分析给出(7)式解的形式与文献[5]中用隐函数定理给出的形式一致.

注 2　定理中的最优化问题可用 LMI 工具箱中的 gvep 求解器求解.

下面考虑用这种方法构造奇异摄动系统的状态反馈次优 H_∞ 控制器.

考虑有控制输入的系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=A_{11}x_1(t)+A_{12}x_2(t)+B_{11}\omega(t)+B_{21}u(t),\\ \varepsilon\dot{x}_2(t)=A_{21}x_1(t)+A_{22}x_2(t)+B_{12}\omega(t)+B_{22}u(t),\\ z(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+D_1\omega(t)+D_2u(t).\end{cases} \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{x}_1(t)$、$\boldsymbol{x}_2(t)$ 是系统的状态,$\boldsymbol{\omega}(t)$、$\boldsymbol{u}(t)$ 分别为系统的扰动输入和控制输入,$\boldsymbol{z}(t)$ 为被调输出,$\varepsilon>0$ 为小的摄动参数.

假设系统的状态完全可测,设计状态反馈控制器 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=[\boldsymbol{K}_1\quad \boldsymbol{K}_2]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$,使闭环系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(A_\varepsilon+B_{2\varepsilon}K)x(t)+B_{1\varepsilon}\omega(t),\\ z(t)=(C+D_2K)x(t)+D_1\omega(t)\end{cases} \tag{16}$$

稳定,且闭环系统传递函数 $\boldsymbol{B}_{\omega z}=\boldsymbol{D}_1+(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{K})(s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}_\varepsilon+\boldsymbol{B}_{2\varepsilon}\boldsymbol{K}))^{-1}\boldsymbol{B}_{1\varepsilon}$ 的 H_∞ 范数小于给定值,其中 $\boldsymbol{B}_{2\varepsilon}=\begin{bmatrix}B_{21}\\ \frac{1}{\varepsilon}B_{22}\end{bmatrix}$.

由引理 1 得闭环系统稳定且 $\|\boldsymbol{B}_{\omega z}\|_\infty<\gamma$ 的充要条件是存在对称矩阵 $\boldsymbol{X}>0$ 使

$$\begin{bmatrix}(A_\varepsilon+B_{2\varepsilon}K)^{\mathrm{T}}X+X(A_\varepsilon+B_{2\varepsilon}K) & XB_{1\varepsilon} & (C+D_2K)^{\mathrm{T}}\\ B_{1\varepsilon}^{\mathrm{T}}X & -\gamma I & D_1^{\mathrm{T}}\\ C+D_2K & D_1 & -\gamma I\end{bmatrix}<0. \tag{17}$$

为消除上式中 $\boldsymbol{K}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 的耦合,对(17)式左边的矩阵左乘 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}^{-1},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\}$,右乘 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}^{-1},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\}$ 得

$$\begin{bmatrix}X^{-1}(A_\varepsilon+B_{2\varepsilon}K)^{\mathrm{T}}+(A_\varepsilon+B_{2\varepsilon}K)X^{-1} & B_{1\varepsilon} & X^{-1}(C+D_2K)^{\mathrm{T}}\\ B_{1\varepsilon}^{\mathrm{T}} & -\gamma I & D_1^{\mathrm{T}}\\ (C+D_2K)X^{-1} & D_1 & -\gamma I\end{bmatrix}<0. \tag{18}$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{X}^{-1}$,$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}^{-1}$,(18)式可改写为含有小参数的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}PA_\varepsilon^{\mathrm{T}}+W^{\mathrm{T}}B_{2\varepsilon}^{\mathrm{T}}+A_\varepsilon P+B_{2\varepsilon}W & B_{1\varepsilon} & PC^{\mathrm{T}}+W^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}}\\ B_{1\varepsilon}^{\mathrm{T}} & -\gamma I & D_1^{\mathrm{T}}\\ CP+D_2W & D_1 & -\gamma I\end{bmatrix}<0. \tag{19}$$

要解上含有小参数的矩阵不等式,类同与 H_∞ 性能分析,考察此系统 $\varepsilon=0$ 时广义系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=A_{11}x_1(t)+A_{12}x_2(t)+B_{11}\omega(t)+B_{21}u(t),\\ 0=A_{21}x_1(t)+A_{22}x_2(t)+B_{12}\omega(t)+B_{22}u(t),\\ z(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+D_1\omega(t)+D_2u(t)\end{cases} \tag{20}$$

的状态反馈 H_∞ 次优控制问题.

命题 1　广义系统(20)存在状态反馈 H_∞ 次优控制器的充要条件是存在矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{H}$,使

$$EQ=Q^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}\geqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix}Q^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}+AQ+B_2H & B_1 & Q^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}}\\ B_1^{\mathrm{T}} & -\gamma I & D_1^{\mathrm{T}}\\ CQ+D_2H & D_1 & -\gamma I\end{bmatrix}<0 \tag{21}$$

成立.若上述矩阵不等式有可行解 $\boldsymbol{Q}^*$、$\boldsymbol{H}^*$,则 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{Q}^*)^{-1}$ 是系统(20)的一个状态反馈 H_∞ 次优控制器.

定理 2　对奇异摄动系统(15),存在 ε^*,使 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon^*$ 时系统存在状态反馈 H_∞ 次优控制器的充要条件是存在矩阵 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{Q}_3$、$\boldsymbol{Q}_4=\boldsymbol{Q}_4^{\mathrm{T}}$,使下列线性矩阵不等式成立:

$$\boldsymbol{\Theta}=\begin{bmatrix}\Theta_{11} & \Theta_{12} & B_{11} & \Theta_{14}\\ \Theta_{12}^{\mathrm{T}} & \Theta_{22} & B_{12} & \Theta_{24}\\ B_{11}^{\mathrm{T}} & B_{12}^{\mathrm{T}} & -\gamma I & D_1^{\mathrm{T}}\\ \Theta_{14}^{\mathrm{T}} & \Theta_{24}^{\mathrm{T}} & D_1 & -\gamma I\end{bmatrix}<0. \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{\Theta}_{11}=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}_3+$

$$Q_3^{\mathrm{T}}A_{12}^{\mathrm{T}} + B_{21}H_1 + H_1^{\mathrm{T}}B_{21}^{\mathrm{T}},$$

$$\Theta_{12} = A_{12}Q_4 + Q_1^{\mathrm{T}}A_{21}^{\mathrm{T}} + Q_3^{\mathrm{T}}A_{22}^{\mathrm{T}} + B_{21}H_2 + H_1^{\mathrm{T}}B_{22}^{\mathrm{T}},$$

$$\Theta_{22} = A_{22}Q_4 + Q_4^{\mathrm{T}}A_{22}^{\mathrm{T}} + B_{22}H_2 + H_2^{\mathrm{T}}B_{22}^{\mathrm{T}},$$

$$\Theta_{14} = Q_1^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}} + Q_3^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} + H_1^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}},$$

$$\Theta_{24} = Q_4^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} + H_2^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}}.$$

ε^* 为最优化问题

$$\max_{Q_1,Q_3,Q_4} \varepsilon$$

$$\text{s.t}\quad \Theta < 0, \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon Q_1 & \varepsilon Q_3^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} > 0,$$

$$\Theta + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & A_{11}Q_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ Q_3A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}Q_3^{\mathrm{T}} + Q_3A_{21}^{\mathrm{T}} & 0 & Q_3C_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1Q_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

的解.

证明 设 P、W、Q、H 有与 A 相容的分块形式:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^{\mathrm{T}} & P_3 \end{bmatrix}, W = [W_1 \quad W_2],$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}, H = [H_1 \quad H_2].$$

将这种分块分别代入(19)和(21)式,并予以比较. 令 $P_1 = Q_1, P_2 = Q_3^{\mathrm{T}}, P_3 = \frac{1}{\varepsilon}Q_4, W_1 = H_1, W_2 = \frac{1}{\varepsilon}H_2$,即得证.

仿真算例:

在系统(15)中,选择 $\gamma = 1$,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -5 & -0.4 \\ 0 & -7.9 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.45 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -0.524 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -0.465 & 0.262 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.94 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

求解定理 2 中的最优化问题,可得 $\varepsilon^* = 0.070\,4$. 因此,当 $0 < \varepsilon \leqslant 0.070\,4$ 时,奇异摄动系统(15)存在状态反馈 H_∞ 控制器使闭环系统传递函数的 H_∞ 范数小于1.并且,当给定 $\varepsilon \in (0, 0.070\,4]$ 时,可由上述最优化 问题的解求得控制器.若 $\varepsilon = 0.070\,4$,此时控制器中

$$K = [-2.574\,9 \quad -3.088\,4 \quad 3.436\,1 \quad 0.444\,7],$$

控制器为 $u(t) = Kx(t)$.

本文用线性矩阵不等式方法,结合奇异摄动系统和广义系统的关系,得到奇异摄动系统可状态反馈 H_∞ 控制的线性矩阵不等式条件及摄动参数 ε 的界 ε^*.当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ 时,可求解线性矩阵不等式约束的最优化问题求得控制器.仿真结果表明了该结论的可行性.

参考文献:

[1] Kokotovic P, Khalil H, Reilly J O. Singular perturbation methods in control: Analysis and design[M]. London: Academic Press, 1986.

[2] Pan Z G, Basar T. H_∞-optimal control for singularly perturbed systems. Part 1: perfect state measurements[J]. Automatica, 1993, 29(2): 401-423.

[3] Pan Z G, Basar T. H_∞-optimal control for singularly perturbed systems. Part 2: imperfect state measurements[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, 39: 280-300.

[4] Khail H K, Chen F. H_∞ control of two-time-scale systems[J]. Systems Control Letters, 1992, 19: 35-42.

[5] Tan W, Leung T P, Tu Q L. H_∞ control for singularly Perturbed systems[J]. Automatica, 1998, 34(2): 255-260.

[6] 蔡晨晓,邹云. 线性奇异摄动系统的矩阵不等式方法 H_∞控制[J].兵工学报,2005,26(3),367-371.

[7] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M].北京:清华大学出版社,2002.

[8] Masubuchi I, Yoshiyuki kamitane. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach[J]. Automatica, 1997, 33(4), 669-673.

〔责任编辑 张惠民〕

奇异摄动系统状态反馈 H∞控制

作者： 刘丽丽， 彭济根， LIU Li-li， PENG Ji-gen
作者单位： 刘丽丽,LIU Li-li(陕西师范大学,数学与信息科学学院,陕西,西安,710062;西安交通大学,理学院,陕西,西安,710049)， 彭济根,PENG Ji-gen(西安交通大学,理学院,陕西,西安,710049)

刊名： 陕西师范大学学报（自然科学版） ISTIC PKU
英文刊名： JOURNAL OF SHAANXI NORMAL UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)
年，卷(期)： 2008，36(1)
被引用次数： 0次

参考文献(8条)

1. Kokotovic P.Khalil H.Reilly J O Singular perturbation methods in control:Analysis and design 1986

2. Pan Z G.Basar T H∞-optimal control for singularly perturbed systems.Part 1:perfect state measurements 1993(02)

3. Pan Z G.Basar T H∞-optimal control for singularly perturbed systems.Part 2:imperfect state measurements 1994

4. Khail H K.Chen F H∞ control of two-time-scale systems 1992

5. Tan W.Leung T P.Tu Q L H∞ control for singularly Perturbed systems 1998(02)

6. 蔡晨晓.邹云 线性奇异摄动系统的矩阵不等式方法H∞控制[期刊论文]-兵工学报 2005(03)

7. 俞立 鲁棒控制--线性矩阵不等式处理方法 2002

8. Masubuchi I.Yoshiyuki kamitane H∞ control for descriptor systems:a matrix inequalities approach 1997(04)

相似文献(10条)

1. 期刊论文 钟宁帆.邹云.ZHONG Ning-fan.ZOU Yun 奇异摄动系统正实性能分析 -南京理工大学学报（自然科学版）2008,32(3)

利用广义系统模型,通过改进已有的广义系统正实引理,讨论了奇异摄动系统的正实性判断问题.利用隐函数存在定理,基于代数Riccati等式讨论了当小参数趋于零时奇异摄动系统正实性与极限系统正实性之间的关系.进一步提出了根据极限系统对奇异摄动系统的正实性进行判断的判据.算例验证了结果的有效性,为在一定条件下对奇异摄动系统的正实性进行有效判断提供了一种新的方法.

2. 学位论文 钟宁帆 线性奇异摄动系统极限性能分析与综合——一种广义系统方法 2007

通过对奇异摄动系统状态解极限性质的深入研究，本论文探讨了广义系统理论与方法在奇异摄动系统分析与综合中的适用性问题。奇异摄动系统的控制理论已得到了较为系统的研究。当忽略奇异摄动系统模型中的小参数时，可得极限系统模型；该极限系统模型具有广义系统形式。目前，广义系统理论已取得了非常系统深入的结果，为奇异摄动系统的综合控制提供了一个很有前景的新的方法途径。然而，由于研究的对象不同，广义系统控制器的分析与设计方法一般不能直接应用于原来的系统。针对上述问题，本论文将探讨当小参数趋于零时奇异摄动系统的极限特性。在此基础上，基于极限系统模型利用广义系统方法对原系统进行性能分析和综合设计。本论文完成了以下工作。

1 研究了当小参数趋于零时奇异摄动系统状态解的收敛性问题。得到了奇异摄动系统状态解在广义函数意义下收敛的条件，并且得到了状态解在广义函数意义下的极限解，以及极限解与极限系统广义状态解的关系。

2 基于极限系统模型，利用广义系统方法研究了奇异摄动系统H<,∞>性能分析和控制器设计问题。通过引入状态解收敛约束，给出了奇异摄动系统风性能与其对应的极限系统H<,∞>性能之间的关系。在此基础上，进一步利用广义系统方法设计奇异摄动系统输出动态反馈H<,∞>控制器和状态反馈H<,∞>控制器。

3 基于极限系统模型，利用广义系统方法讨论了奇异摄动系统鲁棒稳定性分析以及鲁棒镇定控制器设计问题。通过对奇异摄动系统鲁棒稳定性与其对应的极限系统鲁棒稳定性之间关系的探讨，在一定条件下给出了设计奇异摄动系统鲁棒镇定控制器的一类方法。

4 基于极限系统模型，利用广义系统方法探讨了奇异摄动系统正实性问题。得到了奇异摄动系统正实性与极限系统正实性之间的关系，进而在一定的条件下提出并证明了判断奇异摄动系统正实性的判据。

5 分析和研究了奇异摄动系统的H<,∞>模型降阶问题，得到了利用快、慢子系统的H<,∞>降阶模型构造原系统H<,∞>降阶模型的算法。

另外，我们通过数值算例说明了本论文得到方法的有效性。

3. 学位论文 刘万泉 广义系统与奇异摄动系统的分散控制 1992

4. 期刊论文 朱淑倩.程兆林 含摄动二次指标的线性奇异摄动最优控制问题的广义系统途径 -山东大学学报(理学版)2003,38(4)

通过讨论降阶慢子系统的奇异二次指标最优控制问题,研究了指标含摄动的线性奇异摄动系统的最优控制问题.在一些假定下,奇异摄动系统的最优性能指标逼近于降阶控制所得到的最优性能指标.

5. 期刊论文 梅平.邹云.MEI Ping.ZOU Yun 时滞的不确定奇异摄动系统鲁棒稳定性研究 -控制与决策2008,23(4)

研究了带离散时滞和分布时滞的不确定奇异摄动系统的鲁棒稳定问题.首先采用广义系统模型方法,将所研究的系统转化为与之等价的广义系统;然后

提出对应的Lyapunov-Krasovskii泛函,得到了时滞相关的鲁棒稳定性判据,并在此基础上给出了鲁棒控制器设计,结论以矩阵不等式形式给出;最后仿真算例说明了方法的有效性.

6.学位论文 蔡晨晓 奇异摄动系统的稳定反馈控制 2004

奇异摄动理论几十年来在数学领域得以迅速发展,同样在控制领域中也取得了突破性进展,并一直伴随着控制理论的发展而不断完善.同时,线性矩阵不等式方法在控制领域中几年来应用越来越广泛,但在奇异摄动系统中的应用还比较少见.本论文主要针对奇异摄动系统,尝试结合线性矩阵不等式方法做了相关的研究.具体工作主要集中在如下几个方面:(1)将正常连续系统的二次稳定性概念推广到奇异摄动系统,并证明了奇异摄动系统与其快慢子系统关于二次稳定的等价性.同时,利用矩阵不等式方法,推导了奇异摄动系统二次稳定性的充分条件,并给出了二次可镇定并可解的充分条件,以及二次可镇定的状态反馈控制器的一种迭代求法.另外,给出了离散奇异摄动系统二次稳定和二次可镇定的条件.(2)应用线性矩阵不等式方法设计了非标准离散奇异摄动系统的二次型次优调节器.根据一般线性离散系统得到了二次型次优的Riccati不等式条件,通过引入一个特殊分块带有摄动参数的解矩阵形式,进而将条件化为可解的矩阵不等式,从而求取其解,设计次优控制器.(3)讨论了带有干扰抑制的奇异摄动系统的二次型次优调节器问题,沿着逆最优调节器问题处理思路,将干扰转化到二次性能指标中,通过适当放大指标,将干扰控制在一定的范围之内.而后将问题转化为一组不含有摄动参数的矩阵不等式问题处理.(4)用矩阵不等式方法讨论了连续和离散奇异摄动系统的H<,∞>控制,通过广义系统途径,结合广义系统的有界实引理,将含有小参数的Riccati不等式等价转化为与小参数无关的不等式问题,分别得到了连续和离散奇异摄动系统H<,∞>控制的充分条件.(5)讨论了Delta算子域上的奇异摄动系统的状态反馈.用直接法分别设计了快慢子系统的状态反馈控制,使其达到预期的极点配置结果.所得结论将连续与离散系统的相关结果统一于Delta算子框架.仿真结果证明了方法的有效性,弥补了连续系统在高速采样下离散化的不足.此外,本论文还进一步讨论了离散奇异摄动系统的摄动稳定条件问题,得到了两种摄动形式稳定的充要条件,并将结果推广到了2-D情形.

7.期刊论文 梅平.蔡晨晓.邹云.MEI Ping.CAI Chen-xiao.ZOU Yun 时变时滞奇异摄动系统的稳定性研究 -南京理工大学学报(自然科学版)2009,33(3)

针对时变时滞奇异摄动系统,该文用线性矩阵不等式方法给出了判定该系统稳定的充分条件.首先将此系统转化为一个与之等价的广义系统,然后基于线性矩阵不等式(LMI)方法,得到了该系统稳定且依赖于摄动参数的充分条件,为了消除由此带来的数值病态问题,该文将上述条件转化为与摄动参数无关的LMI条件.在此基础上,给出变时滞奇异摄动系统状态反馈控制器存在的充分条件,并由此得到了控制器增益.最后通过数值算例表明了上述方法的有效性.

8.学位论文 秦靖 不确定线性奇异摄动系统鲁棒控制研究 2007

实际工程应用中，一般很难得到被控对象的精确数学模型。由于环境变化，元器件老化等原因必然导致系统模型参数的不确定性。鲁棒控制正是研究系统模型存在不确定性时，如何设计控制器使闭环系统稳定，且满足一定的动态性能要求的先进控制理论。由于被控对象的复杂性，尤其是小参数摄动导致系统产生奇异性，往往要通过模型降阶来简化系统模型，而奇异摄动系统正是解决该问题的一条有效途径。奇异摄动系统由于在诸如汽车、飞行器、能源系统、核反应堆、化学反应、电路、机器人、空间技术领域等的大量应用，所以受到了越来越多研究者的重视。

本文研究了不确定线性奇异摄动系统的鲁棒控制问题。对于离散情况，针对带有非线性扰动的线性奇异摄动系统，采用李亚普诺夫第二方法，沿着快慢系统分解的思路，研究了其鲁棒稳定性问题；针对具有范数有界不确定性的线性奇异摄动系统，以线性矩阵不等式为工具，研究了两种离散系统的鲁棒稳定性和可镇定性。对于连续情况，针对状态时滞系统，采用线性矩阵不等式作为主要处理手段研究了系统的鲁棒控制问题；针对无时滞系统，研究了H<,∞>控制问题。主要内容包括如下几个方面：

1.研究了一类具有范数有界非线性不确定性的离散奇异摄动系统的鲁棒稳定性。采用李亚普诺夫第二方法，基于快慢分解的思路，给出了系统鲁棒稳定的充分条件，同时求出了奇异摄动参数最大值；

2.研究了两种具有范数有界不确定离散奇异摄动系统的鲁棒稳定和可镇定性。通过引入松弛矩阵得到李亚普诺夫不等式等价条件，给出系统鲁棒稳定和可镇定的奇异摄动参数依赖的充分条件，可以很方便地得到奇异摄动参数最大值。结果适用于标准和非标准离散奇异摄动系统；

3.研究了一类具有范数有界不确定连续奇异摄动时滞系统的鲁棒控制问题。通过构造李亚普诺夫泛函，得到了系统鲁棒稳定的时滞和奇异摄动参数同时依赖的充分条件，并给出了控制器设计方法。结果表示为线性矩阵不等式，并可方便求取奇异摄动参数最大值，适用于标准和非标准奇异摄动系统；

4.研究了一类具有范数有界不确定连续奇异摄动系统的鲁棒H<,∞>控制问题。通过广义系统变换，并借助广义系统有界实引理，给出了奇异摄动参数依赖的有界实引理和鲁棒H<,∞>控制器设计方法。结论表示为线性矩阵不等式，适用于标准和非标准奇异摄动系统。

9.期刊论文 蔡晨晓.邹云.CAI Chen-Xiao.ZOU Yun 离散奇异摄动系统稳定性分析 -自动化学报2007,33(5)

讨论了关于离散奇异摄动系统的摄动稳定性解析条件,给出了离散奇异摄动系统两种模型下的摄动稳定性充要条件.通过分析状态矩阵的结构特性,得出了系统稳定所需要的状态矩阵形式和限制条件.同时,通过广义系统途径也得到了2-D离散奇异摄动Roessor模型稳定的充分条件.

10.会议论文 吴旭光.王新民 奇异摄动理论在控制系统中的应用——综述与展望

多时间标尺系统遍布于许多科学研究和工程实际的问题中。有些问题不但维数高，而且非线性因素强，使得问题的求解和问题的阐述变得非常复杂。奇异摄动理论是解决这类问题的有力工具之一，尤其是近年来，由于大系统理论、鲁棒性理论、接近奇异孤的非线性控制、广义系统理论等研究的需要，大大推动了控制系统中的奇异摄动理论的发展。目前这一内容已成为现代控制理论的一个独立分枝，并渗透到控制理论和工程控制论的许多领域。该文以综述的方式探讨了双时间尺度系统的性质、奇异摄动系统的结构、最优控制问题，以及奇异摄动理论在奇异孤问题、滤波器统计、大系统的分散控制，非线性系统的全局线性问题等等。（本刊录）