

# 赋权图匹配问题的一种新的松弛模型

郑开杰<sup>1,2</sup> 高玉涛<sup>1</sup> 彭济根<sup>1</sup>

**摘要** 图匹配是一个 NP 难 (NP-hard) 问题. 基于置换矩阵是非负正交矩阵这一经典结论, 提出赋权图匹配 (Weighted graph matching, WGM) 的双向松弛障碍规划, 理论上证明新模型的解与原模型的解是一致的. 该规划是一个二元连续规划, 它是正交矩阵上的线性优化问题, 同时也是非负矩阵上的凸二次优化问题. 故设计求解新模型的交替迭代算法, 并证明算法的局部收敛性. 数值实验表明, 在匹配精度方面, 新方法强于线性规划方法和特征值分解方法.

**关键词** 图匹配, 松弛方法, 置换矩阵, NP 难问题

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2010.01200

## A New Relaxation Model for Weighted Graph Matching

ZHENG Kai-Jie<sup>1,2</sup> GAO Yu-Tao<sup>1</sup> PENG Ji-Gen<sup>1</sup>

**Abstract** Graph matching is an NP-hard problem. In this paper, we relax the admissible set of permutation matrices based on a well known result that permutation matrix is a non-negative orthogonal matrix. Meantime, a barrier function is incorporated into the objective function. In theory, the solution of the proposed model is the same as the original model, which distinguishes from the traditional relaxation matching models. The proposed model is a binary optimization problem which is a linear optimization problem on orthogonal variable and a quadratic convex optimization problem on non-negative variable. So, a new matching algorithm, named alternate iteration algorithm, is designed to solve it. It is proved that the proposed algorithm is locally convergent. The numerical experiments show that the proposed algorithm is more accurate than linear programming algorithm and eigen-decomposition algorithm.

**Key words** Graph matching, relaxation method, permutation matrix, NP-hard problem

赋权图  $G$  是一个二元组  $(V, W)$ , 其中,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  是顶点集,  $W: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  是权重函数. 通常地, 一个赋权图可以由它的邻接矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ,  $a_{ij} = W(v_i, v_j)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) 表征. 赋权图匹配 (Weighted graph matching, WGM) 是一个及其重要的研究领域. 在工程领域, 赋权图是描述物体的强有力的工具之一, 刻画两物体之间的相近程度, 往往能被归结为赋权图匹配问题, 例如, 图像匹配<sup>[1-2]</sup>; 在数学领域, 二次分配问题 (Quadratic assignment problem, QAP)<sup>[3]</sup>, 旅行商问题 (Traveling salesman problem, TSP)<sup>[4]</sup> 等均可以等价地转化为赋权图匹配问题.

赋权图匹配的任务是: 对给定的两个赋权图, 寻找顶点之间的某种最佳对应关系, 使得它们在给定的不相似性度量意义下的差距最小. 然而, 赋权图匹配是一个 NP 难 (NP-hard) 问题<sup>[5]</sup>, 所以, 无法期待能够找到一个多项式时间的求解算法. 目前, 当图的顶点数超过 30 时, 要得到精确的最优匹配, 是一件相当困难的事情<sup>[3]</sup>. 由于它的难解性, 赋权图匹配问题被选作 GRIBB (Great international branch-and-bound search)<sup>[6]</sup> 项目的最主要测试对象.

现有的赋权图匹配求解方法主要有两大类: 1) 松弛方法<sup>[7-9]</sup>; 2) 回溯法<sup>[5]</sup>. 前者计算量少, 适用于两幅图比较相近的情况, 后者计算量很大, 这限制了它在实际应用中的使用. 基于松弛的赋权图匹配算法通常包括两个步骤: 1) 对置换矩阵进行松弛, 得到松弛解; 2) 利用线性分配问题求解技术<sup>[10]</sup>, 得到距离松弛解最近的置换矩阵, 并以此作为赋权图匹配问题的近似解. 这类算法的性能好坏依赖于松弛策略. 现有的松弛方法都是单项松弛, 即在不改变目标函数的形式的情况下, 对置换矩阵进行松弛. 鉴于此, 本文利用经典结论“置换矩阵集合是非负矩阵与正交矩阵的交集”, 提出双向松弛的新的松弛思路, 得到比单向松弛更加紧的松弛规划. 该松弛规划有两个变元: 正交变元与非负变元, 故我们设计了求解该松弛规划的交替迭代算法, 并证明了该算法是单调局部收敛的.

### 1 赋权图匹配的经典模型

给定两个赋权图  $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{W})$ ,  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{W})$ , 赋权图匹配的目的是寻找它们的顶点之间的某种最佳对应关系. 一般地, 用如下规划作为赋权图匹配的优化模型<sup>[11]</sup>:

$$\pi^* \in \arg \min_{\pi \in S_{\bar{n}, \tilde{n}}} \left\{ \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{j=1}^{\tilde{n}} (\bar{a}_{ij} - \tilde{a}_{\pi(i)\pi(j)})^2 \right\} \quad (1)$$

其中,  $\bar{A}$  ( $\tilde{A}$ ) 是给定的赋权图的邻接矩阵,  $S_{\bar{n}, \tilde{n}}$  是从  $\{1, 2, \dots, \bar{n}\}$  到  $\{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$  的置换全体,  $\arg$  表示优化问题的最优解集合.

等价地, 可以用如下的组合规划来刻画赋权图匹配:

$$\min \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \left( \bar{a}_{ij} - \sum_{k,l=1}^{\tilde{n}} X_{ik} \tilde{a}_{kl} X_{jl} \right)^2 \quad (2)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{\tilde{n}} X_{ij} = 1 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}} X_{ij} \leq 1 \quad (4)$$

$$X_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, \bar{n}, j = 1, 2, \dots, \tilde{n} \quad (5)$$

**定义 1 (匹配矩阵).** 称  $\bar{n} \times \tilde{n}$  ( $\bar{n} \leq \tilde{n}$ ) 矩阵  $P = (p_{ij})$  是一个匹配矩阵, 若存在  $\mathcal{J} = \{j_1, j_2, \dots, j_{\bar{n}}\}$  使得  $P(:, \mathcal{J}) = (p_{ij_k})_{\bar{n} \times \bar{n}}$  是置换矩阵.

记  $\mathcal{P}(n)$  为  $n$  阶置换矩阵全体,  $\mathcal{P}(\bar{n}, \tilde{n})$  为  $\bar{n} \times \tilde{n}$  匹配矩阵全体, 进一步, 还可以给出赋权图匹配的矩阵形式的等价模型:

$$X^* \in \arg \min \left\{ \|\bar{A} - X \tilde{A} X^T\|^2 \mid X \in \mathcal{P}(\bar{n}, \tilde{n}) \right\} \quad (6)$$

其中,  $\|\cdot\|$  表示 Frobenius 范数  $\|X\| = \text{tr}(X X^T)^{0.5}$ .  $\pi^*$  和  $X^*$  满足关系:  $X^*(1, 2, \dots, \tilde{n}) = (\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_{\bar{n}}^*)$ .

收稿日期 2009-05-15 录用日期 2010-03-08  
Manuscript received May 15, 2009; accepted March 8, 2010  
国家自然科学基金 (60970149), 福建省教育厅 B 类基金 (JB07050) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60970149) and Class-B Foundation of Fujian Education Department (JB07050)

1. 西安交通大学信息与系统科学研究所 西安 710049 2. 福建师范大学数学与计算机科学学院 福州 350007

1. Institute for Information and System Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049 2. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007

当  $\bar{n} = \tilde{n}$  时, 式 (6) 等价于如下的规划:

$$X^* \in \arg \min \left\{ \|\bar{A}X - X\tilde{A}\| \mid X \in \mathcal{P}(n) \right\} \quad (7)$$

本文关注  $\bar{n} = \tilde{n} = n$  的情况.

## 2 交替迭代算法

求解赋权图匹配的最大困难在于: 置换矩阵的离散性. 一个普遍的策略是: 在不改变目标函数的前提下, 对置换矩阵进行松弛, 并以离松弛解最近的置换矩阵作为近似解. 实际上, 置换矩阵是一个非负的正交矩阵. 鉴于此, 本节对置换矩阵进行双向松弛, 即同时松弛到正交矩阵和非负矩阵, 提出了赋权图匹配的一种新的松弛障碍连续优化模型, 并设计了单调下降的求解算法.

**定理 1**<sup>[12]</sup>.  $\mathcal{P}(n) = \mathcal{O}(n) \cap \mathcal{M}^+(n)$ , 其中,  $\mathcal{O}(n)$  是  $n$  阶正交矩阵集合,  $\mathcal{M}^+(n)$  是  $n$  阶实非负矩阵集合.

利用定理 1, 定义如下的双向松弛障碍规划:

$$F(\alpha) = \min \left\{ \|\bar{A}X - X\tilde{A}\|^2 + \alpha \|X - Y\|^2 \mid X \in \mathcal{M}^+(n), Y \in \mathcal{O}(n) \right\}$$

**定理 2.** 任给  $\alpha > 0$ , 以下结论成立:

- 1)  $F(\alpha) \leq \min\{\|\bar{A}P - P\tilde{A}\|^2 \mid P \in \mathcal{P}(n)\}$ ;
- 2)  $F(\alpha)$  关于  $\alpha$  是单调上升函数, 且  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} F(\alpha) = \min\{\|\bar{A}P - P\tilde{A}\|^2 \mid P \in \mathcal{P}(n)\}$ .

**证明.** 证明是显然的.  $\square$

**注 1.** 易知,  $\min\{\|\bar{A}X - X\tilde{A}\|^2 \mid X \in \mathcal{P}(n)\} \geq F(\alpha) \geq \max(\min\{\|\bar{A}X - X\tilde{A}\|^2 \mid X \in \mathcal{M}^+(n)\}, \min\{\|\bar{A}X - X\tilde{A}\|^2 \mid X \in \mathcal{O}(n)\})$ . 故上述双向松弛策略比单向松弛更加“紧”.

和一般的基于松弛的赋权图匹配算法一样, 我们给出如下的求解算法.

**算法 1.** 障碍松弛算法

**步骤 1.** 求解如下的连续优化模型:

$$(X^*, Y^*) = \arg \min \{F_\alpha(X, Y) \mid X \in M^+(n), Y \in \mathcal{O}(n)\} \quad (8)$$

其中,  $F_\alpha(X, Y) = \|\bar{A}X - X\tilde{A}\|^2 + \alpha \|X - Y\|^2$ ,  $\alpha > 0$  是障碍参数.

**步骤 2.** 求解如下的离散优化问题:

$$P^* = \arg \min \{ \|P - X^*\|^2 \mid P \in \mathcal{P}(n) \} \quad (9)$$

**注 2.** 求解式 (9) 是基于松弛方法求解赋权图匹配算法的一个公共的子问题. 实际上, 式 (9) 等价于如下的线性分配问题 (Linear assignment problem, LAP)

$$P^* = \arg \min \{ \text{tr}(-X^{*T}P) \mid P \in \mathcal{P}(n) \} \quad (10)$$

需要特别指出的是, 大多数的线性分配算法都默认输入矩阵是非负的, 而此处的输入矩阵  $-X^*$  未必非负, 但是, 我们可以给  $-X^*$  加上一个常数矩阵, 使得输入矩阵是非负的, 且不改变问题的解. 常用的 LAP 算法有 Kuhn-Munkres 算式<sup>[10]</sup>, 它的时间复杂度为  $O(n^3)$ .

余下的问题是给出求解式 (8) 的有效算法. 它是一个二元联合优化问题, 它的目标函数关于非负变元是凸二次函数, 且关于正交变元是线性函数. 一个有趣的结论是, 线性函数在正交矩阵上的极值点有完美的解决方案<sup>[13]</sup>, 为完备起见, 给出如下的简单证明.

**引理 1.** 若  $A$  是半正定矩阵, 则  $\max\{\text{tr}(YA) \mid Y \in \mathcal{O}(n)\} = \text{tr}(A)$ .

**证明.** 令  $CC^T$  是矩阵  $A$  的 Cholesky 分解 (即  $A = CC^T$ ), 则任给正交矩阵  $Y$ , 有  $\text{tr}(YA) = \text{tr}(YCC^T) = \text{tr}(C^TYC) = \sum_{i=1}^n c_i^T Y c_i$ . 由 Cauchy-Schwartz 不等式知,  $c_i^T Y c_i \leq [(c_i^T c_i)(c_i^T Y^T Y c_i)]^{0.5} = c_i^T c_i$ . 故  $\text{tr}(YA) \leq \text{tr}(A)$ .  $\square$

**定理 3.** 令  $A = U\Lambda V^T$  表示矩阵  $A$  的 SVD 分解, 则  $Y = VU^T \in \arg \max\{\text{tr}(YA) \mid Y \in \mathcal{O}(n)\}$ .

**证明.** 因为  $A = U\Lambda V^T$ , 所以  $VU^T A = VU^T U\Lambda V^T = V\Lambda V^T$ . 由引理 1 知, 任给正交矩阵  $Q$ ,  $\text{tr}(VU^T A) \geq \text{tr}(QVU^T A)$ , 故  $VU^T \in \arg \max\{\text{tr}(YA) \mid Y \in \mathcal{O}(n)\}$ .  $\square$

因为凸二次规划已有较理想的求解算法<sup>[14]</sup>, 且线性函数在正交矩阵上的极小点有解析表达式, 故我们设计如下的交替迭代算法求解式 (8). 该算法思路被广泛地应用于二元优化问题, 且算法效果极其显著, 例如数据集匹配问题 (Data set registration problem) 中的 ICP 方法 (Iterative closest point) 等<sup>[1]</sup>.

**算法 2.** 交替迭代算法

**步骤 1.** 给定容差  $\epsilon > 0$ , 障碍参数  $\alpha > 0$ , 以及初始迭代点  $X^0 \in \mathcal{M}^+(n)$ ,  $k = 0$ .

**步骤 2.** 求解下列优化问题:

$$Y^k \in \arg \min \left\{ \|X^k - Y\|^2 \mid Y \in \mathcal{O}(n) \right\} \quad (11)$$

若  $k > 1$  且  $F_\alpha(X^{k-1}, Y^{k-1}) - F_\alpha(X^k, Y^k) \geq \epsilon$ , 算法终止; 否则,  $k = k + 1$ , 转步骤 3.

**步骤 3.** 求解下列优化问题:

$$X^k \in \arg \min \left\{ \|\bar{A}X - X\tilde{A}\|^2 + \|X - Y^{k-1}\|^2 \mid X \in M^+(n) \right\} \quad (12)$$

转步骤 2.

**注 3.** 式 (11) 等价于

$$Y^k \in \arg \max \left\{ \text{tr}(YX^{kT}) \mid Y \in \mathcal{O}(n) \right\} \quad (13)$$

根据定理 3, 易求它的解.

以下给出交替迭代算法的局部收敛定理.

**定理 4.** 若  $\{X^k, Y^k\}_{k=1}^{+\infty}$  是由交替迭代算法产生的迭代序列, 则

$$F_\alpha(X^k, Y^k) \geq F_\alpha(X^{k+1}, Y^{k+1})$$

**证明.** 因为  $Y^k \in \arg \min\{\|X^k - Y\|^2 \mid Y \in \mathcal{O}(n)\}$ ,  $X^{k+1} \in \arg \min\{\|\bar{A}X - X\tilde{A}\|^2 + \|X - Y^k\|^2 \mid X \in M^+(n)\}$ , 所以  $0 \leq F_\alpha(X^{k+1}, Y^{k+1}) \leq F_\alpha(X^{k+1}, Y^k) \leq F_\alpha(X^k, Y^k)$ . 故序列  $\{F(X^k, Y^k)\}$  是单调有下界序列, 必有极限点.  $\square$

**注 4.** 易见, 若初始点  $X^0$  是置换矩阵, 则  $Y^0 = X^0$ . 由于现有的松弛匹配算法所得到的近似解为置换矩阵, 因此, 由交替迭代算法得到的解不弱于现有赋权图匹配算法得到的近似解. 由定理 4 知,  $F_\alpha(X^k, Y^k) \leq F_\alpha(X^{k-1}, Y^{k-1}) \leq F_\alpha(X^1, Y^1) \leq F_\alpha(X^1, Y^0) \leq F_\alpha(X^0, Y^0) = \|\bar{A}X^0 - X^0\tilde{A}\|^2$ . 这表明, 交替迭代算法在一定程度上可以提升其他算法的性能.

至此, 我们已经给出了一种新的求解赋权图匹配的松弛模型, 并设计了求解算法. 但是, 还有两个子问题需要特别注意:

1) 初始点的选择. 交替迭代算法是局部算法, 解的好坏强烈地依赖于初始点的选择. 本文采取如下策略:

$$X^0 \in \arg \min \|\bar{A}X - X\tilde{A}\|^2 + \beta(n - \mathbf{1}_n^T P \mathbf{1}_n)$$

$$\text{s.t. } X\mathbf{1}_n \leq \mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n^T X \leq \mathbf{1}_n^T, X \geq 0$$

其中,  $\mathbf{1}_n$  表示  $n$  维恒 1 向量,  $\beta$  是给定参数.

2) 障碍参数的选择. 受下述定理 5 的启发, 本文选择  $\alpha = \|\bar{A}\| + \|\tilde{A}\|$ .

考虑如下的松弛模型:

$$(X^*, Y^*) \in \arg \min \{G_\alpha(X, Y) | Y \in M(n), X \in \mathcal{P}(n)\} \quad (14)$$

其中,  $G_\alpha(X, Y) = \|\bar{A}Y - Y\tilde{A}\| + \alpha\|X - Y\|$ ,  $\alpha > 0$  是一个障碍参数,  $M(n)$  是  $n$  阶实矩阵全体.

**定理 5.** 若  $\alpha \geq \|\bar{A}\| + \|\tilde{A}\|$ , 则式 (7) 与式 (14) 等价. 即:

1)  $\min\{\|\bar{A}X - X\tilde{A}\| | X \in \mathcal{P}(n)\} = \min\{G_\alpha(X, Y) | Y \in M(n), X \in \mathcal{P}(n)\}$ ;

2) 若  $X^* \in \min\{\|\bar{A}X - X\tilde{A}\| | X \in \mathcal{P}(\bar{n}, \tilde{n})\}$ , 则

$$(X^*, X^*) \in \arg \min \{G_\alpha(X, Y) | Y \in M(n), X \in \mathcal{P}(n)\};$$

3) 若  $(X^*, Y^*) \in \arg \min \{G_\alpha(X, Y) | Y \in M(n), X \in \mathcal{P}(n)\}$ , 则

$$X^* \in \min\{\|\bar{A}X - X\tilde{A}\| | X \in \mathcal{P}(n)\}.$$

**证明.** 1)  $\forall X \in \mathcal{P}(n), Y \in M(n)$ ,

$$\begin{aligned} \|\bar{A}X - X\tilde{A}\| &= \|(\bar{A}Y - Y\tilde{A}) + \\ &(\bar{A}X - \bar{A}Y) + (Y\tilde{A} - X\tilde{A})\| \leq \\ &\|\bar{A}Y - Y\tilde{A}\| + \|\bar{A}\|\|X - Y\| + \|\tilde{A}\|\|X - Y\| \leq \\ &\|\bar{A}Y - Y\tilde{A}\| + \alpha\|X - Y\| \end{aligned}$$

故  $\min\{\|\bar{A}X - X\tilde{A}\| | X \in \mathcal{P}(n)\} \leq \min\{G_\alpha(X, Y) | Y \in M(n), X \in \mathcal{P}(n)\}$ . 易知  $\min\{\|\bar{A}X - X\tilde{A}\| | X \in \mathcal{P}(n)\} \geq \min\{G_\alpha(X, Y) | Y \in M(n), X \in \mathcal{P}(n)\}$ , 从而  $\min\{\|\bar{A}X - X\tilde{A}\| | X \in \mathcal{P}(n)\} = \min\{G_\alpha(X, Y) | Y \in M(n), X \in \mathcal{P}(n)\}$ . 不难由 1) 推知 2) 与 3).  $\square$

### 3 数值实验

本节利用随机数据和现实数据, 以赋权图匹配的经典算法作为比较对象, 来分析交替迭代算法 (Alternate iteration graph matching, AIGM) 的匹配性能. 本文选用的经典算法包括: 线性规划算法 (Linear programming graph matching algorithm, LPGM)<sup>[9]</sup> 和改进的特征值分解算法 (Improved eigen-decomposition graph matching algorithm, IEGM)<sup>[7-8]</sup>.

实验按照如下的过程产生随机赋权图匹配对: 首先, 随机产生  $m$  ( $m = 100$ ) 个顶点个数为  $n$  的赋权图  $\{\bar{G}_i\}_{i=1}^m$ , 权重服从  $[0, 1]$  上均匀分布, 它的邻接矩阵是  $\{\bar{A}_i\}_{i=1}^m$ ; 其次, 随机产生  $n$  阶均匀噪声矩阵  $\{N_i(\epsilon)\}_{i=1}^m$ , 其中  $\epsilon$  表示噪声水平; 最后, 产生另一个赋权图  $\{\tilde{G}_i\}_{i=1}^m$ , 它的邻接矩阵是  $\tilde{A}_i = \bar{A}_i + N_i(\epsilon)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

图 1 展示的是, 给定图尺寸 ( $n = 8$ ) 的情况下, 顶点正确匹配率随噪音的变化情况. 从图 1 可知, 当噪音比较小的时候, AIGM/LPGM/IEGM 的匹配性能都令人满意, 而当

噪音比较大时, AIGM 好于 LPGM/IEGM. 图 2 和图 3 分别展示的是, 给定噪音  $\epsilon = 0.2$  和  $\epsilon = 0.8$  的情况下, 顶点正确匹配率随图尺寸的变化情况. 从图 2 和图 3 可知, 随着图尺寸的增长, AIGM 略好于 LPGM/IEGM. 总而言之, 相比于 LPGM/IEGM, AIGM 鲁棒性比较好, 且更适合大尺寸的赋权图匹配.

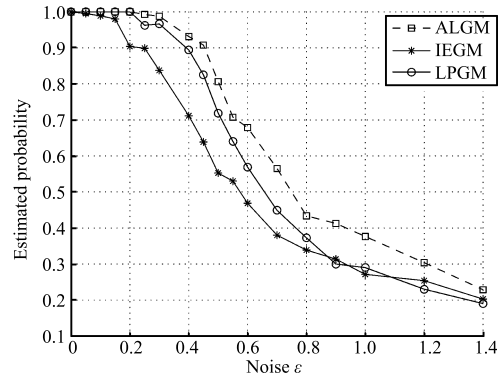


图 1 顶点正确匹配率与噪音的关系 ( $n = 8$ )

Fig. 1 Estimated probability of correct vertex-vertex matching vs. noise level when  $n = 8$

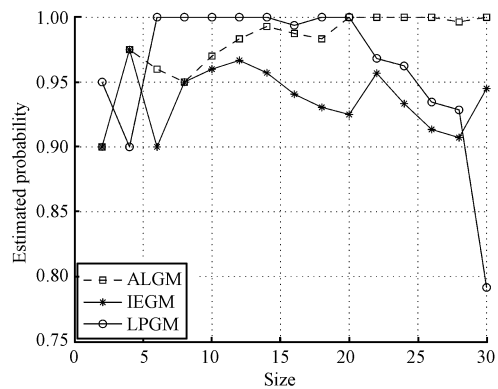


图 2 顶点正确匹配率与尺寸的关系 (噪音:  $\epsilon = 0.2$ )

Fig. 2 Estimated probability of correct vertex-vertex matching vs. the size of graphs (noise:  $\epsilon = 0.2$ )

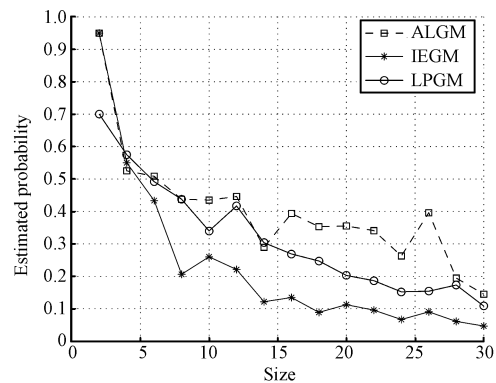


图 3 顶点正确匹配率与尺寸的关系 (噪音:  $\epsilon = 0.8$ )

Fig. 3 Estimated probability of correct vertex-vertex matching vs. the size of graphs (noise:  $\epsilon = 0.8$ )

此外, 我们还通过实际图像的对应问题来检验算法的有效性, 图像特征点的 Delaunay 图是反映图像几何特征的一种重要工具, 已广泛应用于图像匹配领域<sup>[5]</sup>, 所以, 我们对图像的 Delaunay 图应用上述三种算法. 图 4 是一对小鸟的轮廓图 (<http://www.cis.temple.edu/latecki/TestData>), 图 5 是其对应的 Delaunay 图 (人工标记 36 个特征点, 然后运行 QuickHull 算法<sup>[15]</sup> 得到 Delaunay 图). 表 1 是对应结果, 从表 1 可知, AIGM 在匹配精度方面强于 LPGM/IEGM.

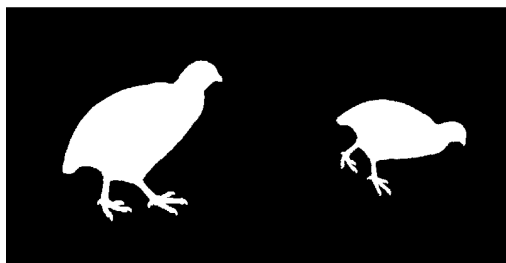


图 4 Mpeg7shape8 标准数据库图像

Fig. 4 Images from Mpeg7shape8 standard database

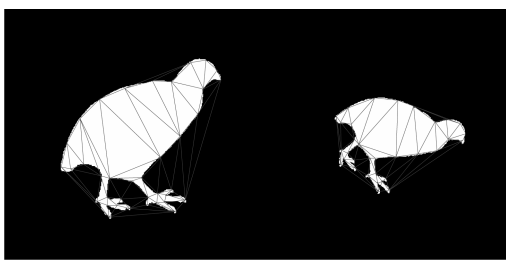


图 5 Delaunay 图

Fig. 5 Delaunay graphs overlaid

表 1 图像特征点对应问题

Table 1 The correspondence problem of feature points

Algorithms	LPGM	EIGM	AIGM
Correct correspondences	15	26	30

## References

- 1 Ying Shi-Hui, Peng Ji-Gen, Zheng Kai-Jie, Qiao Hong. Lie group method for data set registration problem with anisotropic scale deformation. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(7): 867–874  
(应时辉, 彭济根, 郑开杰, 乔红. 含各向异性尺度形变的数据集匹配问题的 Lie 群方法. *自动化学报*, 2009, **35**(7): 867–874)
- 2 Rangarajan A, Chui H, Mjolsness E. A relationship between spline-based deformable models and weighted graphs in non-rigid matching. In: *Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Hawaii, USA: IEEE, 2001. 897–910
- 3 Loiola E M, de Abreu N M, Boaventura-Netto P O, Hahn P, Querido T. A survey for the quadratic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, 2007, **176**(2): 657–690
- 4 Chen Zhi-Ping, Xu Zong-Ben. *Computer Mathematics*. Beijing: Science Press, 2001  
(陈志平, 徐宗本. *计算机数学*. 北京: 科学出版社, 2001)
- 5 Conte D, Foggia P, Sansone C, Vento M. Thirty years of graph matching in pattern recognition. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2004, **18**(3): 265–298
- 6 Moe R. GRIBB: branch-and-bound methods on the internet. In: *Proceedings of the 5th International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics*. Czestochowa, Poland: Springer, 2003. 1020–1027
- 7 Umeyama S. An eigendecomposition approach to weighted graph matching problems. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1988, **10**(5): 695–703
- 8 Zhao G, Luo B, Tang J, Ma J. Using eigen-decomposition method for weighted graph matching. In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Intelligent Computing*. Qingdao, China: Springer, 2007. 1283–1294
- 9 Almohamad H A, Duffuaa S O. A linear programming approach for the weighted graph matching problem. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1993, **15**(5): 522–525
- 10 Papadimitriou C H, Steiglitz K. *Combinatorial Optimization Algorithms and Complexity*. New Jersey: Prentice-Hall, 1982
- 11 Gold S, Rangarian A. A graduated assignment algorithm for graph matching. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1996, **18**(4): 377–388
- 12 Zavlanos M M, Pappas G J. A dynamical systems approach to weighted graph matching. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, USA: IEEE, 2006. 3492–3497
- 13 Ying Shi-Hui. Lie Group Method for Data Set Registration [Ph.D. dissertation], Xi'an Jiaotong University, China, 2008  
(应时辉. 数据集匹配问题的 Lie 群方法研究及其应用 [博士学位论文], 西安交通大学, 中国, 2008)
- 14 Goldfarb D, Liu S. An  $O(n^3L)$  primal interior point algorithm for convex quadratic programming. *Mathematical Programming*, 1991, **49**(1-3): 325–340
- 15 Barber C B, Dobkin D P, Huhdanpaa H T. The quickhull algorithm for convex hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1996, **22**(4): 469–483

郑开杰 西安交通大学信息与系统科学研究所博士研究生. 主要研究方向为图匹配和数据集匹配. E-mail: kaijie\_zheng@163.com  
(ZHENG Kai-Jie Ph.D. candidate at the Institute for Information and System Science, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers graph matching and data set registration.)

高玉涛 西安交通大学信息与系统科学研究所硕士研究生. 主要研究方向为图匹配和数据集匹配. E-mail: ytgaohuhe@gmail.com  
(GAO Yu-Tao Master student at the Institute for Information and System Science, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers graph matching and data set registration.)

彭济根 西安交通大学信息与系统科学研究所教授. 主要研究方向为机器学习, 数据集匹配和非线性泛函分析. 本文通信作者.  
E-mail: jgpeng@mail.xjtu.edu.cn  
(PENG Ji-Gen Professor at the Institute for Information and System Science, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers machine learning, registration of data sets, and nonlinear functional analysis and its applications. Corresponding author of this paper.)