非线性 Lipschitz 算子的一个特征不变量及其应用 *

彭济根　　宋学力　　王凯明

(西安交通大学理学院应用数学研究中心，西安 710049)

(E-mail: jgpeng@mail.xjtu.edu.cn; songxl810@stu.xjtu.edu.cn)

摘　要　本文通过推广有界线性算子对偶到非线性 Lipschitz 算子的方法, 将谱半径的概念推广到非线性情形, 从而得到一个有关非线性 Lipschitz 算子的特征数. 作为应用，本文在一定条件下证明：非线性离散系统的收敛性可由算子 T 在各点处的 Jacobi 矩阵谱半径确定，从而部分地证明 LaSalle 提出的一个公开性猜想.

关键词　非线性 Lipschitz 算子；Lipschitz 对偶；谱半径；LaSalle 猜想

MR(2000) 主题分类　47H05; 47H12; 47D05

中图分类　O177; O175

1　引言

设 X 为数域 $\boldsymbol{K}$(实数域 $\boldsymbol{R}$ 或复数域 $\boldsymbol{C}$) 上的 Banach 空间， $C \subset X$ 为闭子集， T 是定义在 C 上的算子. 关于迭代序列

$$x_{n+1} = Tx_n, \qquad x_0 = x, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{1}$$

的收敛性，一个熟知的经典结论是：若 T 是 X 上的有界线性算子 (特别地， T 为矩阵), 则当 T 的谱半径 $\rho(T) < 1$ 时，迭代序列 $T^n x$ 对每个初始值 $x \in X$ 皆收敛. 因为谱半径是在等价范数下的不变量 (即，谱半径与空间 X 上所赋的范数无关), 因此它对线性离散系统收敛性的刻画是本质的. 基于此，人们一直希望能将这样一个不变量平移到非线性情形. 例如， Lasalle[1,p.21] 就曾提出如下著名的猜想：设 $Tx = A(x)x,\ x \in R^n$, 其中 $\forall\, x \in K^n,\ A(x)$ 是 $n \times n$ 阶矩阵，且 $\rho(A(x)) < 1$, 则由 T 所确定的迭代序列对每个初始值都是收敛的. 然而，该猜想已被否定 [2]. 这表明，对于一般的非线性离散系统，简单平移谱半径的研究方法是有限的. 因此，探索新的研究方法具有十分重要的意义.

本文的主要目的是，运用 [3,4] 所引入的 “对偶” 思想，对 Lipschitz 算子定义一个能刻画相应离散系统收敛性的不变量，从而将上面提到的经典结论推广到非线性情形.

设 D 是 Banach 空间 Y 的子空间， $T : C \to D$ 为从 C 到 D 的影射. 如果存在常数 $M > 0$, 使得

$$\|Tx - Ty\| \le M\|x - y\|, \qquad \forall\, x, y \in C,$$

本文 2005 年 3 月 4 日收到.

* 国家自然科学基金 (10101019,10531030 号) 资助项目.

则称算子 T 是 Lipschitz 连续的 (简称 Lispchitz 算子). 进一步地，若对每个 Lipschitz 算子 T 定义其最小 Lipschitz 常数为：

$$L(T)=\sup_{x,y\in C,\,x\neq y}\frac{\|Tx-Ty\|}{\|x-y\|},\tag{2}$$

则可验证，泛函 $L(\cdot)$ 是线性空间

$$L(C,D)=\{\text{所有从 } C \text{ 到 } D \text{ 的 Lipschitz 算子}\}$$

上的半范数，从而 $\big(L(C,D),L(\cdot)\big)$ 是一个线性半范空间. 易知， X 的对偶空间 X^* 是 $L(X,\boldsymbol{K})$ 的一个完备子空间.

设 $T\in L(C,C)$, 定义算子 $T^{l*}:L(C,\boldsymbol{K})\to L(C,\boldsymbol{K})$ 如下：

$$T^{l*}f(x)=f(Tx),\qquad x\in C,\quad f\in L(C,\boldsymbol{K}),\tag{3}$$

则由 [4,5] 知， T^{l*} 是 $L(C,\boldsymbol{K})$ 上的有界线性算子，且其算子范数 $\|T^{l*}\|=L(T)$. 易见，T^{l*} 是有界线性算子的对偶算子的非线性推广.

有了这些预备性工作，现在让我们重新考量上面提到的经典结论. 周知，有界线性算子的谱半径与其对偶算子的谱半径是一致的. 因而这一经典结论可等价地陈述为：若 T 为有界线性算子，则当对偶算子 T^* 的谱半径 $\rho(T^*)<1$ 时，迭代序列 $x_{n+1}=T^nx$ 对每个初始值 $x\in X$ 皆收敛. 基于这些认识，我们将在下一节充分运用 T^{l*} 的有界线性特征，将该经典结论推广到非线性情形.

2 主要结果

回想，线性半范空间 E 上的两个半范 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 称为等价的，如果存在正常数 k_1, k_2 使得

$$k_1\|x\|_1\le\|x\|_2\le k_2\|x\|_1,\qquad\forall\,x\in E.$$

引理 1 设 X 是赋以范数 $\|\cdot\|$ 的 Banach 空间， $C\subset X$ 为闭子集, 半范数 $L(\cdot)$ 由 (2) 式定义. 若 $\|\cdot\|^*$ 是空间 $L(C,\boldsymbol{K})$ 上与 $L(\cdot)$ 等价的半范数, 则在 C 上存在与 X 的范数 $\|\cdot\|$ 强等价的距离 d (即, 存在正常数 m, M 使得, $\forall\,x,y\in C$, $m\|x-y\|\le d(x,y)\le M\|x-y\|$), 使得

$$\sup_{x,y\in C,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}\le\|f\|^*,\qquad\forall\,f\in L(C,\boldsymbol{K}).\tag{4}$$

反之，若 d 是 C 上与 X 的范数 $\|\cdot\|$ 强等价的距离，则在 $L(C,\boldsymbol{K})$ 上存在与 $L(\cdot)$ 等价的半范数 $\|\cdot\|^*$, 使得

$$d(x,y)=\sup_{f\in L(C,\boldsymbol{K}),\|f\|^*\le 1}|f(x)-f(y)|,\qquad\forall\,x,y\in C.\tag{5}$$

证 设 $\|\cdot\|^*$ 与 $L(\cdot)$ 等价，即存在正常数 k_1,k_2 使得

$$k_1\|f\|^*\le L(f)\le k_2\|f\|^*,\qquad f\in L(C,\boldsymbol{K}).\tag{6}$$

对任意给定的 $x,y\in C$, 定义

$$d(x,y)=\sup_{f\in L(C,\boldsymbol{K}),\,\|f\|^*\le 1}|f(x)-f(y)|,$$

显然， d 满足不等式 (4). 注意到 X^* 在 C 上的限制包含于 $L(C,\boldsymbol{K})$, 故 $L(C,\boldsymbol{K})$ 可分离 C 中的点. 由此易验证 $d(\cdot,\cdot)$ 为 C 上的距离. 由以上两式易得

$$d(x,y) \le \sup_{f\in L(C,\boldsymbol{K}),\,\|f\|^*\le 1} L(f)\|x-y\| \le k_2\|x-y\|.$$

另外，由 (6) 式可证

$$\begin{aligned}\|x-y\| &= \sup_{f\in X^*,\|f\|\le 1} |f(x)-f(y)| \le \sup_{f\in L(C,\boldsymbol{K}),\,L(f)\le 1} |f(x)-f(y)| \\ &\le \sup_{f\in L(C,\boldsymbol{K}),\,k_1\|f\|^*\le 1} |f(x)-f(y)| \le \sup_{f\in L(C,\boldsymbol{K}),\,\|f\|^*\le 1} \frac{1}{k_1}|f(x)-f(y)| \\ &= \frac{1}{k_1}d(x,y).\end{aligned}$$

于是，距离 d 与范数 $\|\cdot\|$ 强等价.

反之，设 C 上的距离 d 与范数 $\|\cdot\|$ 强等价. 对每个 $f\in L(C,\boldsymbol{K})$, 令

$$\|f\|^* = \sup_{x,y\in C,\,x\ne y} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}.$$

易证，泛函 $\|\cdot\|^*$ 是 $L(C,\boldsymbol{K})$ 上的半范数，且与 $L(\cdot)$ 强等价. 设 $y\in C$, 定义 C 上泛函 $f_y(x)=d(x,y)$ $(\forall\, x\in C)$. 易知， $f_y\in L(C,\boldsymbol{K})$, 且 $\|f_y\|^*\ge 1$. 另外，由于

$$\|f_y\|^* = \sup_{z_1,z_2\in C,z_1\ne z_2} \frac{|d(z_1,y)-d(z_2,y)|}{d(z_1,z_2)} \le 1.$$

故 $\|f_y\|^*=1$. 于是

$$d(x,y) = f_y(x)-f_y(y) \le \sup_{f\in L(C,\boldsymbol{K}),,|f\|^*\le 1} |f(x)-f(y)|.$$

反向不等式明显. 于是，引理得证.

定理 1　设 $T\in L(C,C)$, 算子 T^{l*} 如 (3) 式所定义. 若 T^{l*} 的谱半径 $\rho(T^{l*})<1$, 则 T 在 C 中有唯一的不动点 x^*, 并且对每个初始值 $x\in C$, 相应的迭代序列 $x_{n+1}=Tx_n$ 皆收敛于 x^*.

证　由谱半径 $\rho(T^{l*})$ 的计算公式知， $\forall\varepsilon>0$, 存在 $n_\varepsilon>0$, 使得当 $n>n_\varepsilon$ 时， $\|(T^{l*})^n\|\le(\rho(T^{l*})+\varepsilon)^n$. $\forall f\in L(C,\boldsymbol{K})$, 定义

$$\|f\|^* \triangleq \sup_{n=0,1,2,\cdots} L((T^{l*})^n f)\cdot(\rho(T^{l*})+\varepsilon)^{-n}. \tag{7}$$

易知，泛函 $\|\cdot\|^*$ 是 $L(C,\boldsymbol{K})$ 上的半范数. 显然， $\forall\, f\in L(C,\boldsymbol{K})$, $L(f)\le\|f\|^*$. 另外，若取 $k=\max\{1,L((T^{l*})^n)(\rho(T^{l*})+\varepsilon)^{-n}:1\le n\le n_\varepsilon\}$, 则有 $\|f\|^*\le k\,L(f)$. 故， $\|\cdot\|^*$ 与 $L(\cdot)$ 是 $L(C,\boldsymbol{K})$ 上两个等价半范数.

设相应于 $L(C,\boldsymbol{K})$ 上半范数 $\|\cdot\|^*$, 算子 T^{l*} 的算子范数为 $\|T^{l*}\|^*$, 则由定义知， $\|T^{l*}\|^*\le\rho(T^{l*})+\varepsilon$. 于是，当 $\rho(T^{l*})<1$ 时取 $\varepsilon<1-\rho(T^{l*})$, 即得 $r\triangleq\|T^{l*}\|^*<1$.

在 C 上定义距离 d 为

$$d(x,y) = \sup_{f\in L(C,\boldsymbol{K}),\,\|f\|^*\le 1} |f(x)-f(y)|,$$

则由引理 1 知， d 与范数 $\|\cdot\|$ 强等价，且 $\forall x,y\in C, f\in L(C,\boldsymbol{K})$, 有

$$|f(x)-f(y)|\le \|f\|^*\cdot d(x,y).$$

因而， $\forall x,y\in C$,

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty)&=\sup_{f\in L(C,\boldsymbol{K}),\,\|f\|^*\le 1}|f(Tx)-f(Ty)|=\sup_{f\in L(C,\boldsymbol{K}),\,\|f\|^*\le 1}|T^{l*}f(x)-T^{l*}f(y)|\\ &\le \sup_{f\in L(C,\boldsymbol{K}),\,\|f\|^*\le 1}\|T^{l*}f\|^*\cdot d(x,y)\le \|T^{l*}\|^*\cdot d(x,y). \end{aligned}$$

由于 $\|T^{l*}\|^*<1$, 因此 T 在距离 d 下是压缩的．从而由压缩不动点原理知， T 在 C 上有唯一的不动点 x^*, 且 $\forall x\in C$, $d(T^nx,x^*)\to 0$. 于是，由 d 与 $\|\cdot\|$ 的等价性知，$\|T^nx-x^*\|\to 0$. 证毕.

注 1 熟知，作为有界线性算子， T^{l*} 的谱半径可由以下公式计算：

$$\rho(T^{l*})=\lim_{n\to+\infty}\|(T^{l*})^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{7}$$

注意到, 对任意 Lipschitz 算子 A, 皆有 $\|A^{l*}\|=L(A)$, 特别地, $\forall n\in\boldsymbol{N}$, $\|(T^n)^{l*}\|=L(T^n)$. 由此可见， $\rho(T^{l*})\le L(T)$, 即，定理 1 蕴涵压缩不动点原理．另外，由公式 (8) 易见，当 T 退化为线性算子时， (8) 式为谱半径的计算公式，即， $\rho(T^{l*})$ 正是 T 的谱半径. 这表明，定理 1 对经典线性结论的推广不仅是定性的，而且是定量的.

注 2 由引理 1 与 (8) 式易知，特征数 $\rho(T^{l*})$ 不依赖于空间 X 上强等价范数的选取 (事实上，因为谱半径 $\rho(T^{l*})$ 不依赖空间 $L(C,\boldsymbol{K})$ 上等价范数的选择，所以，由引理 1 知， $\rho(T^{l*})$ 不依赖于 X 上等价距离的选择), 因此， $\rho(T^{l*})$ 具有谱半径最本质的定量特性．这表明， $\rho(T^{l*})$ 对非线性离散系统收敛性的刻画在一定程度上是本质的.

周知，谱半径是作为刻画有界线性算子可逆性的一个特征数而引入的．对于有界线性算子 T, 除计算公式 $\rho(T^*)=\lim\limits_{n\to+\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ 外，谱半径 $\rho(T^*)$ 还可由等式 $\rho(T^*)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(T)\}$ (其中 $\sigma(T)$ 表示 T 的谱集) 确定，即， $\rho(T^*)$ 为算子 T 的最大可逆扰动半径．下例表明，这一等式不能简单地推广到非线性情形.

例 1 设 $C=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, 定义算子 $T:C\to C$ 为

$$Tx=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4},\qquad \forall x\in C.$$

显然， $T\in L(C,C)$ 且 $L(T)=\frac{1}{2}$. 因为 T 是压缩的，且 C 是紧集，所以，序列 T^nx 在 C 上一致收敛于不动点 $x^*=0$, 即， $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_\varepsilon\in\boldsymbol{N}$ 使得，当 $n\ge N_\varepsilon$ 时

$$|T^nx-0|<\varepsilon,\qquad \forall x\in C.$$

] 于是，当 $n>N_\varepsilon$ 时,

$$\begin{aligned} L(T^n)&=\sup_{x\in C}\left|\frac{dT^nx}{dx}\right|=\sup_{x\in C}|T'(T^{n-1}x)T'(T^{n-2}x)\cdots T'(Tx)T'x|\\ &=\frac{1}{2^n}\sup_{x\in C}\left|\cos(T^{n-1}x+\frac{\pi}{6})\cos(T^{n-2}x+\frac{\pi}{6})\cdots\cos(Tx+\frac{\pi}{6})\cos(x+\frac{\pi}{6})\right|\\ &\le\frac{1}{2^n}\left|\cos\frac{\pi}{6}+\varepsilon\right|^{n-N_\varepsilon}. \end{aligned}$$

因此，由 (8) 式与 $\varepsilon > 0$ 的任意性知， $\rho(T^{l*}) \le \frac{\sqrt{3}}{4}$. 另一方面，注意到 $T'(-\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, 故存在 $x_0 \in C$ 使得

$$\lambda =: \frac{Tx_0 - T(-\frac{\pi}{6})}{x_0 + \frac{\pi}{6}} > \rho(T^{l*}).$$

取 $x_1 = x_0$, $x_2 = -\frac{\pi}{6}$, 则易验证 $\lambda x_1 - Tx_1 = \lambda x_2 - Tx_2$, 即算子 $\lambda I - T$ 是不可逆的.

该例表明，作为刻画非线性离散系统 $x_{n+1} = Tx_n$ 收敛性的特征数， $\rho(T^{l*})$ 是一个很小的量，它甚至小于算子 T 的可逆扰动半径.

3　应用举例：关于 LaSalle 的一个猜想

LaSalle J 曾在其著作 [1,p.21] 中提出这样一个猜想：设映射 $T : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ 连续可微，$T0 = 0$, 且在每点 $x \in \boldsymbol{K}^n$ 处的 Jacobi 矩阵的谱半径小于 1, 则对任意初始值 $x_0 \in \boldsymbol{K}^n$, 迭代 $x_{n+1} = Tx_n$ 皆收敛于 T 的唯一平衡点 $x = 0$. 易见，该猜想正是著名 Jacobi 猜想 [6] 的离散版本，因而具有非常重要的意义. 尽管 Jacobi 猜想已得到解决 [10], 但到目前为止，有关 LaSalle 猜想的讨论并不多见，其中正面结果仅见 [8]. 鉴于此，作为上节主要结论的应用，本节在一定条件下证明 LaSalle 猜想.

设 $T : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ 连续可微 ($\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$), 以下记 $\Gamma(T) = \{T'(x) : x \in \boldsymbol{K}^n\}$, 其中 $T'(x)$ 表示 T 在 $x \in \boldsymbol{K}^n$ 处的 Jacobi 矩阵.

定理 2　设 $T \in L(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K}^n)$ 连续可微. 若存在 $r \in (0,1)$, 使得

$$\rho \triangleq \sup\left\{\frac{\rho(A_1A_2\cdots A_m)}{r^m} : A_i \in \Gamma(T),\ 1 \le i \le m,\ m \in \boldsymbol{N}\right\} \le 1, \tag{9}$$

则 $\rho(T^{l*}) < 1$. 因此， T 有唯一的不动点 x^*, 且对任意初始值 $x \in \boldsymbol{K}^n$, 非线性迭代序列 $x_{n+1} = Tx_n$ 收敛于 x^*.

证　设 $\|\cdot\|$ 为 $\boldsymbol{K}^n$ 上给定的向量范数.　$\forall m \in \boldsymbol{N}$, 以下记 $\Gamma^m(T) = \{A_1A_2\cdots A_m : A_i \in \Gamma(T),\ i = 1, 2, \cdots, m\}$.

因为，由 T 的连续可微性可验证： $\forall m \in \boldsymbol{N}$,

$$\begin{aligned}
L(T^m) &= \sup_{x,y\in\boldsymbol{K}^n,\, x\ne y} \frac{\|T^m x - T^m y\|}{\|x-y\|} \\
&= \sup_{x,y\in\boldsymbol{K}^n,\, x\ne y} \frac{1}{\|x-y\|}\left|\int_0^1 (T^m)'(tx+(1-t)y))(x-y)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \sup_{x,y\in\boldsymbol{K}^n,\, x\ne y}\ \sup_{x_\theta\in\boldsymbol{K}^n} \frac{\|(T^m)'(x_\theta)(x-y)\|}{\|x-y\|} \\
&\le \sup_{x_\theta\in\boldsymbol{K}^n} \left\|T'(T^{m-1}x_\theta)T'(T^{m-2}x_\theta)\cdots T'(x_\theta)\right\| \\
&\le \sup\left\{\|A_1A_2\cdots A_m\| : A_i \in \Gamma(T),\ i = 1, 2, \cdots, m\right\} \\
&=: \|\Gamma^m(T)\|,
\end{aligned}$$

所以，由 (8) 式可得， $\rho(T^{l*}) \le \lim\limits_{m\to\infty} \|\Gamma^m(T)\|^{\frac{1}{m}}$. 记 $\rho(\Gamma^m) = \sup\{\rho(B) : B \in \Gamma^m(T)\}$, 则由 [7, Theorem IV] 知， $\rho(T^{l*}) \le \lim\limits_{m\to\infty} \rho(\Gamma^m(T))^{\frac{1}{m}}$. 另外，由条件 (9) 易验证， $\forall m \in \boldsymbol{N}$, $\rho(\Gamma^m(T)) \le r^m$, 从而， $\rho(T^{l*}) \le r < 1$. 于是，由定理 1 知， T 有唯一的不动点 x^*, 且对任意初始值 $x \in \boldsymbol{K}^n$, 非线性迭代 $x_{n+1} = Tx_n$ 皆收敛于 x^*. 证毕.

推论 1 若存在 $r \in (0,1)$ 使得

$$\lim_{m\to\infty} \sup \left\{ \frac{\rho(A_1 A_2 \cdots A_m)}{r^m} : A_i \in \Gamma(T) \cup \{rI\},\ 1 \le i \le m \right\} \le 1, \tag{10}$$

其中 I 表示 $n \times n$ 阶单位阵，则 T 有唯一的不动点 x^*, 并且 $\forall x \in \boldsymbol{K}^n$, 以 x 为初值的迭代序列 $x_{n+1} = Tx_n$ 收敛于 x^*.

证 记 ρ 为 (9) 式的左端项， $\Gamma_r = \Gamma(T) \cup \{rI\}$, 则

$$\rho \le \sup \left\{ \frac{\rho(A_1 A_2 \cdots A_m)}{r^m} : A_i \in \Gamma_r,\ 1 \le i \le m,\ m \in \boldsymbol{N} \right\} = \sup_{m\in\boldsymbol{N}} \frac{1}{r^m} \rho(\Gamma_r^m). \tag{11}$$

注意到， $\forall m, p \in \boldsymbol{N}$, $\Gamma_r^m \subset \frac{1}{r^p}\Gamma_r^{m+p}$. 故， $\alpha_m \triangleq \frac{1}{r^m}\rho(\Gamma_r^m)$ 是单调增的数列，因而 (10) 中的极限存在，且极限为 $\sup\limits_{m\in\boldsymbol{N}} \alpha_m$. 由 (11) 式易见，条件 (10) 蕴涵 (9), 因而由定理 2 知，该推论成立．证毕.

推论 2 设 $T \in L(\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K}^n)$ 连续可微，且在每点 x 处的 Jacobi 矩阵的谱半径 $\rho(T'(x)) \le r < 1$. 若满足下列条件之一：

(i) T 是上 (下) 三角形的，即 $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, T 的分量 T_i 仅仅依赖于自变量 x 的分量 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n$ (或仅仅依赖于 x 的分量 $x_1, x_2, \cdots, x_i$);

(ii) $\forall A, B \in \Gamma(T)$, A 与 B 可交换;

(iii) $\Gamma^2(T) \subset r\Gamma(T)$, 则 T 有唯一的不动点 x^*, 并且 $\forall x \in C$, 以 x 为初值的迭代序列 $x_{n+1} = Tx_n$ 皆收敛于 x^*.

证 (i) 因为 T 是上 (下) 三角形的，所以，其在每点 $x \in C$ 处的 Jacobi 矩阵是上 (下) 三角形的．注意到， $\forall m \in \boldsymbol{N}$ 与 $A_1, A_2, \cdots, A_m \in \Gamma(T)$, 乘积 $A_1 A_2 \cdots A_m$ 仍然是上 (下) 三角形矩阵，且 $\rho(A_1 A_2 \cdots A_m) \le \rho(A_1)\rho(A_2)\cdots\rho(A_m)$. 于是，在条件 (i) 下，不等式 (9) 成立．从而，由定理 2 知， $\rho(T^{l*}) < 1$.

(ii) 周知，当矩阵 A 与 B 可交换时有 $\rho(AB) = \rho(BA) \le \rho(A)\rho(B)$. 因此， $\forall m \in \boldsymbol{N}$ 与 $A_1, A_2, \cdots, A_m \in \Gamma(T)$, $\rho(A_1 A_2 \cdots A_m) \le \rho(A_1)\rho(A_2)\cdots\rho(A_m) \le r^m$. 即，不等式 (9) 成立．因此，由定理 2 知，结论成立.

(iii) 因为 $\Gamma^2(T) \subset r\Gamma(T)$, 所以 $\forall m \in \boldsymbol{N}$,

$$\begin{aligned} \rho &\triangleq \sup \left\{ \frac{\rho(A_1 A_2 \cdots A_m)}{r^m} : A_i \in \Gamma(T),\ 1 \le i \le m,\ m \in \boldsymbol{N} \right\} \\ &\le \sup \left\{ \frac{\rho(A)}{r} : A \in \Gamma(T) \right\} \le 1. \end{aligned}$$

即条件 (9) 成立．于是由定理 2 知，结论成立．证毕.

注 3 在定理 2 及其推论中，若 $\boldsymbol{K}^n$ 换以任何闭凸子集 $\Omega \subset \boldsymbol{K}^n$ (即 T 是 Ω 上的映射), 则相应的结论仍然成立.

注 4 在 [8] 中，作者证明了这样一个结论：若 $T : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 在每点处的 Jacobi 矩阵的矩阵范数 $\|T'(x)\| < 1$, $T0 = 0$ (即 $x = 0$ 是 T 的不动点), 则对任意初始值 $x \in \boldsymbol{R}^n$, 非线性迭代 $x_{n+1} = Tx_n$ 皆收敛于不动点 $x^* = 0$. 可以证明，该结论是定理 2 的一个直接结果 (事实上，任意取定 $k > 0$, 并令 $\Omega_k =: \{x \in \boldsymbol{R}^n : \|x\| \le k\}$, 则当 $x \in \Omega_k$ 时， $\|Tx\| = \|Tx - T0\| = \|\int_0^1 T'(tx)x\,\mathrm{d}t\| \le \|x\| \le k$, 即 T 映 Ω_k 入 Ω_k. 因为 Ω_k 是紧的，且 $\|T'(x)\| < 1$ $(\forall x \in \Omega_k)$, 所以，存在正常数 $r < 1$ 使得 $\forall x \in \Omega_k$, $\|T'(x)\| \le r$. 从而，

条件 (9) 在 Ω_k 上成立. 于是，由定理 2 与注 3 知，对任意初始值 $x \in \Omega_k$, 非线性迭代 $x_{n+1} = Tx_n$ 皆收敛于不动点 $x^* = 0$. 又由 $k > 0$ 的任意性知 [8] 的结论成立.

参 考 文 献

[1] LaSalle J P. The Stability of Dynamical Systems. England: J W Arrowsmith Ltd, 1976

[2] Shih M H, Wu J W. Question of Global Asymptotic Stability in Stat-varying Nonlinear Systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1994, 122: 801–804

[3] Peng Jigen, Xu Zongben. A Novel Dual Space Notions: Lipschitz Dual Space. *Acta Math. Sinica*, 1999, 42(1): 61–70 (in Chinese)

[4] Peng Jigen. Researches on Nonlinear Lipschitz Operators with Applications The thesis for PhD. degree of Xi'an Jiaotong University, 1998 (in Chinese)

[5] Peng Jigen, Xu Zongben. A Novel Dual Notions: Lipschitz Dual Operator. *Acta Math. Sinica*, 2002, 45(3): 469–480 (in Chinese)

[6] Markus L, Yamable H. Global Stability Criteria for Differential Equations. *Osaka Math. J.*, 1960, 12: 305–317

[7] Ber M A, Wang Y. Bounded Semigroups of Matrices. *Linear Algebra Appl.*, 1992, 166: 21–27

[8] Vamanamurithy M K, Walker W J. Difference Equations in Complex Plane. *J. Math. Anal. Appl.*, 1985, 105: 272–275

[9] Wu J-W. Global Asymptotic Stability in Discrete Systems. , 1989, 140: 224–227

[10] Shih M-H, Wu J-W. On a Discrete Version of the Jacobian Conjecture of Dynamical Systems. *Nonlinear Anal. TMA*, 1998, 34: 779–789

[11] Yosida K. Functional Analysis (6th.edt.). New York: Springer-Verlag, 1980

A Novel Characteristic Constant of Nonlinear Lipschitz Operator and its Applications

PENG Jigen SONG Xueli Wang Kaiming

(*Research Center for Applied Mathematics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)

(*E-mail: jgpeng@xjtu.edu.cn; songxl810@stu.xjtu.edu.cn*)

Abstract In this paper, the dual notion of linear bounded operator is generalized to the nonlinear case, and then a novel quantity characterizing the convergence of nonlinear discrete system $x_{n+1} = Tx_n$ is developed. This new quantity is independent on the choice of equivalent metrics of the concerned space. As an application example, it is proved that under some common conditions the convergence of nonlinear discrete system $x_{n+1} = Tx_n$ can really be characterized with the spectral radius of the Jacobi matrices of $T'(x)$, therefore, one of LaSalle's conjectures is partially proved.

Key words nonlinear Lipschitz operator; Lipschitz dual operator; spectral radius; LaSalle's conjectue

MR(2000) Subject Classification 47H05; 47H12; 47D05

Chinese Library Classification O177; O175