第 40 卷第 5 期　　数 学 学 报　　Vol. 40, No. 5
1997 年 9 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Sept., 1997

关于非线性 Lipschitz 算子的 Söderlind 猜想

彭济根　徐宗本

(西安交通大学应用数学研究中心及信息与系统科学研究所, 西安　710049)

摘　要　设 f 是以 $L(f)$ 为最小上界 Lipschitz 常数、以 $\rho(f)$ 为谱域半径、以 $r(f)$ 为 Gerschgorim 域半径的有限维非线性 Lipschitz 算子. 本文证明了"存在等价范数 $\|\cdot\|^*$ 使 $L^*(f) = r^*(f)$"的 Söderlind 猜想; 给出反例否定了 Söderlind 的另一个猜想: "存在等价范数 $\|\cdot\|^*$ 使 $L^*(f) \le r(f)$"(注意 $r(f)$ 与 $r^*(f)$ 的区别), 同时也否定了"$\forall \varepsilon > 0$, 存在等价范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$ 使 $L_\varepsilon(f) \le \rho(f) + \varepsilon$"的猜想. 作为以上所获结论的应用, 本文将有关 Daugavet 方程的相应结果推广到了非线性算子情形.

关键词　非线性 Lipschitz 算子, lub-Lipschitz 常数, lub-Dahlquist 常数, Gerschgorim 域半径, 谱域半径, Söderlind 猜想

MR(1991) 主题分类　47H05, 47H12, 65H10, 65L07

中图分类　O177

On Söderlind Conjectures on Nonlinear Lipschitz Operators

Peng Jigen　　Xu Zongben

(Research Center for Applied Mathematics and Institute for Information and System Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract　Let $f: D \subseteq C^m \to C^m$ be a nonlinear Lipschitz operator with the 1. u. b. Lipschitz constant $L(f)$, the radius of Gerschgorim region $r(f)$ and the radius of spectral region $\rho(f)$. In this paper it is justified the Söderlind's conjecture that there is an equivalent norm $\|\cdot\|^*$ such that $L^*(f) = r^*(f)$, and disproved his another conjecture "there is an equivalent norm $\|\cdot\|^*$ such that $L^*(f) \le r(f)$". The counterexample presented disproved also the conjecture "For any $\varepsilon > 0$, there is an equivalent norm $\|\cdot\|_\varepsilon$ so that $L_\varepsilon(f) \le \rho(f) + \varepsilon$" proposed by Wang and Xu (this journal, 38:5 (1995), 628 - 631). As an applications of the confirmed Soderlind's conjecture, some fundamental identities on Daugavent equation related to a linear operator are generalized to the nonlinear case.

Keywords　Nonlinear Lipschitz operator, lub-Lipschitz constant, lub-Dahlquist constant, radius of Gerschgorim field, radius of spectral field, Söderlind's conjectures

1991 MR Subject Classification　47H05, 47H12, 65H10, 65L07

Chinese Library Classification　O177

收稿日期: 1996-09-09, 接受日期: 1997-02-24

国家自然科学基金与西安交通大学博士论文基金资助项目

1 引言

设 $D\subset\mathbb{C}^m$ 为凸的开子集，$f:D\to\mathbb{C}^m$ 为 Lipschitz 连续算子，$\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{C}^m$ 上的严格齐次范数(即 $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$，$\alpha\in\mathbb{C}$，$x\in\mathbb{C}^m$)．$f$ 的最小上界 Lipschitz 常数(简称为 lub-Lipschitz 常数)定义为：

$$L(f)=\sup_{x\neq y}\frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|}. \tag{1}$$

若记 $\mathrm{Lip}(D)=\{f:D\to\mathbb{C}^m\mid f$ 为 Lipschitz 连续$\}$，则 $L(\cdot):\mathrm{Lip}(D)\to\mathbb{R}^+$ 满足如下性质：

1) $L(f)\geq 0$；$L(f)=0$ 当且仅当 f 为常值，

2) $L(\alpha f)=|\alpha|L(f)$ $(\alpha\in\mathbb{C})$，

3) $L(f)-L(g)\leq L(f+g)\leq L(f)+L(g)$ $(f,g\in\mathrm{Lip}(D))$，

4) $L(f\circ g)\leq L(f)\cdot L(g)$ ($f\circ g$ 表示 f 与 g 的复合)．

由此知 $L(\cdot)$ 为 $\mathrm{Lip}(D)$ 上的半范数．

设 $f\in\mathrm{Lip}(D)$，则 f 的最小上界 Dahlquist 常数[1] (简称为 lub-Dahlquist 常数)定义为：

$$M(f)=\lim_{r\to0^+}\frac{L(I+rf)-1}{r}, \tag{2}$$

其中 I 为 $\mathbb{C}^m$ 上的单位矩阵．明显地，$|M(f)|\leq L(f)$．

设 $M(\mathbb{C}^m)$ 为 $\mathbb{C}^m$ 上的所有 $m\times m$ 阶矩阵全体．明显地，$M(\mathbb{C}^m)\subset\mathrm{Lip}(\mathbb{C}^m)$，且对每个 $A\in M(\mathbb{C}^m)$，$L(A)=\|A\|$．从而 $M(A)=\lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{L(I+rA)-1}{r}\triangleq\mu(A)$ 为矩阵 A 的对数范数[2] (简记为 $\mu(A)$)．$M(\cdot)$ 不仅是 $\mu(\cdot)$ 形式上的非线性推广，$\mu(\cdot)$ 的许多重要性质亦在 $M(\cdot)$ 上体现出来(见[1-3，8，9]等)，特别例如，$M(\cdot)$ 在非线性系统稳定性方面所起的作用与 $\mu(\cdot)$ 在线性系统稳定性方面所起的作用十分相似[3]．

相应于矩阵的数值域[4-7]，Söderlind 还引入了非线性 Lipschitz 算子 f 的 Gerschgorin 域的概念[1]．具体地，设 $\phi\in[0,2\pi]$，记

$$M_\phi(f)=\lim_{r\to0^+}\frac{L(I+re^{-i\phi}f))-1}{r},\quad C_\phi(f)=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(e^{-i\phi}z)\leq M_\phi(f)\},$$

$$G(f)=\bigcap_{\phi\in[0,2\pi]}C_\phi(f),\quad r(f)=\max\{|z|:z\in G(f)\}. \tag{3}$$

则 $G(f)$ 称为 $f\in\mathrm{Lip}(D)$ 的 Gerschgorin 域(简记为 G-域)，$r(f)$ 称为 f 的 G-域半径．G-域的意义在于它包含 f 的谱集，并且在普遍情况下 $r(f)$ 与 f 的谱半径 $\rho(f)$ 相一致[9]．

对于矩阵 $A\in M(\mathbb{C}^m)$，可以证明：若 $\mathbb{C}^m$ 中的范数为内积所诱导，则 $G(A)$ 与 A 的数值域一致；而相应于 $\mathbb{C}^m$ 的其它范数(比如，l^∞ 与 l^1 范数)，$G(A)$ 则为 A 的数值域的闭凸包．进而，A 的数值域半径与 G-域半径一致，且 $G(A)$ 包含 A 的谱．

由定义易知，$G(f)$ 为包含于圆域 $\{z:|z|\leq L(f)\}$ 内的闭凸集，因此 $r(f)\leq L(f)$．一个重要的事实是：对于每一个矩阵 $A\in M(\mathbb{C}^m)$，总存在 $\mathbb{C}^m$ 上的等价范数 $\|\cdot\|^*$，使得在 $\|\cdot\|^*$ 下的矩阵范数 $\|A\|^*$ (即 lub-Lipschitz 常数 $L^*(A)$)与数值半径(即 G-域半径 $r^*(A)$)相等，即 $L^*(A)=r^*(A)$．Söderlind 曾猜想这一重要事实对于一般的非线性算子 $f\in\mathrm{Lip}(D)$ 也成立[1] (以下称此猜想为猜想(I))．

另外,由于对于每个矩阵 A 总存在等价范数,使得 A 的相应之矩阵范数(或者 lub-Lipschitz 常数)任意逼近 A 的谱半径,因此 Söderlind 提出了另外一个猜想[1, Conjecture 3.14]:设 $f \in \mathrm{Lip}(D)$ 具有 lub-Lipschitz 常数 $L(f)$, G-域半径 $r(f)$. 如果 $r(f) < L(f)$,则存在$\mathbb{C}^m$上的等价范数 $\|\cdot\|^*$,使得相应的 lub-Lipschitz 常数 $L^*(f) \le r(f)$ (注意 $r(f)$ 与 $r^*(f)$ 的区别,因为 $r(\cdot)$ 是与$\mathbb{C}^m$上的范数有关的量) (以下称此猜想为猜想(II)).

因为 $L(\cdot)$ 与 $r(\cdot)$ ($G(\cdot)$ 及 $\rho(\cdot)$) 在非线性 Lipschitz 算子的可压缩性、可逆性,以及在非线性差分、微分系统的稳定性等方面起着非常重要的作用(见[1-3, 8, 9]等),因此这两个猜想无论在理论还是应用方面都具有基本的重要意义. 但自猜想提出至今,仍未见有人给出证明(文献[8]对猜想(II)也有所提及,并对此作了进一步深化). 本文通过对非线性 Lipschitz 连续算子的局部线性分析,在第二节中证明了如下结论:

(*) 在 l^1 和 l^∞范数下,$f: D \subset \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$的 G-域半径与 lub-Lipschitz 常数相等. 从而肯定了猜想(I).

对于猜想(II),我们将给出反例予以否定,并证明其成立的充要条件. 特别地,所给反例也表明,即使将猜想(II)的结论减弱为:" $\forall \varepsilon > 0$,存在新范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$ 使得相应的 lub-Liptschitz 常数 $L_\varepsilon(f) \le r(f) + \varepsilon$",该猜想依然不成立. 从而,所给反例也否定了最近文献[8]所提出的如下猜想:" $\forall \varepsilon > 0$,存在等价范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$ 使 $L_\varepsilon(f) \le \rho(f) + \varepsilon$".

设 X 为任意 Banach 空间,$\mathrm{Lip}(X)$ 为从 X 到 X 上的所有非线性 Lipschitz 连续算子全体. 对每个 $f \in \mathrm{Lip}(X)$,同样地定义 $L(f)$, $M(f)$, $G(f)$, $r(f)$. 在本文的第四节,我们将证明:

(**) 若 X 为复 l^1 空间,则对每个 $f \in \mathrm{Lip}(X)$,恒有 $L(f) = r(f)$ 成立. 从而将猜想(I)的结论进一步推广到了无穷维空间.

另外,对于实 $L^1[0,1]$ (或 $C[0,1]$) 上的有界线性算子 T,一个重要而有趣的性质是[10-12]:

$$\max\{\|I - T\|, \|I + T\|\} = 1 + \|T\|, \text{(其中 } I \text{ 为单位算子)}.$$

在文末我们将证明,上述性质可推广到定义在实 l^1 上的任一非线性 Lipschitz 算子 f,即成立:

$$\max\{L(I+f), L(I-f)\} = 1 + L(f).$$

2　猜想(I)的证明

引理 1　设 $D \subset \mathbb{C}^m$为开凸子集,$f \in \mathrm{Lip}(D)$ 为 Lipschitz 连续,则 G-域半径 $r(f) = \max\{|M_\phi(f)| : \phi \in [0, 2\pi]\}$.

证明　设 $z = x + iy \in G(f)$,则对每一个 $\phi \in [0, 2\pi]$, $\mathrm{Re}(e^{-i\phi} z) \le M_\phi(f)$,即 $x\cos\phi + y\sin\phi \le \max\{|M_\phi(f)| : \phi \in [0, 2\pi]\}$,因此 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \le \max\{|M_\phi(f)| : \phi \in [0, 2\pi]\}$. 由 $z \in G(f)$ 的任意性知, $r(f) \le \max\{|M_\phi(f)| : \phi \in [0, 2\pi]\}$.

另一方面,设 $\phi \in [0, 2\pi]$,记 $\partial C_\phi(f)$ 为直线$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(e^{-i\phi} z) = M_\phi(f)\}$. 由[1,定理 3.5]知,$\partial C_\phi(f)$ 为 $G(f)$ 的支撑超平面,于是, $\partial C_\phi(f) \cap G(f) \neq \varnothing$. 设 $z = x + iy \in \partial C_\phi(f) \cap G(f)$,则 $x\cos\phi + y\sin\phi = M_\phi(f)$,即得 $|z| \ge |M_\phi(f)|$,从而 $r(f) \ge |M_\phi(f)|$. 由 $\phi \in [0, 2\pi]$ 的任意性知 $r(f) \ge \max\{|M_\phi(f)| : \in [0, 2\pi]\}$. 证毕.

引理 2　设 $D \subset \mathbb{C}^m$为开凸子集,$f \in \mathrm{Lip}(D)$ 为 Lipschitz 连续,任意给定 $x_1, x_2 \in D$. 则存在矩阵 $A \in M(\mathbb{C}^m)$,使得下述(1) - (3)成立:

(1)　$\|A\| \le L(f)$;

(2) 对任意矩阵 $B \in M(\mathbb{C}^m)$, $\|A+B\| \le L(f+B)$;

(3) $f(x_1) - f(x_2) = A(x_1 - x_2)$.

证明　设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\mathbb{C}^m$ 上的内积. 记 L 为直线 $\{x = tx_1 + (1-t)x_2: -\infty < t < \infty\}$, Π 为超平面 $\{x \in \mathbb{C}^m: \langle x, y\rangle = 0$, 对任意 $y \in L\}$. 则由空间上的直交分解定理知, $\mathbb{C}^m = L \oplus \Pi$, 即对任意 $y \in \mathbb{C}^m$, 存在唯一的 $y_1 \in L$, $y_2 \in \Pi$, 使得 $y = y_1 + y_2$.

因为 D 为凸开集, $x_1, x_2 \in D$, 所以存在 $n_0 > 0$, 使得当 $n > n_0$ 时, 柱体 $V_n \triangleq \left\{y \in \mathbb{C}^m: y = y_1 + y_2,\ y_1 \in L,\ y_2 \in \Pi,\ \|y_2\| \le \frac{1}{n},\ y_1 \in \{tx_1 + (1-t)x_2: t \in [0,1]\}\right\} \subset D$. 由于 f 为 Lipschitz 连续, 由 $\mathbb{C}^m$ 的 Radon-Nikodym 性质知, f 在 V_n 内几乎处处可微. 于是, 由 Fubini 定理知, 在子空间 L 上存在 V_n 的截口 $E(y_n) \triangleq \{x \in L: x = tx_1 + (1-t)x_2\ (t \in [0,1])$, 且 $x + y_n \in V_n\}$ (对某个 $y_n \in \Pi$), 使 f 在 $\{x + y_n: x \in E(y_n)\}$ 上几乎处处可微, 即存在 $E \subset [0,1]$, E 的 Lebesgue 测度 $\mu(E) = 1$, 且 f 在 $\{tx_1 + (1-t)x_2 + y_n: t \in E\}$ 上处处可微.

若记 $A_n = \int_E f'(y_n + tx_1 + (1-t)x_2)\, d\mu(t)$, 则

$$f(x_1 + y_n) - f(x_2 + y_n) = \int_E \frac{d}{dt} f(y_n + tx_1 + (1-t)x_2)\, d\mu(t)$$

$$= \int_E f'(y_n + tx_1 + (1-t)x_2)(x_1 - x_2)\, d\mu(t) = A_n(x_1 - x_2). \tag{4}$$

由 A_n 的定义知, 对每个 $n > n_0$, $\|A_n\| \le L(f)$, 因此 $\{A_n\}_{n > n_0}$ 存在收敛子列 $\{A_{n_k}\}_{n_k > n_0}$, 即存在矩阵 $A \in M(\mathbb{C}^m)$, 使得 $A_{n_k} \to A\ (k \to +\infty)$. 于是由 (4) 式易知, $f(x_1) - f(x_2) = A(x_1 - x_2)$.

明显地, $\|A\| \le L(f)$. 另外, 对任意矩阵 $B \in M(\mathbb{C}^m)$, 在以上的证明中以 $B + f$ 取代 f 进行讨论可得 $\|B + A\| \le L(B + f)$. 证毕.

注 1　在以上的证明中应用了这样一个事实: $\mathbb{C}^m$ 上的所有向量范数皆等价. 以下我们将经常使用这一事实.

注 2　文 [1] 指出, 若 $f \in \mathrm{Lip}(D)$ 连续可微, 则

$$\sup_{x \in D} \|f'(x)\| \le L(f), \qquad \sup_{x \in D} \mu(f'(x)) \le M(f).$$

其实, 由引理 2 易验证: 若记 $\Omega = \{x: f$ 在 x 处可微$\}$, 则

$$L(f) = \sup_{x \in \Omega} \|f'(x)\|, \quad M(f) = \sup_{x \in \Omega} \mu(f'(x)).$$

下面的定理是引言中所述结论 (*) 的具体表述, 它肯定回答了 Söderlind 猜想 (I).

定理 1　设 $D \subset \mathbb{C}^m$ 为开凸集, $f \in \mathrm{Lip}(D)$, 则在 l^∞(或 l^1) 范数下, f 的 lub-Lipschitz 常数等于 G-域半径, 即 $L(f) = r(f)$.

证明　仅证 $\mathbb{C}^m$ 赋以 l^∞ 范数 $\|\cdot\|_\infty$ 的情形. 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in D$, 使

$$\|f(x_\varepsilon) - f(y_\varepsilon)\| \ge (L(f) - \varepsilon)\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|_\infty. \tag{5}$$

由引理 2 知,存在 $A_\varepsilon \in M(\mathbb{C}^m)$ 满足:

$$A_\varepsilon(x_\varepsilon - y_\varepsilon) = f(x_\varepsilon) - f(y_\varepsilon), \quad \|B + A_\varepsilon\|_\infty \le L(B+f) \quad (B \in M(\mathbb{C}^m)). \tag{6}$$

另外由[6]知,对于 A_ε 存在 $\phi_\varepsilon \in [0,2\pi]$,使 $\|A_\varepsilon\|_\infty = \mu(e^{-i\phi_\varepsilon}A_\varepsilon)$. 结合式(6)即得

$$\|A_\varepsilon\|_\infty = \lim_{r\to 0^+} \frac{\|I + re^{-i\phi_\varepsilon}A_\varepsilon\|_\infty - 1}{r} \le \lim_{r\to 0^+} \frac{L(I + re^{-i\phi_\varepsilon}f) - 1}{r} = M_{\phi_\varepsilon}(f). \tag{7}$$

于是由式(5)知, $L(f) - \varepsilon \le M_{\phi_\varepsilon}(f)$. 由 ε 的任意性及引理 1 得 $L(f) = r(f)$. 证毕.

作为定理 1 与引理 1 的结果, 易知:在 l^∞ 或 l^1 范数下,存在 $z \in G(f)$ 使得 $|z| = L(f)$. 这完全与线性情形一致[1].

3　猜想(II)的反例

设 D 为开凸集, $f \in \mathrm{Lip}(D)$,记 $\partial(f) \triangleq \{A \in M(\mathbb{C}^m): A = f'(x),\ x \in \Omega\}$ (Ω 见注 2).

下面的定理刻划了猜想(II)成立的充要条件.

定理 2　设 $f \in \mathrm{Lip}(D)$ 具有 lub-Lipschitz 常数 $L(f)$、G-域半径 r,则猜想(II)成立的充分必要条件为:存在原点的非零(即 $\ne \{0\}$)紧平衡凸邻域 U,使得对任何 $A \in \partial(f)$, $A(U) \subseteqq rU$.

证明　必要性. 设猜想(II)成立,即存在新范数 $\|\cdot\|^*$ 使得 $L^*(f) \le r$. 令 $U = :\{x \in \mathbb{C}^m: \|x\|^* \le 1\}$,则 U 为原点的紧平衡凸邻域. 因为 $L^*(f) \le r$,所以对每个 $A \in \partial(f)$, $\|A\|^* \le r$,即 $\forall x \in \mathbb{C}^m$

$$\|Ax\|^* = \inf\{\omega \ge 0: Ax \in \omega U\} \le r\|x\|^* = \inf\{\omega \ge 0: rx \in \omega U\}. \tag{8}$$

假设存在 $x_0 \in U$,使 $Ax_0 \in A(U) \setminus rU$. 注意到 U 的紧性. 易知

$$\|Ax_0\|^* = \inf\{\omega \ge 0: Ax_0 \in \omega U > r, \quad \|x_0\|^* = \inf\{\omega \ge 0: x_0 \in \omega U\} \le 1. \tag{9}$$

于是得到 $\|Ax_0\|^* > r\|x_0\|^*$,与 $\|A\|^* \le r$ 矛盾. 必要性得证.

充分性. 设 U 为原点的非零紧平衡凸集,则 $\|x\|^* = \inf\{\omega \ge 0: x \in \omega U\}$ 为 $\mathbb{C}^m$ 上的范数. $\forall A \in \partial(f)$,因为 $A(U) \subseteqq rU$,所以 $\|Ax\|^* \le r\|x\|^*$ $(\forall x \in \mathbb{C}^m)$,即 $\|A\|^* \le r$. 于是 $L^*(f) \le \sup\{\|A\|^*: A \in \partial(f)\} \le r$. 证毕.

推论 1　$A \in M(\mathbb{C}^m)$. 若数值半径 $r(A) < \|A\|$,则存在 $\mathbb{C}^m$ 上的等价范数 $\|\cdot\|^*$,使得相应之 $\|A\|^* \le r(A)$.

证明　设 $B \in M(\mathbb{C}^m)$, $r(B)$ 为数值半径,则 $r(\cdot): M(\mathbb{C}^m) \to \mathbb{R}^+$ 为 $M(\mathbb{C}^m)$ 上的半范数[4,5]. 若 $r(B) = 0$,记 $P(B)$ 为特征值集的凸包,则 $G(B) = \{0\} = P(B)$,于是由[5,定理 4]知,唯一的特征值 $\lambda = 0$ 具有简单的初等因子,即 $\lambda I - B \cong \lambda I$,从而 $B = 0$. 由此知, $r(\cdot)$ 事实上为 $M(\mathbb{C}^m)$ 上的范数,且 $r(\cdot)$ 与 $\|\cdot\|$ 等价(注意到 $M(\mathbb{C}^m)$ 等价于 C^{m^2}),即存在常数 $K_1, K_2 > 0$,使得

$$K_1\|B\| \le r(B) \le K_2\|B\| \quad (\forall B \in M(\mathbb{C}^m)). \tag{10}$$

另外,设 $\rho(B)$ 为 B 的谱半径,则 $r(B) \ge \rho(B)$,即范数 $r(\cdot)$ 是谱占优的(spectral dominant[6]),于是由[6]知:范数 $r(\cdot)$ 是稳定的,即存在常数 $K > 0$,使得

$$r(B^n) \le Kr^n(B), \ \forall n \in \mathbb{N}, B \in M(\mathbb{C}^m). \tag{11}$$

令 $U=\left\{x\in\mathbb{C}^m:\left\|\left[\frac{A}{r(A)}\right]^n x\right\|\le 1,\ n=0\text{ 或 }n\in\mathbb{N}\right\}$，则由式(10)、(11)易验证 U 为原点的包含 $\left\{x\in\mathbb{C}^m:\|x\|\le K\cdot K_1^{-1}\right\}$ 的非零紧平衡凸邻域. 明显地 $A(U)\subseteq rU$. 于是，由定理 2 知结论成立. 证毕.

回想，范数 $\|\cdot\|$ 称为绝对单调的，如果 $\|x\|$ 的大小仅依赖于模 $|x|$ $(\triangleq x_a=\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_m|\})$，即 $\|x\|=\|x_a\|$，且 $|x|\le|y|$ 蕴含 $\|x\|\le\|y\|$.

例如，所有的 Hölder 范数 $\|\cdot\|_p(1<p<+\infty)$[5] 为绝对单调的.

推论 2　设 $\|\cdot\|$ 为绝对单调范数. 若存在正矩阵 $A\in M(\mathbb{C}^m)$，$r(A)=r(f)$，使得 $\forall x,y\in D$，$|f(x)-f(y)|\le A|x-y|$，则猜想(II)的结论成立.

证明　设 $U=\left\{x\in\mathbb{C}^m:\|r^{-1}(f)A^n x_a\|\le 1,\ x_a\triangleq|x|,\ n=0\text{ 或 }n\in\mathbb{N}\right\}$，则 U 为原点的非零紧平衡凸邻域，且 $A(U)\subseteq r(f)U$，因此由定理 2 与推论 1 知，在范数 $\|x\|^*=\inf\{\omega\ge 0:x\in\omega U\}$ 下，$\|A\|^*\le r(f)$.

设 $|x|\le|y|$ $(x,y\in\mathbb{C}^m)$，则由 A 的正性及 $\|\cdot\|$ 的绝对单调性易验证：$y\in U\Rightarrow x\in U$，即 $\|x\|^*\le\|y\|^*$. 另外由定义知 $x\in U\Leftrightarrow x_a\in U$，即 $\|x\|^*=\|x_a\|^*$. 因此范数 $\|\cdot\|^*$ 是绝对单调的. 由此及所给条件可验证：$\forall x,y\in D$

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\|^*&=\|[f(x)-f(y)]_a\|^*\le\|A(x-y)_a\|^*\\&\le\|A\|^*\|x-y\|^*=r(f)\|x-y\|^*.\end{aligned}\tag{12}$$

即得 $L^*(f)\le r(f)$. 证毕.

注 3　推论 1 的证明表明：对 $\mathbb{C}^m$ 上的任意范数，相应的 G-域半径 $r(\cdot)$ 为 $M(\mathbb{C}^m)$ 上的范数. 对应于内积引导的范数 $\|\cdot\|_2$，同样的结论属于[4].

注 4　设 $f=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}\in\mathrm{Lip}(D)$ 连续可微，记 $a_{ij}=\sup\left\{\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right|:x\in D\right\}$，则矩阵 $A=(a_{ij})$ 为正的，且 $|f(x)-f(y)|\le A|x-y|$. 于是由推论 2 知，$r(A)$ 的大小能决定 f 的可压缩性. 从而推论 2 给出了 f 可否压缩的简单判据.

下面的例子表明猜想(II)成立是有条件的.

例 1　设 $\mathbb{C}^2$ 内赋以 l^2 范数 $\|\cdot\|_2$，Δ 为区域 $\left\{(z_1,z_2)^T\in\mathbb{C}^2:|z_1|+|z_2|\le 1\right\}$，取 $D=\Delta+\delta\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$ 为 Δ 的开邻域 $\{x\in\mathbb{C}^2:\mathrm{dist}(x,\Delta)<\delta\}$. 明显地，$D$ 为开凸集. 假定 $f\in\mathrm{Lip}(D)$ 定义为：$f\left((z_1,z_2)^T\right)=\left(z_2^2,z_1^2\right)^T$，则 $\forall x=(z_1,z_2)^T\in D$

$$f'(x)=\begin{bmatrix}0&2z_2\\2z_1&0\end{bmatrix}.\tag{13}$$

由定义可验证，$L(f)=\sup\limits_{x\in D}\|f'(x)\|\ge 2(1+\delta)$. 任取 $r>0$，$\phi\in[0,2\pi]$，$z=(z_1,z_2)^T\in D$，因为

$$\begin{aligned}\|I+re^{i\phi}f'(z)\|&=\sup_{x=(x_1,x_2)^T\in\mathbb{C}^2}\frac{\left\|\left(x_1+2re^{i\phi}z_2x_2,\ x_2+2re^{i\phi}z_1x_1\right)^T\right\|}{\|x\|}\\&\le\sup_{x\in\mathbb{C}^2}\frac{\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+4r(|z_1|+|z_2|)|x_1||x_2|+4r^2\left(|x_1|^2|z_1|^2+|x_2|^2|z_2|^2\right)}}{\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}}\end{aligned}$$

包 含　　为 原

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{C}^2} \frac{\sqrt{[1+2r(1+2\delta)+4r^2(1+2\delta)^2]\left(|x_1|^2+|x_2|^2\right)}}{\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}}$$

$$\leq 1+r(1+2\delta)+2r^2(1+2\delta)^2. \tag{14}$$

所以,$L(I+re^{i\varphi}f)\leq 1+r(1+2\delta)+2r^2(1+2\delta)^2$. 于是由 G-域半径的定义及引理 1 得,$r(f)\leq 1+2\delta$.

假设存在原点的非零紧平衡凸邻域 U 使得,$f'(z)(U)\subseteq(1+2\delta)U\ (\forall z\in D)$. 由 U 的紧性,取 $x^*=\left(x_1^*,x_2^*\right)^T\in U$, $y^*=\left(y_1^*,y_2^*\right)^T\in U$ 分别满足

$$|x_1^*|=\max\left\{|z_1|:(z_1,z_2)^T\in U\right\},\ |y_2^*|=\max\left\{|z_2|:(z_1,z_2)^T\in U\right\}. \tag{15}$$

明显地,$|x_1^*|>0$,$|y_2^*|>0$. 取 $a=(1,0)^T$、$b=(0,1)^T\in D$,则由假设知

$$f'(a)x^*=\left(0,2x_1^*\right)^T\in(1+2\delta)U,\quad f'(b)y^*=\left(2y_2^*,0\right)^T\in(1+2\delta)U,$$

即得$|2x_1^*|\leq(1+2\delta)|y_2^*|$,$|2y_2^*|\leq(1+2\delta)|x_1^*|$. 由于 $\delta<\frac{1}{2}$,这两个不等式显然是相互矛盾的,即假设不成立. 于是由定理 2 知猜想(II)不成立.

注 5　即使将猜想(II)的结论减弱为:"$\forall\varepsilon>0$,存在新范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$,使得相应的 $L_\varepsilon(f)\leq r(f)+\varepsilon$". 以上例子表明放宽后的猜想仍不可能成立. 事实上,对于满足 $1+2\delta+\varepsilon<2$ 的任意 ε,不可能存在原点的非零紧平衡凸邻域 U 使得 $f'((1,0)^T)(U)\subseteq(r(f)+\varepsilon)U$ 与 $f'((0,1)^T)(U)\subseteq(r(f)+\varepsilon)U$ 同时成立.

注 6　设 X 为 Banach 空间,$f\in\mathrm{Lip}(X)$. 文[8]引入了 f 的非线性谱集 $\sigma(f)$,并将猜想(II)深化为:"$\forall\varepsilon>0$,存在新范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$,使得相应的 $L_\varepsilon(f)\leq\rho(f)+\varepsilon$(其中 $\rho(f)=\max\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(f)\}$)". 因为 $\sigma(f)\subseteq G(f)$[9], 即 $\rho(f)\leq r(f)$. 例 1 及注 5 推出该猜想同样不成立.

4　猜想(I)的推广及其应用

设 $X=l^1(\mathbb{C})$是所有复无穷序列 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ ($x_i\in\mathbb{C}$)赋以范数 $\|x\|=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|$ 而构成的 Banach 空间,$f\in\mathrm{Lip}(X)$. 分别如(1),(2),(3)式定理 $L(f)$,$r(f)$,$M(f)$,$G(f)$.

下面的结论是定理 1 的推广.

定理 3　设 $X=l^1(\mathbb{C})$,$f\in(X)$,则 $L(f)=r(f)$.

证明　设 $P_m:X\to X$,$P_m x=\{x_1,\cdots,x_m,0,0,\cdots\}$ ($x=\{x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots\}$),则 $P_m(X)\cong\left(\mathbb{C}^m,\|\cdot\|_1\right)$ (即$\mathbb{C}^m$赋以 l^1 范数). 记 g_m 为 P_mf 在 $P_m(X)$上的限制,则由定理 1 知:$L(g_m)=r(g_m)$. $\forall\varepsilon>0$,取 $x,y\in X$ 使得

$$L(f)\leq\frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|}+\varepsilon,$$

并取 m 充分大使其满足

$$\|P_m(f(x)-f(y))\|\geq(1-\varepsilon)\|f(x)-f(y)\|,$$

$$\|P_m(x-y)\|\geq(1-\varepsilon)\|x-y\|,$$

$$\| x - P_m x \| \leq \varepsilon \| x - y \|, \quad \| y - P_m y \| \leq \varepsilon \| x - y \|, \tag{16}$$

则依上式并注意到 $\| P_m (x - y) \| \leq \| x - y \|$,可验证

$$L(f) \leq (1 - \varepsilon)^{-1} \cdot \frac{\| P_m f(P_m x) - P_m f(P_m y) \|}{\| P_m (x - y) \|} + 2\varepsilon L(f) + \varepsilon$$

$$\leq (1 - \varepsilon)^{-1} L(g_m) + 2\varepsilon L(f) + \varepsilon, \tag{17}$$

显然 $r(g_m) \leq r(f)$. 于是由式(17)及 ε 的任意性知 $L(f) \leq r(f)$. 证毕.

推论 3 若 $G(f)$ 为实数集(特别 X 为实 l^1),则 $L(f) + 1 = \max\{ L(I + f), L(I - f)\}$.

证明 因为 $G(f)$ 为实数集,所以由定义(3)式及引理 1 易知, $r(f) = \max\{ M(-f), M(f)\}$. 注意到函数 $\lambda(r) = \frac{L(I + rf) - 1}{r}$ 对于 $r \in (0, \infty)$ 的单调增性质,可知 $M(f) \leq L(I + f) - 1$. 同理得 $M(-f) \leq L(I - f) - 1$. 于是由定理 3 知 $L(f) + 1 \leq \max\{ L(I + f), L(I - f)\}$. 反向不等式平凡. 注意到当 X 为实 l^1 时 $G(f)$ 为实数集. 证毕.

注 7 设 S 为不包含孤立点的紧 Hausdoff 空间,则熟知([10 - 12]) : $L^1(S)$ 上的有界线性算子 T 必满足

$$\| T \| + 1 = \max\{ \| I + T \|, \| I - T \|\}. \tag{18}$$

上述结论被公认为是 Daugavet 方程研究中最重要的结果之一,它在逼近论、Banach 空间几何理论等方面有极重要的应用. 显然,本文推论 3 在实 l^1 空间将上述结论推广到了非线性情形.

参 考 文 献

1 Söderlind G. Bounds on nonlinear operators in finite-dimensional Banach space. Numer Math, 1986, 50 :27 - 44

2 Storm T. On logarithmic norms. SIAM J Numer Anal, 1975, 2 :741 - 753

3 Söderlind G. On nonlinear difference and differential equations. BIT, 1984, 24 :667 - 680

4 Goldberg M, Tadmor E. On the numerical radius and its applications. Linear Algb Appl, 1982, 42 :263 - 284

5 Nirschl N, Schneider H. The bauer fields of values of a matrix. Numer Math, 1964, 6 :355 - 365

6 Friedland S, Zenger C. All spectral dominant norms are stable. Linear Algb Appl, 1984, 58 :97 - 107

7 Berger C A, Stampfll J G. Mapping theorems for the numerical range. Amer J Math, 1967, 89 :1047 - 1055

8 王利生,徐宗本. 非线性 Lipschitz 连续算子的定量性质(IV) ——谱理论. 数学学报, 1995, 38(5) :628 - 631

9 徐宗本,王利生. 非线性 Lipschitz 算子的定量性质(I) ——Lip 数. 应用数学学报, 1996, 19(2) :175 - 184

10 Holub J R. Daugavet's equation and operators on $L^1(\mu)$. Proc Amer Math Soc, 1987, 100 :295 - 300

11 Abramovich Y A. A generalization of a theorem of J. Holub. Proc Amer Math Soc, 1990, 108 :937 - 939

12 Werner D. An elementary appraoch to the Daugavet equation. In: Kalton N J, Saab E, Montgomery S. INteraction between Functional Analysis, Harmonic, and Probability. Proc Conf Columbia 1994. Lect Notes Appl Math 175. New York: Marcel Dekker, 1996

13 Frachetti, Cheneg E W. Minimal projections in tensor-product spaces. J Approc Theory, 1981, 41 :367 - 381

14 Rudin W. Real and ComplexAnalysis, 2ed. New York: McGraw-Hill book company, 1974