(20) 78-80

求解单调变分不等式的一个新的连续方法

梁昔明　彭济根　　O176.3
(西安交通大学,710049,西安)

摘要　文中给出了求解一般非空闭凸集上单调变分不等式的一个新的连续方法,证明了算法的收敛性等价于所求问题的可解性,算法生成轨线的聚点不仅是变分不等式的解,而且还是其极小二模解.

关键词　变分不等式　连续方法　收敛性
中国图书资料分类法分类号　O242.2

A New Continuation Method for Solving Monotone Variational Inequalities

Liang Ximing　Peng Jigen
(Xi'an Jiaotong University, 710049, Xi'an)

Abstract　In this paper a new continuation method for monotone variational inequalities with the general nonempty closed convex set is presented. It is proved that the convergence of the algorithm is equivalent to the solvability of the variational inequality, and the accumulation point of the trajectory generated by the proposed algorithm is not only the solution but also the least two-norm solution of the variational inequality.

Keywords　*variational inequality　continuation method　convergence*

设 $X\subset R^n$ 为一个非空闭凸集,$F:R^n\to R^n$ 为一连续映射,变分不等式问题

$$x^*\in X,\langle F(x^*),x-x^*\rangle\geqslant 0\quad \forall x\in X \tag{VIP(X,F)}$$

被广泛用于研究经济学和运筹学等领域中的均衡模型,在数学规划中起着举足轻重的作用.互补问题和非线性凸规划问题都被看成为变分不等式问题的特殊情形.文献[1]对有限维变分不等式和非线性互补问题的理论、算法及应用作了十分全面的综述.

连续方法(continuation method)研究原问题 P 和它的扰动问题 $P(\varepsilon)$ 之间的关系,其中当扰动参数 ε 等于 0 时,$P(\varepsilon)$ 即为 P.连续方法的内容十分丰富,其中扰动及参数分析(perturbation and parametric analysis)是根据问题 P 的性质讨论扰动问题 $P(\varepsilon)$ 随 ε 变化的性态.相关补偿法(penalty-related method)、逼近点算法(proximal point algorithm)和同伦法(homotopy method)通过相继求解扰动问题 $P(\varepsilon)$ 以寻找原问题的一个解,详见文献[1~5].

最近,Chen 和 Harker 给出了求解单调变分不等式问题 VIP(X,F) 的一个连续方法[5],其中集合 X 限制为如下形式

$$X=\{x\in R^n:g_i(x)\geqslant 0,i=1,\cdots,m;\ h_j(x)=0,j=1,\cdots,l\}$$

收到日期:1996-07-18.　梁昔明:男,1967 年 2 月生,理学院应用数学系,在职博士生.

并且 g_i 和 h_j 分别假设为凹的(concave)和仿射(affine)实值函数,另外还要求 X 满足非线性规划的一些基本约束品性(constraint qualifications).他们的方法是在求解一系列扰动变分不等式时,每个扰动变分不等式都转化为一个光滑的非线性方程组,以便能用求解非线性方程组的方法求解.本文给出一个求解一般单调变分不等式问题 VIP(X,F)的新的连续方法,只要求 X 为非空闭凸集,F 为单调映射.在我们的算法中,每次所求的扰动变分不等式问题都是强单调的,它可以通过最近提出的一些求解强单调变分不等式的方法[1,6,7]求解.我们证明了算法的收敛性等价于所求变分不等式问题的有解性,并且由算法产生轨线(trajectory)的聚点(accumulation point)不仅是变分不等式问题的解,而且还是其极小二模解(the least two-norm solution).下面具体给出算法及其收敛性.

1　连续方法及其收敛性

通篇我们假设$\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\|\cdot\|_2$ 分别表示 R^n 空间中的内积和范数.对映射 $F:R^n\to R^n$,

(1)如果$\langle F(x)-F(y),x-y\rangle\geqslant 0,\ \forall\ x,y\in X$ 成立,则称 F 在X上单调;

(2)如果$\langle F(x)-F(y),x-y\rangle\geqslant\mu\|x-y\|_2^2$, $\forall\ x,y\in X$ 成立,则称 F 在 X 上强单调且模(modulus)为 $\mu(>0)$.

对任意 $\varepsilon\in(0,+\infty)$,令 $F(x,\varepsilon)=F(x)+\varepsilon x$.如果 F 在X上单调,则

$$\langle F(x,\varepsilon)-F(x',\varepsilon),x-x'\rangle=\langle F(x)-F(x'),x-x'\rangle+\varepsilon\langle x-x',x-x'\rangle\geqslant\varepsilon\|x-x'\|_2^2\qquad\forall\ x,x'\in X$$

即 $F(x,\varepsilon)$在 X 上强单调且模为 ε.由[1,Corollary3.2],变分不等式问题

$$x^*\in X,\langle F(x^*,\varepsilon),x-x^*\rangle\geqslant 0\quad\forall\ x\in X\qquad(\text{VIP}(X,F(X,\varepsilon)))$$

存在唯一解,我们记这唯一解为 $x(\varepsilon)$.问题 VIP$(X,F(x,\varepsilon))$的求解方法可参见文献[1,6,7].

我们求解单调变分不等式问题 VIP(X,F)的新的连续方法如下.

Step 0　给定终止精度 $\alpha>0$,取任意初始点 $x^0\in X$ 及序列$\{\varepsilon_k\}$满足 $\varepsilon_k>\varepsilon_{k+1}>0(k=0,1,\cdots)$且

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0.\text{令 }k=0.$$

Step 1　以 x^k 为初始点近似求解 VIP$(X,F(x,\varepsilon_k))$得 x^{k+1}.

Step 2　如果 $e(x^{k+1})<\alpha$,停;否则令 $k=k+1$,转 Step 1.

其中:$e(\cdot)$是误差函数,它度量当前迭代点和 VIP(X,F)的解之间的距离.然而正如文[5]中指出的,对单调变分不等式问题这种误差函数在目前文献中还不存在.由于 VIP(X,F)的解等价于映射$e(u)=u-P_X(u-F(u))$的零点,其中 $P_X(\cdot)$表示欧氏范数下在集合 X 上的投影,一个可能的误差函数是

$$e(x)=\|x-P_X(x-F(x))\|_2$$

下面我们给出扰动问题 VIP$(X,F(x,\varepsilon))$的解 $x(\varepsilon)$的连续性及上面连续方法的收敛性.

定理1　映射 $x(\cdot):(0,+\infty)\to X$ 在$(0,+\infty)$内连续.

证明　由[1,Thm5.4],对任意 $\varepsilon,\varepsilon'\in(0,+\infty)$均有

$$\|x(\varepsilon')-x(\varepsilon)\|_2\leqslant\|F(x(\varepsilon'),\varepsilon')-F(x(\varepsilon'),\varepsilon)\|_2/\varepsilon=\|F(x(\varepsilon'))+\varepsilon'x(\varepsilon')-F(x(\varepsilon'))-\varepsilon x(\varepsilon')\|_2/\varepsilon=|\varepsilon'-\varepsilon|\,\|x(\varepsilon')\|_2/\varepsilon\qquad(1)$$

由于对任意固定的 $\varepsilon\in(0,+\infty)$, $\lim\limits_{\varepsilon'\to\varepsilon}\left(1-\dfrac{|\varepsilon'-\varepsilon|}{\varepsilon}\right)=1$,所以存在 $\delta>0$,使得

$$\frac{1}{2}\leqslant 1-|\varepsilon'-\varepsilon|/\varepsilon\leqslant 1\quad\forall\ \varepsilon':|\varepsilon'-\varepsilon|<\delta\qquad(2)$$

根据(1)式和(2)式,对所有 $\varepsilon':|\varepsilon'-\varepsilon|<\delta$

$$\|x(\varepsilon')\|_2\leqslant\|x(\varepsilon')-x(\varepsilon)\|_2+\|x(\varepsilon)\|_2\leqslant\frac{|\varepsilon'-\varepsilon|}{\varepsilon}\|x(\varepsilon')\|_2+\|x(\varepsilon)\|_2$$

$$\|x(\varepsilon')\|_2\leqslant\frac{\|x(\varepsilon)\|_2}{1-\frac{|\varepsilon'-\varepsilon|}{\varepsilon}}\leqslant\frac{\|x(\varepsilon)\|_2}{1/2}=2\|x(\varepsilon)\|_2$$

所以

$$\|x(\varepsilon')-x(\varepsilon)\|_2\leqslant 2|\varepsilon'-\varepsilon|\,\|x(\varepsilon)\|_2/\varepsilon\quad\forall\ \varepsilon':|\varepsilon'-\varepsilon|<\delta$$

故

$$\lim_{\varepsilon'\to\varepsilon}x(\varepsilon')=x(\varepsilon)$$

证毕.

上面定理表明扰动问题 VIP$(X,F(x,\varepsilon))$的解对参数 ε 是连续的.当 $\varepsilon\to 0$ 时,我们希望 VIP$(X,F(x,\varepsilon))$的解接近 VIP(X,F)的解,下面给出该结

论成立的条件,并且,若算法收敛于一个解,该解的性质将给予刻划.

设 $\varepsilon(t):[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续且满足 $\varepsilon(0)=0$和 $\varepsilon(t)>0$, $\forall\ t>0$. 令 $x(t)$是 VIP(X, $F(x,\varepsilon(t))$)的解,则对所有 $t>0$, $x(t)$存在唯一,从而轨线 $T\equiv\{x(t):t>0\}$唯一确定.

定理2 令 S 是 VIP(X,F)的解集. 若轨线 T 当 $t\to0$ 时有界,则它接近一个极限点 $x(0)\in S$.

证明 由于对任意 $t\in(0,+\infty)$, $x(t)$是 VIP(X,$F(x,\varepsilon(t))$)的解,故有

$$x(t)\in X,\langle F(x(t))+\varepsilon(t)x(t),\ x-x(t)\rangle\geqslant0$$
$$\forall\ y\in X,t\in(0,+\infty)$$

因为 T 当 $t\to0$ 时有界,所以它至少有一个极限点 $x(0)$. 由 $F(\cdot)$, $x(\cdot)$的连续性以及 X 的闭凸性,在上式中令 $t\to0$ 得

$$x(0)\in X,\langle F(x(0)),x-x(0)\rangle\geqslant0$$
$$\forall\ y\in X$$

即 $x(0)$是 VIP(X,F)的解. 证毕.

下面定理给出了轨线 T 有界,从而当 $t\to0$ 时轨线 T 有界的一个充分性条件.

定理3 如果变分不等式 VIP(X,F)有解,如 x^*,则对任何 $x(t)\in T$ 均有

$$\|x(t)\|_2\geqslant\|x^*\|_2$$

证明 因为 x^*, $x(t)$分别是变分不等式 VIP(X,F)和 VIP(X,$F(x,\varepsilon(t))$)的解,即

$$x^*\in X\quad\langle F(x^*),x-x^*\rangle\geqslant0\quad\forall\ x\in X$$
$$x(t)\in X\quad\langle F(x(t))+\varepsilon(t)x(t),\ x-x(t)\rangle\geqslant0\quad\forall\ x\in X$$

所以有

$$\langle F(x^*),x(t)-x^*\rangle\geqslant0$$
$$\langle F(x(t))+\varepsilon(t)x(t),x^*-x(t)\rangle\geqslant0$$

将上面两不等式相加得到

$$\langle F(x(t))+\varepsilon(t)x(t)-F(x^*),x^*-x(t)\rangle\geqslant0$$

因为 F 是单调的,所以有

$$\langle\varepsilon(t)x(t),x^*-x(t)\rangle\geqslant$$
$$\langle F(x^*)-F(x(t)),x^*-x(t)\rangle\geqslant0$$
$$\|x(t)\|_2^2=\langle x(t),x(t)\rangle\leqslant$$
$$\langle x(t),x^*\rangle\leqslant\|x(t)\|_2\cdot\|x^*\|_2$$

即 $$\|x(t)\|_2\leqslant\|x^*\|_2$$ 证毕.

根据上面定理2.2和2.3,我们立即得到如下关于轨线 T 有界的充分必要条件.

推论1 轨线 T 有界的充分必要条件是变分不等式 VIP(X,F)有解.

至此,我们已证明了轨线 T 收敛于变分不等式 VIP(X,F)的一个解,由定理2.3,我们得到下面关于轨线 T 当 $t\to0$ 时的极限点 $x(0)$的一个结论.

定理4 设 x^*是变分不等式 VIP(X,F)的任一解, $x(0)$是轨线 T 当 $t\to0$ 时的极限点,则

$$\|x(0)\|_2\leqslant\|x^*\|_2$$

该定理表明算法将收敛到变分不等式 VIP(X,F)的极小二模解.

2 结论

本文给出了求解单调变分不等式 VIP(X,F)的一个新的连续方法. 该方法仅要求 X 非空闭凸和 F 单调,并且在中间迭代点的选取及连续参数的减少方面具有很大的灵活性.

参考文献

1 Harker P T, Pang J S. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications. Mathematical Programming, 1990, 48(2):161~220

2 Rockafellar R T. Monotone operators and the proximal point algorithm. SIAM Journal on Control and Optimization, 1976, 14(5): 877~898

3 Auslender A, Crouzeix J P, Fedit P. Penalty-proximal methods in convex programming. Journal of Optimization and Applications, 1987, 55(1): 1~21

4 Kojima M, Mizuno S, Noma T. Homotopy continuation methods for nonlinear complementarity problems. Mathematics of Operations Research, 1991, 16(4): 754~774

5 Chen B, Harker P T. A continuation method for monotone variational inequalities. Mathematical Programming, 1995, 69(2): 237~253

6 Taji K, Fukushima M, Ibaraki T. A globally convergent Newton method for solving strongly monotone variational inequalities. Mathematical Programming, 1993, 58(3): 369~383

7 Fukushima M. Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems. Mathematical Programming, 1992, 53(1): 99~110

(编辑 杜秀杰)