第18卷第1期 1998年2月 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Vol. 18 No. 1 Feb. 1998

(25)

关于Hille-Yosida条件的等价刻画*

135-140 O157.7

彭济根 艾文宝
(西安交通大学数学系，西安 710049)

摘 要 本文得到了算子半群理论中的Hille-Yosida条件[1-5]的等价刻画，同时对Arendt与Kellermann的结果[4]作了相应的改进.

关键词 C_0-半群，积分半群，Hille-Yosida条件. 算子半群. H-Y条件.
分类号 AMS(1991) 47D06,35B40/CCL O175

在算子半群生成理论中，Hille-Yosida条件：存在 $\omega, M\in\mathbf{R}$，使得 $(\omega,\infty)\in\rho(A)$，且

$$(\text{H-Y})\qquad \|(\lambda-\omega)^n R(\lambda,A)^n\|\leqslant M,\forall\ \lambda>\omega, n\in\mathbf{N},$$

始终起着核心作用[1-5]. 然而，由(H-Y)式易看出，除非算子 A 是耗散的，或者存在 $\omega\in\mathbf{R}$ 使 $\|(\lambda-\omega)R(\lambda,A)\|\leqslant 1(\forall\ \lambda>\omega)$，要验证条件(H-Y)是一件非常困难的事情. 因此，寻找Hille-Yosida条件的等价刻画成为算子半群理论中广为关注的焦点.

在陈述本文的结论之前，首先考虑下面的例子.

例1 设Banach空间 $E=L^2(\mathbf{R})$，$D=\{\varphi\in L^2(\mathbf{R}):\varphi(\tau)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ 上可导，$\varphi(0)=2\varphi(0^+)$ 且 $\lim\limits_{\tau\to0^+}\frac{1}{\tau}(2\varphi(\tau)-\varphi(0))$ 存在$\}$，在 E 中定义如下线性算子 $A_1:D(A_1)=D\to E$：

$$A_1\varphi(\tau)=\begin{cases}\varphi'(\tau), & \tau\in(-\infty,0)\cup(0,\infty),\\ \lim\limits_{\tau\to0^+}\frac{1}{\tau}(2\varphi(\tau)-\varphi(0)), & \tau=0.\end{cases}\tag{1}$$

易验证，当 λ 的实部 $\mathrm{Re}\lambda>0$ 时，$\lambda\in\rho(A_1)$（A_1 的正则集），且

$$R(\lambda,A_1)\varphi(\tau)=\begin{cases}e^{\lambda\tau}\int_\tau^\infty e^{-\lambda s}\varphi(s)ds, & \tau>0,\\ e^{\lambda\tau}\left[\int_\tau^0 e^{-\lambda t}\varphi(t)dt+2\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t)dt\right], & \tau\leqslant 0.\end{cases}\tag{2}$$

任取 $\omega\in\mathbf{R}$（实数），若令 $\varphi_\omega(\tau)=\begin{cases}e^{\omega\tau} & \tau\in[0,1]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，则可验证 $\|(\lambda-\omega)R(\lambda,A_1)\varphi_\omega\|>\|\varphi_\omega\|$ $(\forall\ \lambda>\max\{0,\omega\}$，即 A 既不是耗散算子，又不存在 $\omega\in\mathbf{R}$ 使 $\|(\lambda-\omega)R(\lambda,A_1)\|\leqslant1(\forall\ \lambda>\omega)$. 因此很难应用Hille-Yosida条件来验证算子 A_1 是否生成 C_0 半群或积分半群. 至于 A_1 是否生成半群，暂且不论. 下面看看大家所熟悉的例子.

例2 设Banach空间 $E=L^2(\mathbf{R})$，定义如下算子：

* 1995年3月13日收到. 国家自然科学基金资助.

$$A_2\varphi(\tau):=\varphi'(\tau),\quad -\infty<\tau<\infty,$$
$$D(A_2)=\{\varphi\in E:\varphi(\tau)\text{ 可导且 }\varphi'\in E\},\tag{3}$$

则 A_2 生成平移半群 $T(t)(t\geqslant 0)$，$T(t)\varphi(\tau)=\varphi(t+\tau)(\forall\ \varphi\in E)$. 当 $\mathrm{Re}\lambda>0$ 时，$\lambda\in\rho(A_2)$，并且

$$R(\lambda,A_2)\varphi(\tau)=\int_0^\infty e^{-\lambda s}\varphi(\tau+s)ds\quad \tau\in\mathbf{R}.\tag{4}$$

易验证：对任意取定的 $\omega>0$，$\|(\lambda-\omega)R(\lambda,A_2)\|\leqslant 1(\forall\ \lambda>\omega)$.

比较例 1 和例 2 中的两个算子 A_1 与 A_2，它们的区别仅仅在于函数值在 $\tau=0$ 处的定义（见(1)式和(3)式），而仅仅因为这点不同就增加了验证 A_1 是否满足 Hille-Yosida 条件的难度，进一步研究表明它们具有这样的共同豫解特征：存在 $\omega,M>0$ 使 $\{\lambda:\mathrm{Re}\lambda>\omega\}\subset\rho(A)$，并且

$$\text{(E-H-Y)}\quad\begin{cases}\|\lambda R(\lambda,A)\|\leqslant M(\forall\ \lambda>\omega),\\ \sup\limits_{\alpha>\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\|R(\alpha+ir,A)\varphi\|^2dr\leqslant M\|\varphi\|^2,\varphi\in E.\end{cases}$$

事实上，任取定 $\omega>0,\alpha>\omega$. 对每个 $\tau\in\mathbf{R}$，当 $\tau>0$ 时，由(2)式知，$R(\lambda,A_1)\varphi(\tau)$ 是 $\varphi(\tau+$)的 Laplace 变换，于是由 Planchel 定理[5]知

$$\int_{-\infty}^{\infty}|R(\alpha+ir,A_1)\varphi(\tau)|^2dr=2\pi\int_0^\infty e^{-2\alpha s}|\varphi(\tau+s)|^2ds,\tau>0.\tag{5}$$

同样地，当 $\tau\leqslant 0$ 时

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\alpha+ir,A_1)\varphi(\tau)|^2dr=2\pi\int_0^{-\tau}e^{-2\alpha s}|\varphi(\tau+s)|^2ds+8\pi\int_{-\tau}^{\infty}e^{-2\alpha s}|\varphi(\tau+s)|^2ds$$
$$\leqslant 10\pi\int_0^\infty e^{-2\alpha s}|\varphi(\tau+s)|^2ds.\tag{6}$$

另外由(2)式易知，二元函数 $f(r,\tau)=|R(\alpha+ir,A_1)\varphi(\tau)|$ 满足

$$f(r,\tau)\leqslant 10\pi\int_0^\infty e^{-\alpha s}|\varphi(\tau+s)|ds=10\pi e^{\alpha\tau}\int_\tau^\infty e^{-\alpha s}|\varphi(s)|ds.\tag{7}$$

注意到 $\alpha>\omega>0$ 且 $\varphi\in L^2(\mathbf{R})$，(7)式右端是 τ 在 $\mathbf{R}$ 上的平方可积函数. 因此对任意的 $\gamma>0$，二元函数 $f(r,\tau)$ 在 $(-\gamma,\gamma)\mathbf{R}$ 上平方可积，于是由 Fubini 定理[6,p122]得

$$\int_{-\gamma}^{\gamma}\|R(\alpha+ir,A_1)\varphi\|^2dr=\int_{\mathbf{R}}\int_{-\gamma}^{\gamma}|R(\alpha+ir,A_1)\varphi(\tau)|^2drd\tau$$
$$\leqslant 10\pi\int_{\mathbf{R}}\int_0^\infty e^{-2\alpha s}|\varphi(\tau+s)|^2dsd\tau$$
$$=10\pi\int_{\mathbf{R}}e^{2\alpha\tau}\int_\tau^\infty e^{-2\alpha s}|\varphi(s)|^2dsd\tau\leqslant\frac{10\pi}{\alpha}\|\varphi\|^2.$$

从而由 $\gamma>0$ 的任意性知：

$$\sup_{\alpha>\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\|R(\alpha+ir,A_1)\varphi\|^2dr\leqslant\frac{10\pi}{\omega}\|\varphi\|^2.$$

另外，直接由(2)式易证明：

$$\|\lambda R(\lambda,A_1)\|\leqslant 10\pi(\forall\ \lambda>\omega).$$

到此已验明 A_1 确实满足豫解特征(E-H-Y). 完全类似的方法可验明 A_2 也具有这样的特征.

注意到例 1 和例 2 都将算子 A_1 与 A_2 至于 Hilbert 空间 $L^2(\mathbf{R})$ 中考虑，若在一般的 Banach 空间中,类似的方法可以验证 A_1 与 A_2 具有如下较弱的特征:

$$(\text{E-H-Y})' \quad \begin{cases} \|\lambda R(\lambda,A)\| \leqslant M \quad (\forall\ \lambda>\omega), \\ \sup\limits_{a>\omega}\int_{-\infty}^{\infty} |\langle R(a+i\tau,A)\varphi,\psi\rangle|^2 d\tau \leqslant M\|\varphi\|^2\|\psi\|^2, \varphi\in E, \psi\in E^*. \end{cases}$$

本文的主要目的是证明,特征条件(E-Y-H)′与 Hille-Yosida 条件等价,特别在 Hilbert 空间中,(E-H-Y)与(E-H-Y)′是等价的,具体地

定理1 设 E 是任意 Banach 空间,$A:D(A)\subset E\to E$ 是闭线性算子,则下列命题等价:

1) A 生成局部 Lipschitz 连续积分半群 $S(t)(t\geqslant 0)$[3].

2) 存在 $\omega, M\in\mathbf{R}$,使$\{\lambda:\operatorname{Re}\lambda>\omega\}\subset\rho(A)$,且

$$(\text{H}-\text{Y}) \quad \|(\lambda-\omega)^n R(\lambda,A)^n\| \leqslant M,\ \forall\ \lambda>\omega, n\in\mathbf{N}.$$

3) 存在 $\omega, M\in\mathbf{R}$,使$\{\lambda:\operatorname{Re}\lambda>\omega\}\subset\rho(A)$,且

$$(\text{E-H-Y})' \quad \begin{cases} \|\lambda R(\lambda,A)\leqslant M\| \quad (\forall\ \lambda>\omega), \\ \sup\limits_{a>\omega}\int_{-\infty}^{\infty} |\langle R(a+i\tau,A)x,y\rangle|^2 d\tau \leqslant M\|x\|^2\|y\|^2, \forall\ x\in E, y\in E^*. \end{cases}$$

特别地,若 E 是 Hilbert 空间,则命题 1),2),3)与下列等价:

3′) 存在 $\omega, M\in\mathbf{R}$,使$\{\lambda:\operatorname{Re}\lambda>\omega\}\subset\rho(A)$,且

$$(\text{E-H-Y}) \quad \begin{cases} \|\lambda R(\lambda,A)\| \leqslant M, \\ \sup\limits_{a>\omega}\int_{-\infty}^{\infty} \|R(a+i\tau,A)x\|^2 d\tau \leqslant M\|x\|^2, \forall\ x\in E. \end{cases}$$

证明 依[3,Th4.1],只须证明命题 1)⇔3).

1)⇒3) 由局部 Lipschitz 连续积分半群的定义及 1)和 2)的等价性,仅证下式成立:

$$\sup_{a>\omega}\int_{-\infty}^{\infty} |\langle R(a+i\tau,A)x,y\rangle|^2 d\tau \leqslant \frac{2\pi M^2}{\omega-\omega_0}\|x\|^2\|y\|^2, \tag{9}$$

其中 $\|S(t)\|\leqslant Me^{\omega_0 t}(t\geqslant 0)$,$\omega>\omega_0$.而这一点由下式

$$\langle R(\lambda,A)x,y\rangle = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\langle S(t)x,y\rangle dt, \operatorname{Re}\lambda>\omega_0 \tag{10}$$

以及 Planchel 定理易验证.

3)⇒1) 不妨设 $\omega=0$(否则由扰动原理,考虑算子 $A-\omega$).任取 $x\in E$, $y\in E^*$,由(E-H-Y)′的第二式及 Paley-Winner 定理[5]知,存在函数 $g(\cdot,x,y)\in L^2(0,+\infty)$,使得

$$\langle R(\lambda,A)x,y\rangle = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} g(t,x,y)dt, \forall\ \operatorname{Re}\lambda>0, \tag{11}$$

并且 $\int_{\mathbf{R}^+}|g(t,x,y)|^2 dt \leqslant M\|x\|^2\|y\|^2$.另外,因为$\forall\ \lambda>0$,

$$|G(e^{-\lambda\cdot})| \overset{\triangle}{=} \left|\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} g(t,x,y)dt\right| = |\lambda\langle R(\lambda,A)x,y\rangle| \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt$$
$$\leqslant M\|x\|\|y\|\|e^{\lambda\cdot}\|_{L^1(0,\infty)}, \tag{12}$$

所以,G 定义了 $\operatorname{span}\{e^{-\lambda\cdot}:\lambda>0\}\subset L^1(0,\infty)$上的有界线性泛函.另外因为$\{e^{-\lambda\cdot}:\lambda>0\}$是 $L^1(0,\infty)$的完全集(total)[5],所以 G 可以延拓到 $L^1(0,\infty)$上,于是由(12)式,

$$g(\cdot,x,y)\in(L^1(0,\infty))^* = L^\infty(0,\infty),$$

且 $\|g(\cdot,x,y)\|_{L^\infty(0,\infty)} \leqslant M\|x\|\|y\|$.

令 $F(t,x,y)=\int_0^t g(s;x,y)ds(t\geqslant 0)$，则 $|F(t,x,y)|\leqslant tM\|x\|\|y\|$，且关于 t 连续. 由(11)式及 Laplace 变换的唯一性知，$F(t,x,y)$ 关于 x 和 y 线性. 若令 $F(t,x)y=F(t,x,y)$，则 $F(t,x)\in E^{**}(t\geqslant 0)$. 设 $q:E^{**}\to E^{**}/E$ 为商映射，则由(11)式

$$0=q(R(\lambda,A)x)=\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}q(F(t,x))dt,\lambda>0.$$

于是 Laplace 变换的唯一性和 $F(t,x)$ 的连续性隐含 $q(F(t,x))=0(\forall\ t\geqslant 0)$，即 $F(t,x)\in E$ $(\forall\ t\geqslant 0)$. 定义 $F(t)x\overset{\triangle}{=}F(t,x)$，则 $F(t):E\to E$ 是有界线性算子族$(t\geqslant 0)$，且

$$R(\lambda,A)x=\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}F(t)xdt\ \mathrm{Re}\lambda>0,x\in E. \tag{13}$$

于是由[3,Th3.1]知，$F(t)$ 是 A 生成的积分半群. 另外由 $F(t)$ 的定义易验证 $F(t)$ 是局部 Lipschitz 连续的.

特别地，设 E 是 Hilbert 空间，此时 $3')\Rightarrow 1)$ 是明显的. 下面仅证 $1)\Rightarrow 3')$. 令 $H=\overline{\{S(t)x:t\geqslant 0,x\in E\}}$，则 H 是可分的子 Hilbert 空间，记 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是 H 的标准正交基，对任意 $x\in E$，记 $R(\lambda,A)x=\sum_{n=1}^{\infty}R_n(\lambda)x_n$，$S(t)x=\sum_{n=1}^{\infty}S_n(t)x_n$，于是由(10)式知，$R_n(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}S_n(t)dt$，并且由 Planchel 定理得

$$\int_{\mathbf{R}}|R_n(a+i\tau)|^2d\tau=2\pi\int_0^{\infty}e^{-2at}|S_n(t)|^2dt,$$

从而由定义

$$\sup_{a>\omega}\int_{\mathbf{R}}\|R(a+i\tau)x\|^2d\tau=2\pi\sup_{a>\omega}\int_0^{\infty}e^{-2at}\|S(t)x\|^2dt\leqslant 2\pi\frac{M^2}{2(\omega-\omega_0)}\|x\|^2,$$

其中 $\|S(t)\|\leqslant Me^{\omega_0 t}(t\geqslant 0),\omega>\omega_0$.

于是定理到此证毕.

注 1° 当 $D(A)$ 稠密时，$S(t)(t\geqslant 0)$ 关于 t 是强连续可微的，且 $T(t)=S'(t)(t\geqslant 0)$ 是 C_0 半群. 于是有

推论 1 若 A 稠定或 E 自反，则定理 1 中的命题 1)可换成：$1')A$ 生成 C_0 半群 $T(t)(t\geqslant 0)$.

证明 注意到，当 E 自反时，条件"$\|\lambda R(\lambda,A)\|\leqslant M,\forall\ \lambda>\omega$"蕴涵 A 稠定.

注 2° 众所周知，当 A 生成 C_0 半群 $T(t)(t\geqslant 0)$，$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$时，以下 Laplace 变换成立：

$$R(\lambda,A)x=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}T(t)dt,\mathrm{Re}\lambda>\omega,x\in E,$$

但其逆换成一般是不成立的. 一般的结论是：

$$T(t)x=\frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to\infty}\int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir}e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}xd\lambda,x\in D(A), \tag{14}$$

其中 $\sigma>\max\{0,\omega\}$. 作为定理 1 的直接结论，可得到半群的如下表式：$\forall\ x\in E,y\in E^*$

$$\langle T(t)x,y\rangle=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir}e^{\lambda t}\langle R(\lambda,A)x,y\rangle d\lambda, \tag{15}$$

对几乎处处的 $t\in(0,\infty)$ 成立. 特别地，若 E 是 Hilbert 空间，则对每个 $x\in E$，

$$T(t)x = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} e^{\lambda t}\langle R(\lambda,A)x\rangle d\lambda, \tag{16}$$

对几乎处处的 $t\in(0,\infty)$成立.

若 A 生成其它类半群(如积分半群,C 半群[7]),则相应的半群表式也可作类似的改进.

作为定理 1 证明方法的应用,得到:

定理 2 设 E 是任意 Banach 空间,A 稠定,若存在 $\omega,M\in\mathbf{R}$,使 $\|R(\lambda,A)\|\leqslant M|\lambda|^{n-1}$ $(\mathrm{Re}\lambda>\omega)$(对某个自然数 $n\geqslant1$),则 A 生成 n 次积分半群[3] $S(t)(t\geqslant0)$.

证明 由扰动原理,不妨设 $0\in\rho(A)$,$\omega<0$. 以下仅对 $n=1$ 的情形给以证明,$n>1$ 时证明方法雷同.

由关系式:$\lambda R(\lambda,A)R(0,A)=R(0,A)-R(\lambda,A)$,并注意到条件"$\|(\lambda-A)^{-1}\|\leqslant M(\mathrm{Re}\lambda>0)$",易验证:

$$\sup_{a>1}\int_{-\infty}^{\infty}\|R(a+i\tau,A)R(0,A)x\|^2 dy\leqslant\pi(1+M^2)\|x\|^2. \tag{17}$$

于是相似于定理 1 的证明知,存在强连续有界线性算子族 $F(t)R(0,A)(t\geqslant0)$使

$$R(\lambda,A)R(0,A)x=\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}F(t)R(0,A)x\,dt,\ \mathrm{Re}\lambda>0, \tag{18}$$

且 $F(t)R(0,A)(t\geqslant0)$局部 Lipschitz 连续.

定义 $E(t):E\to E$,$E(t)x=tR(0,A)x-F(t)R(0,A)x\ (\forall\ x\in E)$,则由(18)式得

$$R(\lambda,A)x=\lambda^2\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}E(t)x\,dt,\ \lambda>1,\ x\in E, \tag{19}$$

即由[3,Th3.1]知 $E(t)(t\geqslant0)$是 A 生成的二次积分半群,又因为 $E(t)$局部 Lipschitz 连续,且 A 稠定,所以 $S(t)\triangleq E'(t)$是 A 生成的积分半群. 证毕.

注 3° Arendt 和 Kellermann 曾证明[4]:若 $\|R(\lambda,A)\|\leqslant M|\lambda|^{n-2}(\forall\ \mathrm{Re}\lambda>\omega)$,则 A 生成 n 次积分半群. 显然定理 2 是 Arendt-KellermanN 结论的改进.

另外,若 $n=1$,则由 Arendt-Kellermann 条件知"$\|R(\lambda,A)\|\leqslant\frac{M}{|\lambda|}$",当 A 稠定,或 E 自反时,条件"$\|(\lambda-A)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{|\lambda|}$"是 A 生成解析 C_0 半群的充要条件. 由此看来,Arendt-Kellermann 条件是非常强的.

注 4° 现在考虑例 1 中的算子 A_1,由 Hille-Yosida 条件很难验证 A_1 是否生成半群,而由定理 1 则易知 A_1 生成 C_0 半群 $T(t)(t\geqslant0)$,并且易知$\forall\ \varphi\in L^2(\mathbf{R})$

$$T(t)\varphi(\tau)=\begin{cases}2\varphi(\tau+t), & \tau\in[-t,0]\\ \varphi(\tau+t) & \text{其它}\end{cases} \tag{20}$$

易知 $\|T(t)\|=2(t>0)$(可参见[1,p3]),这一点也正好说明了:"不可能存在 $\omega\in\mathbf{R}$,使 $\|(\lambda-\omega)R(\lambda,A)\|\leqslant1$". 否则由指数公式[2,Th3.2]易知 $\|T(t)\|\leqslant e^{\omega t}$,与 $\|T(t)\|=2(t>0)$矛盾.

另外,若出于实际物理应用的考虑,类似于例 1、例 2 后面的分析,对于扩散算子,中子迁移算子,Schrödinger 算子等,很容易验证(E-H-Y)或(E-H-Y)′成立.

参 考 文 献

[1] R. Nagel, *One-parameter semigroups of positive operators*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1984.

[2] 郑 权，强连续线性算子半群，华中理工大学出版社 1994.

[3] W. Arendt, Israel J. Math., 59:3(1987), 327—352.

[4] W. Arendt, H. Kellermann, Pitman Res. Note in Math., 190(1989), 21—51.

[5] K. Yosida, *Functional analysis*, 6th ed., Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[6] 郑维行、王声望，实变函数与泛函分析概要，高等教育出版社，1985(第一册).

[7] E. B. Davaies, M. M. H. Pang, Proc. London. Math. Soc., 55:3(1987), 181—208.

A Characterization Equivalent to the Hille-Yosida Conditions

Peng Jigen　　*Ai Wenbao*

(Dept. Math., Xi'an Jiaotong Unvi., Xi'an 710049)

Abstract

This paper obtains a characterization equivalent to the Hille-Yosida conditions in the theory of the semigroups of operators. Meanwhile, this paper improves result obtained by Arendt and Kellermann.

Keywords C_0-semigroup, integrated semigroup, Hill-Yosida conditions.