Vol. 17(1997)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

算子半群生成元的等价豫解特征

彭济根　王绵森
(西安交通大学，　西安 710049)

摘要　本文给出了与Hille-Yosida条件等价的几个新的算子半群生成元的豫解特征.

关键词　Co 半群　积分半群　生成元
MR(1991)主题分类　47D06　47D07　35B40
中图法分类　O175

算子生群　豫解特征

在算子半群理论中，有关 Co 半群最基本的结论是Hille-Yosida生成定理[1]-[3]：A 生成 Co 半群的充分必要条件是，A 闭稠定且存在 $M>0, w\in \boldsymbol{R}$ 使得 $(w,\infty)\subset\rho(A)$（A 的豫解集）及Hille-Yosida条件成立：

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\lambda - w)^n},\quad \lambda > w,\quad n = 0,1,2,\cdots.$$

对于积分半群，Arendt 揭示了Hille-Yosida条件在生成定理中所起的同样重要的作用[3]. 寻找算子半群新的生成条件是半群理论界所共同努力的目标，本着这一目标，本文将给出几种与Hille-Yosida条件等价的新豫解特征.

有关 Co 半群和积分半群的基本知识参见文献[1]—[3]. 文中 E 为任一Banach空间，$\boldsymbol{R}$、N 分别为实数集和自然数集，$A:D(A)\subset E\to E$ 为线性算子，$\rho(A)$ 为 A 的豫解集，$R(\lambda,A)$ 为 A 的豫解式.

定理1　下列命题等价：

i)　A 生成指数有界局部Lipschitz连续积分半群[3]

ii)　存在 $w_1\in\boldsymbol{R}$，使 $(w_1,\infty)\subset\rho(A)$，$\|\lambda R(\lambda,A)x\|<\infty\ (x\in E,\lambda>w_1)$ 且

$$\int_0^\infty \left\|\left[\frac{k}{t}R\left(\frac{k}{t}+w_1,A\right)\right]^{k+1}x\right\|^p dt < \infty,\ p>1,\ x\in E,\ k\in N. \tag{1.1}$$

iii)　存在 $p>1$，$w_2\in\boldsymbol{R}$，使 $(w_2,\infty)\subset\rho(A)$，$\|\lambda R(\lambda,A)x\|<\infty\ (\lambda>w_2,x\in E)$，且

$$\int_0^\infty \left\|\left[\frac{k}{t}R\left(\frac{k}{t}+w_2,A\right)\right]^{k+1}x\right\|^p dt < \infty,\ x\in E,\ k\in N \tag{1.2}$$

iv)　存在 $w_3\in\boldsymbol{R}$，使 $(w_3,\infty)\subset\rho(A)$，$\|\lambda R(\lambda,A)x\|<\infty\ (x\in E,\lambda>w_3)$，且 $\forall\ x\in E$

$$\int_0^\infty \left\|\left[\frac{k}{t}R\left(\frac{k}{t}+w_3,A\right)\right]^{k+1}x\right\| dt < \infty,\ k\in N \tag{1.3}$$

* 收稿日期：1994-08-24.
陕西省自然科学基金资助项目.

及 $\lim\limits_{j\to\infty,k\to\infty}\int_0^\infty\left\|\left[\frac{j}{t}R\left(\frac{j}{t}+w_3,A\right)\right]^{j+1}x-\left[\frac{k}{t}R\left(\frac{k}{t}+w_3,A\right)\right]^{k+1}x\right\|dt=0.$

v) 存在 $w_4\in\boldsymbol{R}$，使 $(w_4,\infty)\subset\rho(A)$，$\|\lambda R(\lambda,A)x\|<\infty(\lambda>w_4,x\in E)$，且

$$\left\|\left[\frac{k}{t}R\left(\frac{k}{t}+w_4,A\right)\right]^{k+1}x\right\|<\infty,t>0,k\in N \tag{1.4}$$

vi) 存在 $w_5\in\boldsymbol{R}$，使 $(w_5,\infty)\subset\rho(A)$，$\|\lambda R(\lambda,A)x\|<\infty(x\in E,\lambda>w_5)$，且$\forall\ x\in E$，

$$\left\|\lambda\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{kj}R(\lambda j+w_5,A)x\right\|<\infty,\lambda>0,k\in N \tag{1.5}$$

vii) 存在 $w_6\in\boldsymbol{R}$，使 $(w_6,\infty)\subset\rho(A)$，且

$$\|(\lambda-w_6)^kR(\lambda,A)^kx\|<\infty,\lambda>w_6,x\in E,k=0,1,2,\cdots. \tag{1.6}$$

证 i)⇒ii). 设 A 生成指数有界局部 Lipschitz 连续积分半群 $s(t)$，即存在 $w\in\boldsymbol{R}$ $M>0$，$\overline{\lim\limits_{h\to0^+}}\|s(t+h)-s(t)\|/h\leqslant Me^{wt}(t\geqslant0)$

则 Stieljes-Bochner 积分

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}ds(t)x(x\in E,\mathrm{Re}\lambda>w)$$

存在，且易验证

$$R(\lambda,A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}ds(t)x,\qquad x\in E,\mathrm{Re}\lambda>w. \tag{1.7}$$

取 $\varepsilon>0$，令 $w_1=w+\varepsilon$. 于是由 Holder 不等式和 Fubini 定理，并注意到等式 $\int_0^\infty\frac{r^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}e^{-\frac{k}{t}r}dr=1(k\in N)$ 得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\left\|\left[\frac{k}{t}R\left(\frac{k}{t}+w_1,A\right)\right]^{k+1}x\right\|^pdt&=\int_0^\infty\left\|\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}\int_0^\infty r^ke^{-\left(\frac{k}{t}+w_1\right)r}ds(r)x\right\|^pdt\\&\leqslant(M\|x\|)^p\int_0^\infty\left\|\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}\int_0^\infty r^ke^{-\left(\frac{k}{t}+\varepsilon\right)r}dr\right\|^pdt\\&\leqslant(M\|x\|)^p\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-\frac{k}{t}r}\frac{r^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}e^{-p\varepsilon r}dr\\&=(M\|x\|)^p\int_0^\infty e^{-p\varepsilon r}r^kdr\int_0^\infty\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}e^{-\frac{k}{t}r}dt<\infty.\end{aligned}$$

另外，$\|\lambda R(\lambda,A)\|<\infty$ 由(1.7)即得.

ii)⇒iii). 证明平凡.

iii)⇒iv). 任取 $x^*\in E$，$x\in E$，记 $f_k(t)=x^*\left[\frac{k}{t}R\left(\frac{k}{t}+w_2,A\right)\right]^{k+1}x$，则由(1.2)知，$\{f_k(t):k\in N\}\subset L^p(0,\infty)$ 是有界集，从而是弱紧集，即存在子列(仍记为)$f_k(t)$ 及 $g(t)\in L^p(0,\infty)$，使得 $f_k\xrightarrow{w}g(k\to\infty)$. 特别对任意 $\lambda>0$. 当 $k\to\infty$ 时

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}f_k(t)dt\to\int_0^\infty e^{-\lambda t}g(t)dt$$

另外可证，$\int_0^\infty e^{-\lambda t}f_k(t)dt\to x^*R(\lambda+w_2,A)x(k\to\infty)$. 故

$$x^*R(\lambda+w_2,A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}g(t)dt,\lambda>0.$$

令 $s(t,x,x^*)=\int_0^te^{w_2r}g(r)dr$，则由 Laplace 变换的唯一性知 $s(t,x,x^*)$ 关于 x、x^* 线性. 若令 $x^*s(t)x=s(t,x,x^*)$，则易知 $s(t)(t\geqslant0)$ 是 A 生成的积分半群.

另一方面，对任意 $\lambda>0$，

$$\left|\int_0^\infty e^{-\lambda t}g(t)dt\right|=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt\cdot|\lambda x^*R(\lambda+w_2,A)x|\leqslant M_0\cdot\|e^{-\lambda\cdot}\|_{L^1(0,\infty)}$$

其中 $M_0\triangleq\sup\limits_{\lambda>0}|\lambda x^*R(\lambda+w_2,A)x|<\infty$. 由于 $\{e^{-\lambda t};\lambda>0\}$ 是 $L^1(0,\infty)$ 的完全集(total)[2]，因此 $g(t)\in(L^1(0,\infty))^*=L^\infty(0,\infty)$. 由 $x\in E$，$x^*\in E^*$ 的任意性及共鸣定理知 $s(t)$ 是指数有界局部 Lipschitz 连续积分半群，即

$$\overline{\lim_{h\to 0^-}}\ \|S(t+h)-S(t)\|/h\leqslant Me^{w_2t},t\geqslant 0.$$

另外，取 $\varepsilon>0$，令 $w_3=w_2+\varepsilon$，对任意 $x\in E$，$k\in\boldsymbol{R}$，相似于(1.8)式的估计易知(1.3)式成立. 依(1.7)式知

$$\left[\frac{k}{t}R\left(\frac{k}{t}+w_2,A\right)\right]^{k+1}x=\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}\int_0^\infty r^ke^{-\left(\frac{k}{t}-w_2\right)r}ds(r)x$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left\|\left[\frac{k}{t}R\left(\frac{k}{t}+w_3,A\right)\right]^{k+1}x-\left[\frac{j}{t}R\left(\frac{j}{t}+w_3,A\right)\right]^{j+1}x\right\|\\
&=\int_0^\infty dt\left\|\int_0^\infty\left[\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}r^ke^{-\left(\frac{k}{t}+w_3\right)r}-\frac{1}{j!}\left(\frac{j}{t}\right)^{j-1}r^je^{-\left(\frac{j}{t}+w_3\right)r}\right]ds(r)x\right\|\\
&\leqslant\overline{M}\int_0^\infty dt\int_0^\infty\left|\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}r^ke^{-\left(\frac{k}{t}+\varepsilon\right)r}-\frac{1}{j!}\left(\frac{j}{t}\right)^{j+1}r^je^{-\left(\frac{j}{t}+\varepsilon\right)r}\right|dr\\
&\leqslant\overline{M}\int_0^\infty dt\left|\int_0^\infty\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k-1}r^ke^{-\left(\frac{k}{t}+\varepsilon\right)r}dr-e^{-\alpha}\right|\\
&\quad+M\int_0^\infty dt\left|\int_0^\infty\frac{1}{j!}\left(\frac{j}{t}\right)^{j+1}r^je^{-\left(\frac{j}{t}+\varepsilon\right)r}dr-e^{-\alpha}\right|\\
&\triangleq I_k+I_j\end{aligned}\tag{1.9}$$

其中 $\overline{M}=M\|x\|$. 考察 I_k，

$$\begin{aligned}I_k&\leqslant\overline{M}\int_0^\infty\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k-1}\int_0^\infty r^ke^{-\frac{k}{t}r}|e^r-e^{-\alpha}|drdt\\
&=\overline{M}\cdot\frac{1}{k!}(k)^{k+1}\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-kr}r^k|e^{-\alpha r}-e^{\alpha}|dr\\
&\doteq\overline{M}\cdot\frac{1}{k!}k^{k+1}\int_0^\infty e^{-kr}r^kdr\int_0^\infty|e^{-\alpha r}-e^{-\alpha}|dt\end{aligned}$$

令 $\varphi(r)=\int_0^\infty|e^{-\alpha r}-e^{-\alpha}|dt$，则 $\varphi(r)\in C(0,\infty)$，于是

$$\frac{1}{k!}k^{k+1}\int_0^\infty r^ke^{-kr}\varphi(r)dr\to\varphi(1)\quad(k\to\infty)$$

即 $I_k\to0(k\to\infty)$，同理 $I_j\to0(j\to0)$. 因此由(1.9)式知 iv)成立.

iv)⇒v)任取 $x\in E$，令 $f_k(t)=\left[\frac{k}{t}R\left(\frac{k}{t}+w_3,A\right)\right]^{k+1}x$ 则由条件知

$$\{f_k(t);k\in N\}\subset L^1((0,\infty),E)$$

是 Cauchy 列. 故存在 $g(\cdot,x)\in L^1((0,\infty),E)$，使 $f_k(\cdot)\to g(\cdot,x)(k\to\infty)$. 特别，对任意 $\lambda>0$，$k\to\infty$ 时

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}f_k(t)dt\to\int_0^\infty e^{-\lambda t}g(t,x)dt$$

另外相似于 iii)⇒iv)证明，$\int_0^\infty e^{-\lambda t}f_k(t)dt \to R(\lambda + w_3, A)x, (k \to \infty)$，于是

$$R(\lambda + w_3, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}g(t,x)dt$$

. 若令 $S(t)x = \int_0^t g(r,x)e^{w_3 r}dr$，则 $S(t)(t\geqslant 0)$是 A 生成的积分半群.

另一方面，由条件$\|\lambda R(\cdot,A)x\|<\infty(\lambda>w_3, x\in E)$，相似于 iii)⇒iv)的证明可得 $g(t,x)\in L^\infty((0,\infty),E)$，从而由 $S(t)$的定义知 $S(t)(t\geqslant 0)$是指数有界积分半群.

取 $\epsilon>0$，令 $w_4=w_3+\epsilon$，则由(1.7)式易估计(1.4)式成立.

v)⇒vi) 设 E^* 是 E 的共轭空间，则由[5, Th]$L^\infty((0,\infty),E^{**})(L^1((0,\infty),E^*))^*$. 对任意 $x\in E$，令 $f_k(t)=\left[\frac{k}{t}R\left(\frac{k}{t}+w_4, A\right)\right]^{k+1}x$，由条件(1.4)式知

$$\{f_k(t);\}\subset L^\infty((0,\infty),E^{**})$$

是有界集，从而是弱*紧集，即存在子列(仍记为)$f_k(t)$和 $g(\cdot,x)\in L^\infty((0,\infty),E^{**})$使 $f_k(\cdot)\xrightarrow{w^*}g(\cdot,x)(k\to\infty)$. 特别，$\forall\ x^*\in E^*, \lambda>0, e^{-\lambda t}\cdot x^*\in L^1((0,\infty),E^*)$，$k\to\infty$时

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}x^*f_k(t)dt \to \int_0^\infty e^{-\lambda t}x^*g(t,x)dt$$

另外，$\int_0^\infty e^{-\lambda t}f_k(t)dt \to R(\lambda + w_4, A)x$，于是

$$R(\lambda + w_4, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}g(t,x)dt$$

从而对任意 $\lambda>0, k\in N$，取 $w_5=w_4$

$$\begin{aligned}
&\left\|\lambda\sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{kj}R(\lambda j + w_5, A)x\right\| \\
&= \left\|\lambda\sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\int_0^\infty e^{kj-\lambda t j}g(t,x)dt\right\| \\
&= \left\|\lambda\int_0^\infty \exp\{-e^{k-\lambda t}\}\cdot e^{k-\lambda t}g(t,x)dt\right\| \\
&\leqslant M(x)\left|\int_0^\infty \exp\{-e^{k-t}\}e^{k-t}dt\right| \leqslant M(x)
\end{aligned}$$

其中 $M(x)=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,\infty)}\|g(t,x)\|<\infty$，故(1.5)式成立.

vi)⇒vii) 由[6, 推论1]知，在 vi)条件下，存在 $\alpha(t,x):[0,\infty)\to E, \alpha(0)=0$，$\|\alpha(t+h)-\alpha(t)\|\leqslant Mh$ 使 $R(\lambda + w_5, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}d\alpha(t,x)$, $\lambda > 0, x \in E$.

取 $\epsilon>0$，$w_6=w_5+\epsilon$，对任意 $\lambda>0, k\in N, x\in E$，有

$$\begin{aligned}
\|\lambda^k R(\lambda + w_6, A)^k x\| &= \left\|\frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}e^{-(\lambda+\epsilon)t}d\alpha(t,x)\right\| \\
&\leqslant M\left|\frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}e^{-(\lambda+\epsilon)t}dt\right| < \infty
\end{aligned}$$

从而(1.6)式成立.

vii)⇒i) (1.6)式等价于:

$$\|\lambda^k R(\lambda + w_6, A)^k x\| < \infty, \lambda > 0, x \in E, k \in N. \tag{1.20}$$

$\forall\ x\in E$，令 $f_k(t)=\left[\frac{k}{t}R\left(\frac{k}{t}+w_6, A\right)\right]^{k+1}x$，则由(1.10)知

$$\{f_k(\cdot)\} \subset L^\infty((0,\infty),E^{**}) = (L^1((0,\infty),E^*))^*$$

是有界集，从而是弱*紧集，即存在子列(仍记为)$f_k(\cdot)$及$g(t,x)\in L^\infty((0,\infty),E^{**})$使得

$f_k(\cdot)\xrightarrow{w^*}g(\cdot,x)$. $(k\to\infty)$. 相似于v)⇒vi)的证明易得

$$R(\lambda+w_6,A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}g(t,x)dt \qquad \lambda>0,$$

令$S(t)x=\int_0^t g(r,x)dr$，则$S(t)x\in E^{**}(t\geqslant 0)$关于$x$线性，关于$t$连续，且

$$R(\lambda+w_6,A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}ds(t)x,\lambda>0 \tag{1.11}$$

另外，令$q:E^{**}\to E^{**}/E$是商映射，则因为E是E^{**}的闭子空间，故q连续，于是，$\forall\ \lambda>0$,

$$0=q(R(\lambda+w_6,A)x)=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}q(S(t)x)dt,$$

由$\lambda>0$的任意性知$q(S(t)x)\equiv 0(t\geqslant 0)$，即$S(t)x\in E(t\geqslant 0)$. 由(1.11)式及$S(t)x$的定义易知$S(t)(t\geqslant 0)$是$A-w_6$生成的局部Lipschitz连续积分半群，从而由半群的扰动原理知i)成立. 证毕

注 定理1中的条件vii)实质上就是Hille-Yosida条件，因此vii)⇒i)的证明本可略去. 但本文采取了不同以往的证明手法(以往是作用共轭泛函化成数值问题). 希望能给读者以帮助.

定理2 设E自反，或设A稠定. 记命题i′)：为A生成C_0半群；ii)—vii)命题如定理1所述，则下列等价关系成立.

i′)⇔ii)⇔iii)⇔iv)⇔v)⇔vi)⇔vii)

证 设A稠定，则由[3]知i)⇔i′)，于是由定理1，

i′)⇔ii)⇔iii)⇔iv)⇔v)⇔vi)⇔vii)成立.

另外设E自反. 注意到ii)—vii)各命题中的条件：$\|\lambda R(\lambda,A)x\|<\infty$($\lambda$充分大，$x\in E$). 任取$x\in E$，$AR(\lambda,A)x=\lambda R(\lambda,A)x-x$，由条件知$\{AR(\lambda,A)x:\lambda$充分大$\}\subset E$是有界集，从而是弱列紧集，即存在子列$\{AR(\lambda_k,A)x\}$及$y\in E$使$AR(\lambda_k,A)x\xrightarrow{w}y$，又因为$R(\lambda_k,A)x\to 0(\lambda_k\to\infty)$，故由$A$的闭性知$y=0$，即$\lambda_k R(\lambda_k,A)x\xrightarrow{w}x(\lambda_k\to\infty)$. 从而$A$是弱稠定的，由凸集分离定理知弱闭等价于强闭，于是$A$是稠定的. 从而由定理1知，

i′)⇔ii)⇔iii)⇔iv)⇔v)⇔vi)⇔vii)

成立. 证毕

在定理2中，若将假设改为E具有Radon-Nikodyn性质，记命题i″)为“A生在指数有界算子半群$T(t)(t>0)$”，则相似于[3]易证，i″)⇔ii)⇔iii)⇔iv)⇔v)⇔vi)⇔vii)成立.

参 考 文 献

1 郑权,强连续线性算子半群. 武汉:华中理工大学出版社,1994.
2 Hille, E. and phillips, R. S., Functional Analysis and Semigroups. Providence: Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 1957.
3 Arendt, W., Vector-valued Laplace Transform and Cauchy Problems. Isreal J. Math., 1987, 59(3): 327-352.
4 Rudin, W., Real and Complex Analysis. New York: McGRAW-hill Book company, 1974.
5 Dieste, J. and Uhl, J. J., Vector Measures. Providence: Amer. Math. Soc., 1977.
6 彭济根,王绵森,朱广田. 连续函数空间中具零边界的非稳态中子迁移方程解的存在唯一性. 科学通报, 1994, 39(10): 878-881.

EQUIVALENT CHARACTERS OF GENERATORS OF OPERATOR SEMIGROUPS

Peng Jigen(彭济根) Wang Miansen(王绵森)
(*Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)

Abstract

This paper gives several characters of generators of operator semigroups, there characters are equivalent to Hille-Yosida'.

Keyword *C_0-Semigroup Integrated Semigroup Generators.*

MR 1991 Subject Classifications 47D06 47D07 35B40.