第14卷 第1期
1997年3月

工 程 数 学 学 报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 14 No. 1
Mar. 1997

关于算子半群某些性质的推广*,**

彭济根 王绵森
(西安交通大学数学系，西安 710049)

摘 要

A 首先，本文利用Hilbert 空间的特性推广了算子半群的Laplcae 反演表示，其次，本文将文[2]在Hilbert 空间中得到的积分半群生成定理推广到了Banach 空间。

关键词 C_0 半群，积分半群，Laplace 反演，生成定理 半子半群，
分类号 AMS(1991) 47D07 CCL O175

1 引言及主要结论

设 $T(t)(t>0)$ 是 Banach 空间 E 上的 C_0 半群，其生成元为 A，记 $\omega(A)$ 是 $T(t)$ 的增长阶，则 $\{\lambda;\mathrm{Re}\lambda>\omega(A)\}\subset\rho(A)$(豫解集)，且豫解式 $R(\lambda,A)$ 是 $T(t)$ 在强拓扑下的 Laplace 变换，即 $\forall\, x\in E$

$$R(\lambda,A)x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t,\ \mathrm{Re}\lambda>\omega(A) \tag{1}$$

众所周知，在对 $T(t)$ 不作任何额外假设的情况下(如，可微性，解析性，算子范数连续等)，(1.1) 的逆变换是不一定存在的。目前最好的结论是[1]，$\forall\, t>0,\ \sigma>\max\{\omega(A),0\}$ 成立：

$$T(t)x=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir}\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda,A)x\mathrm{d}\lambda,\ x\in D(A)$$

其中极限在任何有限区间 $[1/T,T]$ 上一致。

本文的主要结果之一是，在 Hilbert 空间中，证明了(1.1) 逆变换的存在性，具体地

定理 1 设 $T(t)(t\geqslant 0)$ 是 Hilbert 空间 H 上的 C_0 半群，生成元为 A，$\omega(A)$ 为增长阶，则 $\forall\, t>0,\sigma>\max\{0,\omega(A)\}$，成立

$$T(t)x=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir}\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda,A)x\mathrm{d}\lambda,\ x\in H \tag{2}$$

其中极限在任何有限区间 $[1/T,T](T>0)$ 上一致。

作为定理的推论很容易将积分半群和 C 半群的 Laplace 反演式作以推广。本文另一主

* 本文1994年9月23日收到。
** 本文受陕西省自然科学基金资助。

要结果是，将文[2]在Hilbert空间中得到的积分半群生成定理推广至一般的Banach空间。

定理2 设E为任意Banach空间，A是闭线性算子。如果存在$\omega\in \boldsymbol{R}^+$，使$\{\lambda;\mathrm{Re}\lambda>\omega\}\subset\rho(A)$，且

$$\sup_{\sigma>\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\|R(\alpha-i\tau,A)x\|^2\mathrm{d}\tau<\infty,\ x\in E \tag{3}$$

则A生成积分半群$S(t)$，$\|S(t)\|\leqslant Me^{\max(0,\omega)t}$。

注 Arendt与Kellermann曾于1989年给出了闭线性算子A生成积分半群的一个充分条件：$\|R(\lambda,A)\|\leqslant M/|\lambda|$ $(\mathrm{Re}\lambda>\omega)$。明显地，若$\|R(\lambda,A)\|\leqslant M/|\lambda|$，则定理2的条件得以满足，由定理2知，$A$生成积分半群。由此可知Arendt与Kellermann的结论是定理2的一个直接推论。

1992年，[4]证明了以下很有趣的结果。

定理3[4] 设A生成Hilbert空间中的C_0半群$T(t)(t>0)$，$\|T(t)\|\leqslant Me^{\sigma t}(t>0)$，则$T(t)$当$t>0$时按算子范数连续的充分且必要条件是，存在$\alpha>\max\{0,\sigma\}$使

$$\lim_{|\tau|\to\infty}\|R(\alpha+i\tau,A)\|=0$$

在文后我们将给出定理3的一个简洁证明。

2 定理的证明与推论

有关C_0半群、积分半群和C半群的基本材料请参见[1-3]。

引理1 设H为Hilbert空间，$f(t)\in L^2((0,\infty),H)$，其Laplace变换为$G(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)\mathrm{d}t$，$\mathrm{Re}\lambda>0$，则$\forall\ \alpha>0$，$G(\alpha+i\cdot)\in L^2((-\infty,+\infty),H)$，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|G(\alpha+i\tau)\|^2\mathrm{d}\tau=2\pi\int_0^\infty e^{-2\alpha t}\|f(t)\|^2\mathrm{d}t \tag{4}$$

证明 令$H_0=\mathrm{span}\,\overline{\{f(t);t\in(0,\infty)\}}$，则$H_0\subset H$是可分的子空间。不妨令$\{x_n\}_{n\in N}$是$H_0$的标准正交基，$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)x_n$，$G(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)x_n$，则由定义知$f_n(t)\in L^2(0,\infty)$，$G_n(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f_n(t)\mathrm{d}t$。由Planchel定理[5]知，$\forall\ \alpha>0$，$G_n(\lambda+i\cdot)\in L^2(-\infty,+\infty)$且$\int_0^\infty|G_n(\alpha+i\tau)|^2\mathrm{d}\tau=2\pi\int_0^\infty e^{-2\alpha t}|f(t)|^2\mathrm{d}t$，从而由定义及Lebesgue控制收敛定理知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|G(\alpha+i\tau)\|^2\mathrm{d}\tau=2\pi\int_0^\infty e^{-2\alpha t}\|f(t)\|^2\mathrm{d}t$$

成立，引理证毕。

由半群与豫解式的关系(1,1)及引理1易知，若A生成C_0半群$T(t)$，$\|T(t)\|\leqslant Me^{wt}$，则$\forall\ \alpha>w,x,y\in H$，$R(\alpha+i\cdot,A)x\in L^2((-\infty,+\infty),H)$，$R(\alpha+i\cdot,A^*)y\in L^2(-\infty,+\infty,H)$，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|R(\alpha+i\tau,A)x\|^2\mathrm{d}\tau\leqslant\pi M^2\cdot\frac{\|x\|^2}{\alpha-w},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|R(\alpha+i\tau,A^*)y\|^2\mathrm{d}\tau\leqslant\pi M^2\cdot\frac{\|y\|^2}{\alpha-w}。$$

定理1的证明 任取$t>0,x,y\in H$，令$T(t,r)x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-ir}^{\alpha+ir}e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\mathrm{d}\lambda$，$(\alpha>\omega(A),r>0)$，取$r_1>r_2>0$，则由分部积分得

$$|\langle T(t,r_1)x - T(t,r_2)x, y\rangle|$$
$$\leqslant \frac{e^{\alpha t}}{2\pi t}\sum_{\tau=r_1,r_2,-r_1,-r_2}\|R(\alpha+i\tau,A^*)x\|\cdot\|y\|$$
$$+\frac{e^{\alpha t}}{2\pi t}\left(\int_{r_2}^{r_1}\|R(\alpha+i\tau,A)x\|^2\mathrm{d}\tau\cdot\int_{r_2}^{r_1}\|R(\alpha+i\tau,A^*)y\|^2\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}$$
$$+\frac{e^{\alpha t}}{2\pi t}\left(\int_{-r_1}^{-r_2}\|R(\alpha+i\tau,A)x\|^2\mathrm{d}\tau\cdot\int_{-r_1}^{-r_2}\|R(\alpha+i\tau,A^*)y\|^2\mathrm{d}\tau\right)^{1/2} \tag{5}$$

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\|R(\alpha+i\tau,A^*)y\|^2\mathrm{d}\tau\leqslant\pi M^2\cdot\frac{\|y\|^2}{\alpha-w}$，$R(\alpha+i\cdot,A)x\in L^2(-\infty,\infty,H)$，且由 Riemann 积分定理知，$\|R(\alpha+i\tau,A)x\|\to 0(as\ |\tau|\to\infty)$，于是由(5)式易验证

$$\lim_{r_1\to\infty,r_2\to\infty}\|T(t,r_1)x-T(t,r_2)x\| = 0$$

且极限在向闭区间$[1/T,T](T>0)$上一致，也即极限$\lim\limits_{r\to\infty}T(t,r)=\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-ir}^{\alpha+ir}e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\mathrm{d}\lambda$ 存在，且极限在$[1/T,T](T>0)$上一致。另一方面，相似于(5)式易验证：

$$\|T(t,r)x\|\leqslant\frac{e^{\alpha t}}{2\pi t}\left(\frac{2M}{\alpha-w}+\frac{\pi M^2}{\alpha-w}\right)\|x\| \tag{6}$$

由[1]，$\forall\ t>0, x\in D(A)$，$\lim\limits_{r\to\infty}T(t,r)x=T(t)x$。$\forall\ x\in H$，令$x_n\in D(A)$，$x_n\to x(n\to\infty)$，由(6)式，成立

$$\|T(t,r)x-T(t)x\|\leqslant\frac{e^{\alpha t}}{2\pi t}\left(\frac{2M}{\alpha-w}+\frac{\pi M^2}{\alpha-w}\right)\|x_n-x\|$$
$$+\|T(t)\|\cdot\|x_n-x\|+\|T(t,r)x_n-T(t)x_n\|$$

于是$\lim\limits_{r\to\infty}\|T(t,r)x-T(t)x\|=0$，$\lim\limits_{r\to\infty}T(t,r)x=T(t)x$，从而定理1成立，证毕。

类似于定理1易得到积分半群和C半群的 Laplace 反演[3]的推广。

推论1 i) 设A生成n次积分半群$S(t)(t\geqslant 0)$，$\|S(t)\|\leqslant Me^{wt}$，则$\forall\ \alpha>\max\{0,w\}$，$t>0$，成立

$$S(t)=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-ir}^{\alpha+ir}e^{\lambda t}\lambda^{-n}R(\lambda,A)x\mathrm{d}\lambda,\ x\in H$$

ii) 设A生成C半群$E(t)$，$\|E(t)\|\leqslant Me^{wt}$，则$\forall\ \alpha>\max\{0,w\}$，$t>0$，成立

$$E(t)x=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-ir}^{\alpha+ir}e^{\lambda t}(\lambda-A)^{-1}Cx\mathrm{d}\lambda,\ x\in H$$

以上极限均在闭区间$[1/T,T]$上一致$(T>0)$。

定理2的证明 考虑如下 Cauchy 问题：

(ACP) $u'(t)=Au(t)$, $u(0)=x$

任取$\alpha>w$，令$v(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{\lambda t}\lambda^{-2}R(\lambda,A)A^2x\mathrm{d}\lambda$，$(\forall\ x\in D(A^2))$，则由条件(3)知$v(\cdot):R\to E$有定义且连续。另外当$t<0$时，$\forall\ P>\alpha$，由 Cauchy 积分定理知，$v(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{P-i\infty}^{P+i\infty}e^{\lambda t}\frac{1}{\lambda^2}R(\lambda,A)A^2x\mathrm{d}\lambda$，即$v(t)(t<0$时$)$与$\alpha>w$无关。于是$v(t)=\lim\limits_{P\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{P-ir}^{P+ir}e^{\lambda t}\frac{1}{\lambda^2}R(\lambda,A)A^2x\mathrm{d}\lambda=0$，当$t=0$时

$$\|v(0)\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|R(\alpha+i\tau,A)A^2x\|^2\mathrm{d}\tau\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\tau}{(\alpha^2+\tau^2)^2}\right)^{1/2}$$

于是由(3)条件，令$\alpha\to\infty$得$v(0)=0$。

任取$x\in D(A^2)$，令$u(t)=x+tAx+v(t)$，则$u(0)=x$.

另外由(3)知，$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{\lambda t}\frac{R(\lambda,A)A^2x}{\lambda}d\lambda$ 关于 $t\in[0,\infty]$ 一致存在且连续，于是 $u'(t)=Ax+v'(t)$ 存在且连续，其中 $v'(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{\lambda t}\frac{R(\lambda,A)A^2x}{\lambda}d\lambda$。

因为 $R(\lambda,A)Ax=\frac{1}{\lambda}(R(\lambda,A)A^2x+Ax)$，所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{\lambda t}\frac{R(\lambda,A)}{\lambda}Axd\lambda\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{\lambda t}\frac{R(\lambda,A)}{\lambda^2}A^2xd\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2}Axd\lambda\\&=v(t)+tAx\end{aligned}\tag{7}$$

又由 A 的闭性知 $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{R(\lambda,A)}{\lambda}A^2xd\lambda=A\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{\lambda t}\frac{1}{\lambda}(R(\lambda,A)Axd\lambda\right)$，于是 $u'(t)=Ax+A(v(t)+t(Ax))=Au(t)$。从而是 $u(t)=x+tAx+v(t)$ 是(ACP)的解。

设 $u_0(t)$ 是(ACP)对应初值 $u(0)=0$ 的解。$\forall\ \mathrm{Re}\lambda>\omega$，$\frac{d}{dt}R(\lambda,A)u_0(t)=R(\lambda,A)Au_0(t)=\lambda R(\lambda,A)u_0(t)-u_0(t)$，即 $R(\lambda,A)u_0(t)=-\int_0^t e^{\lambda\tau}u_0(t-\tau)d\tau(t\geqslant 0)$，于是 $\forall\ P>\omega,r>0,t\geqslant 0$

$$\int_{-r}^{r}R(P+i\tau,A)u_0(t)d\tau=\int_0^t\frac{2\sin rs}{s}e^{Ps}u_0(t-s)ds\tag{8}$$

另外，因为 $R(P+i\tau,A)u_0(t)=\frac{1}{P+i\tau}(R(P+i\tau,A)Au_0(t)+u_0(t))$，故

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{-r}^{r}R(P+i\tau,A)u_0(t)d\tau\right\|\\&\leqslant\left\|\int_{-r}^{r}\frac{R(P+i\tau,A)}{P+i\tau}Au_0(t)d\tau\right\|+\left\|\int_{-r}^{r}\frac{u_0(t)}{P+i\tau}d\tau\right\|\end{aligned}$$

于是，对任何给定的 $r>0,t\geqslant 0$，$\int_{-r}^{r}R(P+i\tau,A)u_0(t)d\tau$ 关于 $P\geqslant w+1$ 一致有界(注意到条件(3))。从而由(8)式及[6,Lemma1.1, P]知，$\forall\ T>0$，$\frac{2\sin rs}{s}u_0(T-s)\equiv 0(s\in(0,T])$，即由 $T>0$ 的任意性知，$u_0(t)\equiv 0(t\geqslant 0)$，这表示(ACP)的零解是唯一的，从而 $\forall\ x\in E$，以 x 为初值的解最多只有一个。由以上讨论知，$\forall\ x\in D(A^2)$，$u(t)=x+tAx+v(t)$ 是以 x 为初值的唯一解，另外由(4)式及条件(3)易知，存在常数 $M(\alpha)>0$，使 $\|v(t)\|\leqslant(t+e^{\alpha t}M(\alpha))\cdot\|Ax\|$，即 $\|u(t)\|\leqslant\|x\|+(2t+e^{\alpha t}M(\alpha))\|Ax\|$，于是综合以上证明知，(ACP)的(2,1)一适定的[7]。又因为 $\rho(A)\neq\varnothing$，故由[7]知 A 生成积分半群 $S(t)$，定理证毕。

依据引理1，下面我们给出定理3的一个简洁证明。

定理3的证明　由Riemann积分定理知，定理的必要性见[6，定理3.6，P503]。以下仅证充分性。

$\forall\ t>0,x\in H,r>0$，令 $T(t,r)x=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ir}^{a+ir}e^{\lambda t}R(\lambda,A)xd\lambda(\alpha>\max\{\omega(A),0\})$，取 $r_1>r_2>0$，$\forall\ y\in H$，

$$\begin{aligned}&|\langle T(t,r_1)x-T(t,r_2)x,y\rangle|\\&\leqslant\frac{e^{at}}{2\pi t}\sum_{\tau=r_1,r_2,-r_1,-r_2}\|R(a+i\tau,A)\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{e^{\lambda t}}{2\pi t}\left\|\int_{r_2}^{r_1}\langle e^{i\tau t}R^2(\alpha+i\tau,A)x,y\rangle d\tau\right\| \\
&+\frac{e^{\lambda t}}{2\pi t}\left\|\int_{-r_1}^{-r_2}\langle e^{i\tau t}R^2(\alpha+i\tau,A)x,y\rangle d\tau\right\| \\
\leqslant&\frac{e^{\lambda t}}{2\pi t}\sum_{\tau=r_1,r_2,-r_1,-r_2}\|R(\alpha+i\tau,A)\|\cdot\|x\|\cdot\|y\| \\
&+\frac{e^{\lambda t}}{2\pi t}\sum_{\tau=r_1,r_2,-r_1,-r_2}\|R^2(\alpha+i\tau,A)\|\cdot\|x\|\cdot\|y\| \\
&+\frac{e^{\lambda t}}{\pi t}\left\|\int_{r_2}^{r_1}\langle e^{i\tau t}R^2(\alpha+i\tau,A)x,R(\alpha+i\tau,A^*)y\rangle d\tau\right\| \\
&+\frac{e^{\lambda t}}{\pi t}\left\|\int_{-r_1}^{-r_2}\langle e^{i\tau t}R^2(\alpha+i\tau,A)x,R(\alpha+i\tau,A^*)y\rangle d\tau\right\| \\
\leqslant&\frac{e^{\lambda t}}{2\pi t^2}\left(t+\frac{M}{\alpha-\omega(A)}\right)\sum_{\tau=r_1,r_2,-r_1,-r_2}\|R(\alpha+i\tau,A)\|\cdot\|x\|\cdot\|y\| \\
&+\frac{e^{\lambda t}}{2\pi t^2}\left(\int_{r_2}^{r_1}\|R(\alpha+i\tau,A)\|^2\cdot\|R(\alpha+i\tau,A)x\|^2 d\tau\right. \\
&\left.\cdot\int_{r_2}^{r_1}\|R(\alpha+i\tau,A^*)y\|^2 d\tau\right)^{1/2} \\
&+\frac{e^{\lambda t}}{2\pi t^2}\left(\int_{-r_1}^{-r_2}\|R(\alpha+i\tau,A)\|^2\cdot\|R(\alpha+i\tau,A)x\|^2 d\tau\right. \\
&\left.\cdot\int_{-r_2}^{-r_2}\|R(\alpha+i\tau,A^*)y\|^2 d\tau\right)^{1/2}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

由引理1后面的注及中值定理易验证。

$$\lim_{r_1,r_2\to\infty}\sup_{\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1}\|\langle T(t,r_1)x-T(t,r_2)x,y\rangle\|=0$$

即 $\lim\limits_{r_1,r_2\to\infty}\|T(t,r_1)-T(t,r_2)\|=0$，从而$\lim\limits_{r\to\infty}T(t,r)$存在，且由(9)式知，极限在任何区间$[1/T,T](T>0)$上一致，故由$T(t,r)$对$t$的连续性(一致拓扑下)知，$\lim\limits_{r\to\infty}T(t,r)$对$t$连续($t>0$)，另外相似于定理1证明知$\lim\limits_{r\to\infty}T(t,r)=T(t)$。定理证毕。

参考文献

1 郑　权. 强连续线性算子半群，华中理工大学出版社，1994

2 Peng Jigen, Wang Mianshen, Zhu Guangtian. The generating theorems of integrated semigroups and the wellposedness of abstract cauchy problem, Appl. Func. Anal. Vol. 1. 1993, 199—204

3 郑权，积分半群与抽象Cauchy 问题，数学进展，Vol. 21. No. 3, 1992, 257—273

4 P. H. You. Charactristic conditions for C_0-Semigroups with continuous in the uniform operator topology for $t>0$ on Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 116(1992), 991—997

5 Rudin W.. Real and camplex analysis, 2ed, Mcgraw-hill book company, New York, 1974

6 Pazy A.. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-verlag, New York, 1983

7 彭济根 王绵森. 抽象Cauchy 问题的(n,k)-适当性，工程数学学报，11(2), 1994, 123—126

Some Generalized Properties of Operator Semigroups

Peng Jigen Wang Miansen
(Mathematics Department of Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract

In this paper, it is shown that if $T(t)(t \geqslant 0)$ is a C_0-semigroup generated by operator A in Hilbert space, then for all $t > 0$, $\sigma > \max\{0, w(A)\}$, the following Laplace-inversion formula is valid

$$T(t)x = \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - ir}^{\sigma + ir} e^{-\lambda t} R(\lambda, A) x d\lambda, \text{ for all } x \in H$$

in which the limit is uniform on $[1/T, T]$ for all $T > 0$.

The other result is that if there exists $\omega > 0$ such that $\{\lambda; \mathrm{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ and

$$\sup_{\alpha > \omega} \int_{-\infty}^{\infty} \| (\alpha + i\tau - A)^{-1} x \|^2 d\tau < \infty, \text{ for all } x \in E$$

then A generates an integrated semigroup $S(t)$ $(t \geqslant 0)$ satisfying $\| S(t) \| \leqslant Me^{\omega t} (t \geqslant 0)$ (in which E is a Banach space).

(上接101页)

参考文献

1 G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya. Inequalities, 2nd ed., Cambridge U. P. Cambridge, 1952
2 王伯英. 控制不等式基础. 北京师范大学出版社, 1990
3 Bapt R. B., Sunder V. S.. On majorization and Schur products, Lin. Alg. Appl., 72(1985), 107～117
4 Komaroff N.. Rearrangement and matrix product inequalities, Lin. Alg. Appl., 140(1990), 156～161
5 Marshall A. W., Olkin I.. Inequalities: Theory of majorization and its applications, Academic, New York, 1979

Some Similar Inequalities for Product and Hadamard Product of Hermitian Matrices

Yang Zhongpeng Zhou Gaolan
(Dept. of Math., Jilin Teacher's College, Jilin 132013)

Abstract

In this paper some inequalities for product and Hadamard product of Hermitian matrices are given. It is demonstrated that in many sityations, the proporties of product and Handamard product of Hermitian matrices are similar.