第30卷 第8期 西安交通大学学报 Vol.30 №8
1996年8月 JOURNAL OF XI' AN JIAOTONG UNIVERSITY Aug. 1996

(20)
120-126

线性算子半群的新的生成定理

彭济根 梁昔明
（西安交通大学，710049，西安）

O152.7

摘 要

证明了一个连续函数 $F(\lambda)$ 成为某个函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换的一个新的充要条件，从而得到了不同于 Hille-Yosida 定理的算子半群生成定理.

关键词：Laplace 变换 C_0半群 n 次积分半群 C 半群

中国图书资料分类法分类号：O175

线性算子半群，生成定理
拉普拉斯变换 算子半群

0 引 言

Laplace 变换理论在线性系统理论中起着非常重要的作用.给定一个函数，它在什么条件下可成为另一个函数的 Laplace 变换，这是广为关注的一个焦点问题. 1934年，Widder[1]刻划了数值函数的 Laplace 变换的特征：函数 $F\in C^\infty(0,\infty)$可成为 $f\in L^\infty(0,\infty)$的 Laplace 变换的充分必要条件是如下增长假设成立

$$(W_\infty)\qquad \sup\{|\frac{1}{n!}\lambda^{n+1}F^{(n)}(\lambda)|;\lambda>0,n\in N\cup\{0\}\}<\infty$$

对于向量值函数，1987年，Arendt[2]对 Widder 定理作了如下积分形式的推广：设 E 为 Banach 空间，$F\in C^\infty((0,\infty),E)$，则 Widder 增长假设$(W_\infty)$成立当且仅当存在函数 $\alpha(t)$：$[0,\infty]\to E$，$\alpha(0)=0$，$\|\alpha(t+h)-\alpha(t)\|\leqslant M\cdot h(t\geqslant 0,h\geqslant 0)$，使得

$$F(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{d}\alpha(t)=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\alpha(t)\mathrm{d}t\qquad \lambda>0$$

同时，利用这种形式的推广，Arendt 揭示了半群理论中的 Hille-Yosida 定理与 Widder 定理的本质关系.

但是，值得提出的是，Widder 增长假设(W_∞)作为 Laplace 变换的特征，不仅涉及到函数 F 本身的性质，而且还涉及到 F 的任意次导函数的性质，这在实际应用中增加了验证条件的难度. 本文定理1指出，一个函数 F 能否成为某函数的 Laplace 变换直接可由 F 的本身性质反映出来，而不必考察它的导函数.

收到日期：1993-06-15. 彭济根：男，1967年6月生，理学院信息与系统科学研究所，博士生.

在算子半群理论中,一个线性算子 A 能否生成某类算子半群(C_0半群,C 半群,n 次积分半群)直接与 A 的预解算子 $R(\lambda,A)\triangleq(\lambda-A)^{-1}$的 Laplace 表示有关. 利用文中 § 1的结果,§ 2得到了区别于 Hille-Yosida 型定理的各类算子半群的生成定理.

1 Laplace 变换的特征

定理1 设 $F\in C^{\infty}(0,\infty)$,则 F 是某个函数 $f\in L^{\infty}(0,\infty)$的 Laplace 变换,即

$$F(\lambda)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\mathrm{d}t \qquad \lambda>0$$

的充分必要条件是:存在常数 $M>0$,使 $|\lambda F(\lambda)|\leqslant M(\lambda>0)$,且

$$(P_{\infty}) \qquad \overline{M}\triangleq\sup\{|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{nj}\cdot\lambda F(\lambda j)|:\lambda>0,\quad n\in N\}<\infty$$

证明 (1)必要性 设 $M=\operatorname{esssup}\{|f(t)|:t\in(0,\infty)\}$,则 $|\lambda F(\lambda)|\leqslant M(\forall\ \lambda>0)$. 设 $n\in N$,$\lambda>0$,则

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{nj}\cdot\lambda F(\lambda j)&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{nj}\cdot\lambda\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda jt}f(t)\mathrm{d}t=\\&\lambda\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{nj}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda jt}f(t)\mathrm{d}t=\\&\lambda\int_0^{\infty}\exp(-\mathrm{e}^{n-\lambda t})\mathrm{e}^{n-\lambda t}f(t)\mathrm{d}t=\\&\int_0^{\infty}\exp(-\mathrm{e}^{n-t})\mathrm{e}^{n-t}f(\frac{\lambda}{t})\mathrm{d}t\end{aligned}$$

于是 $$|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{nj}\cdot\lambda F(\lambda j)|\leqslant M\int_0^{\infty}\exp(-\mathrm{e}^{n-t})\mathrm{e}^{n-t}\mathrm{d}t\leqslant 2M$$

(2)充分性 设 $f_n(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{nj}\cdot\frac{n}{t}F(\frac{nj}{t})(t>0)$,则由$(P_{\infty})$式知,$f_n\in L^{\infty}(0,\infty)(n\in N)$,且$\{f_n\}_{n\in N}\subset L^{\infty}(0,\infty)$是有界序列. 因此,$L^{\infty}(0,\infty)$作为 $L^1(0,\infty)$的对偶空间,$\{f_n\}_{n\in N}$存在子序列$\{f_{n_k}:n_k\in N\}$弱*收敛于某个函数 $f\in L^{\infty}(0,\infty)$,即对每个 $g\in L^1(0,\infty)$

$$\int_0^{\infty}g(t)f_{n_k}(t)\mathrm{d}t\to\int_0^{\infty}g(t)f(t)\mathrm{d}t \qquad k\to\infty$$

特别,对每个 $\lambda>0$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}f_{n_k}(t)\mathrm{d}t\to\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\mathrm{d}t \qquad k\to\infty$$

另外,对每个 $\lambda>0,n\in N$,由条件$|\mu F(\mu)|\leqslant M(\forall\ \mu>0)$得

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}f_n(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t&=\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{nj}\cdot\frac{n}{t}F(\frac{nj}{t})\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\\&\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{nj}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\cdot\frac{n}{t}F(\frac{nj}{t})\mathrm{d}t=\\&\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{nj}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda njt}\cdot\frac{n}{t}F(\frac{1}{t})\mathrm{d}t=\end{aligned}$$

$$\int_{c}^{\infty}\exp(-e^{n(1-\lambda t)})e^{n(1-\lambda t)}\frac{n}{t}F(\frac{1}{t})dt=$$

$$\int_{-n}^{\infty}\exp(-e^{-r})e^{-r}\cdot\frac{n}{n+r}F(\frac{\lambda n}{n+r})dr$$

若记 $g_n:(-\infty,\infty)\to R$(实数)为:$g_n(r)=\exp(-e^{-r})e^{-r}\cdot\frac{n}{n+r}F(\frac{\lambda n}{n+r})$,则对每个 $n\in N$,$|g_n(r)|\leqslant\frac{M}{\lambda}\exp(-e^{-r})e^{-r}(r\in(-\infty,+\infty))$. 明显地 $g(r)\triangleq\frac{M}{\lambda}\exp(-e^{-r})e^{-r}$在$(-\infty,+\infty)$上可积,且对每个 r,$g_n(r)\to\exp(-e^{-r})e^{-r}F(\lambda)(n\to\infty)$. 于是

$$\int_{0}^{\infty}f_n(t)e^{-\lambda t}dt=\int_{-n}^{\infty}\exp(-e^{-r})e^{-r}\frac{n}{n+r}F(\frac{\lambda n}{n+r})dr=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}g_n(r)dr-\int_{-\infty}^{-n}g_n(r)dr$$

一方面,由 Lebesgue 控制收敛定理,$\int_{-\infty}^{\infty}g_n(r)dr\to\int_{-\infty}^{\infty}g(r)dr=F(\lambda)(n\to\infty)$.

另一方面 $$|\int_{-\infty}^{-n}g_n(r)dr|\leqslant\int_{-\infty}^{-n}|g_n(r)|dr\leqslant\frac{M}{\lambda}\int_{-\infty}^{-n}\exp(-e^{-r})e^{-r}dr\to0(n\to\infty)$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}f_n(t)=F(\lambda)$$

即得 $F(\lambda)=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}f(t)dt(\lambda>0)$. 证毕.

由定理1可直接得到如下推论:

推论1 如果函数 $F\in C(0,\infty)$满足条件(P_∞)式,且$|\lambda F(\lambda)|\leqslant M<\infty(\forall\lambda>0)$,则 $F(\lambda)$在$(0,\infty)$上任意次可微,且可延拓成在右半平面 $\mathrm{Re}\lambda>0$内解析的解析函数.

注 推论1是非常有趣的结果. Bernstein[1]证明了完全单调函数 F 是可解析延拓的,但完全单调函数毕竟涉及到函数 F 的无穷次导函数的性质,而推论1中的条件并不涉及 F 的导函数.

以下考虑向量值函数的 Laplace 变换.

定义1[3] Banach 空间 E 称为关于测度空间$(\Omega、\Sigma、\mu)$具有 Radon-Nikodyn 性质,如果每个 E 值有界变差 μ 连续向量测度 α,均存在 $f\in L^1(\mu,E)$,使

$$\alpha(G)=\int_{G}fd\mu,\quad\forall G\in\Sigma$$

如果 E 关于每个有限测度空间$(\Omega、\Sigma、\mu)$均具有 Radon-Nikodyn 性质,则称 E 具有 Radon-Nikodyn 性质.

注 每个 Hilbert 空间均具有 Radon-Nikodyn 性质. 设$(\Omega、\Sigma、\mu)$为有限测度空间,则 $L^P(\Omega、\mu)(1<P<\infty)$也具有 Radon-Nikodyn 性质.

引理1[3] 设 E 为 Banach 空间,则 $L^1((0,\infty),E)$的对偶空间为 $L^\infty((0,\infty),E^*)$的充要条件是 E 具有 Radon-Nikodyn 性质.

定义2 称 Banach 空间 E 为对偶空间,如果存在某个 Banach 空间 E_*,使得 $E_*^*=E$.

定理2 设 E 为对偶空间,且 E_*具有 Radon-Nikodyn 性质,$F\in C((0,\infty),E)$,则下列命题等价:

(1)存在 $f\in L^\infty((0,\infty),E)$使得

$$F(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt,\qquad \lambda>0$$

(2)存在常数 $M>0$,使$\|\lambda F(\lambda)\|\leqslant M(\lambda>0)$,并且

$$(P'_\infty)\qquad \overline{M}\triangleq\sup\{\|\sum_{j=1}^\infty\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{nj}\cdot\lambda F(\lambda j)\|;\lambda>0,n\in N\}<\infty$$

证明 (1)⇒(2),相似于定理1的证明.

(2)⇒(1),设 $f_n(t)=\sum_{j=1}^\infty\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{nj}\cdot\frac{n}{t}F(\frac{nj}{t})$,则由条件$(P'_\infty)$和引理1知,$\{f_n\}_{n\in N}\subset L^\infty((0,\infty),E)$存在子序列$\{f_{n_k}\}$弱*收敛于某个函数 $f\in L^\infty((0,\infty),E)$,即,对每个 $g\in L^1((0,\infty),E_*)$

$$\int_0^\infty\langle g(t),f_{n_k}(t)\rangle dt\to\int_0^\infty\langle g(t),f(t)\rangle dt,\qquad k\to\infty$$

特别,对每个 $\lambda>0,x_*\in E_*$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\langle x_*,f_{n_k}(t)\rangle dt\to\int_0^\infty e^{-\lambda t}\langle x_*,f(t)\rangle dt,\qquad k\to\infty$$

另一方面,相似于定理1的证明可知

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\langle x_*,f_n(t)\rangle dt\to\langle x_*,F(\lambda)\rangle,\qquad n\to\infty$$

于是,由 $x_*\in E_*$的任意性得

$$F(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt,\qquad \lambda>0$$

从而定理证毕.

对于任意 Banach 空间,有如下积分形式的结论.

定理3 设 E 为 Banach 空间,$F\in C((0,\infty),E)$,则下列命题等价:

(1)存在 $\alpha(t):[0,\infty]\to E$,$\alpha(0)=0$,$\|\alpha(t+h)-\alpha(h)\|\leqslant M\cdot h(t\geqslant0,h\geqslant0)$,使得

$$F(\lambda)=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\alpha(t)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}d\alpha(t),\qquad \lambda>0$$

(2)条件(P'_∞)成立,且$\|\lambda F(\lambda)\|\leqslant M(\lambda>0)$.

证明 (1)⇒(2),任取 $x^*\in E^*$. 对于数值函数 $g(t)\triangleq\langle x^*,\alpha(t)\rangle$,存在 $f\in L^\infty(0,\infty)$,使 $g(t)=\int_0^t f(r)dr$. 于是

$$\langle x^*,F(\lambda)\rangle=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt,\qquad \lambda>0$$

相似于定理1的证明,应用共鸣定理可证(2)成立.

(2)⇒(1)任取 $x^*\in E^*$,对于数值函数 $\tilde{F}(\lambda)=\langle F(\lambda),x^*\rangle$,由定理1知,存在 $\tilde{f}\in L^\infty(0,\infty)$ 使

$$\tilde{F}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{f}(t)dt,\qquad \lambda>0$$

余下的相似于文[2,Th. 1]的证明可得. 证毕.

注 如果对任意函数 $F\in C((0,\infty),E)$,定理2的两命题等价,则我们就说"定理1对于 Banach 空间 E 成立". 由定理2知,若 $E=E_*^*$,且 E_* 具有 Radon-Nikodyn 性质,则定理1关于 E 成

立. 另外,若 E 具有 Radon-Nikodyn 性质,则对于定理3中的函数 $a(t):[0,\infty]\to E$,存在 $f\in L^{\infty}((0,\infty),E)$ 使 $a(t)=\int_0^t f(r)\mathrm{d}r(t\geqslant 0)$. 从而由定理3知,$E$ 的 Radon-Nikodyn 性质也能保证定理1关于 E 成立. 另外,相似于 Arendt[2] 的讨论可知,作为定理1关于 E 成立的条件,E 的 Radon-Nikodyn 性质也是必要的.

2 算子半群的生成定理

设 E 为 Banach 空间,$C\in B(E)$(有界线性算子全体为单射).

定义3 设 $S(t)(t\geqslant 0):E\to E$ 为有界线性算子族,则

(1)如果 $S(t)(t\geqslant 0)$满足:$S(0)=I$(单位算子),$S(t+s)=S(t)S(s)(t\geqslant 0,s\geqslant 0)$,$\lim\limits_{t\to 0^+}\|S(t)x-x\|=0(x\in E)$,则称 $S(t)(t\geqslant 0)$为 C_0半群.

(2)设 $n\in N$,如果 $S(t)(t\geqslant 0)$强连续,且 $S(0)=0$,$\forall\ t,s\geqslant 0$

$$S(t)S(s)=\frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n-1}S(r)\mathrm{d}r-\int_0^{s}(t+s-r)^{n-1}S(r)\mathrm{d}r\right]$$

则称 $S(t)(t\geqslant 0)$为 n 次积分半群.

(3)如果 $S(t)(t\geqslant 0)$强连续,且 $S(0)=C$,$S(t+s)C=S(t)S(s)$,$\lim\limits_{t\to 0^+}\|S(t)x-Cx\|=0(x\in E)$,则称 $S(t)(t\geqslant 0)$为 C 半群.

定义4 设 $A:D(A)\subset E\to E$ 为闭线性算子,则:

(1)A 称为 C_0半群 $S(t)(t\geqslant 0)$的生成元,如果 A 是满足下列条件的具有最大定义域的算子:对每个 $x\in D(A)$,$S(\cdot)x\in C^1([0,\infty),E)$,且 $S'(t)x=S(t)Ax=AS(t)x(\forall\ t\geqslant 0)$.

(2)A 称为 n 次积分半群 $S(t)(t\geqslant 0)$的生成元,如果 A 是满足下列条件的具有最大定义域的算子:对每个 $x\in D(A)$,$S(\cdot)x\in C^1([0,\infty),E)$且

$$S'(t)x=S(t)Ax+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x=AS(t)x+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x,\forall\ t\geqslant 0$$

(3)A 称为 C 半群 $S(t)(t\geqslant 0)$的生成元,如果 A 是满足下列条件的具有最大定义域的算子:对每个 $x\in CD(A)$,$S(\cdot)x\in C^1([0,\infty),E)$且 $S'(t)x=S(t)Ax=AS(t)x$.

有关 C_0半群,积分半群及 C 半群的详细材料可见文[2,4,5,6].

引理2[2] 设 $n\in N\cup\{0\}$,$S(t)(t\geqslant 0)$为强连续有界线性算子族,且存在 $M>0$,$\omega\in R$ 使$\|S(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}(t\geqslant 0)$,则 $S(t)$为 n 次积分半群的充分必要条件是

$$R(\lambda)=\lambda^n\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)\mathrm{d}t\quad(\mathrm{Re}\lambda>\omega)$$

为伪预解式,即 $R(\lambda)-R(\mu)=(\mu-\lambda)R(\lambda)R(\mu)(\forall\ \mathrm{Re}\lambda>\omega,\mathrm{Re}\mu>\omega)$(其中将 C_0半群看成0次积分半群).

定理4 设 $n\in N\cup\{0\}$,$A:D(A)\subset E\to E$,则下列命题等价:

(1)A 为某个$(n+1)$次积分半群 $S(t)(t\geqslant 0)$的生成元,其中存在常数 $M_1,\omega_1\geqslant 0$,使$\|S(t)\|\leqslant M_1\mathrm{e}^{\omega_1 t}(t\geqslant 0)$,并且

$$\|S(t+h)-S(t)\|\leqslant M_1\mathrm{e}^{\omega_1(t+h)}\cdot h(t,h\geqslant 0)\qquad(1)$$

(2)存在 $\omega_2\geqslant0$，使 $(\omega_2,\infty)\subset\rho(A)$（预解集），记 $F(\lambda)=\frac{1}{\lambda^n}R(\omega_2+\lambda,A)(\lambda>0)$，满足 $\|\lambda F(\lambda)\|\leqslant M_2(\lambda>0)$ 且 (P_∞) 式成立.

证明 (1)⇒(2)，设(1)成立，取 $\omega_2>\omega_1$，则 $A-\omega_2$ 生成的 $n+1$ 次积分半群 $\bar{S}(t)(t\geqslant0)$ 满足

$$\|\bar{S}(t+h)-\bar{S}(t)\|\leqslant M_2\cdot h,(t,h\geqslant0)(\text{其中 } M_2>M_1)$$

另外，对每个 $\lambda>0$

$$R(\lambda+\omega_2,A)x=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\bar{S}(t)x\mathrm{d}t,\qquad x\in E$$

于是，由定理3易知命题(2)成立.

(2)⇒(1). 设(2)成立，由定理3和引理2知，$A-\omega_2$ 生成 $n+1$ 次积分半群 $\bar{S}(t)(t\geqslant0)$，满足

$$\|\bar{S}(t+h)-\bar{S}(t)\|\leqslant M_2\cdot h(t,h\geqslant0)$$

于是，由半群的扰动知，A 生成 $n+1$ 次积分半群，且满足命题(1)条件. 定理证毕.

如果满足条件(Ⅰ)式的 n 次积分半群称为 n 次局部 Lipschitz 连续积分半群，则有如下结论.

引理3[2] 设 A 生成 $n(n\geqslant1)$ 次局部 Lipschitz 连续积分半群 $S(t)(t\geqslant0)$，则 A 在 $E_0\triangleq\overline{D(A)}$ 上的局部限制 A_0 在 E_0 上生成 $n-1$ 次积分半群 $\bar{S}(t)$，$(t\geqslant0)$，且

$$S(t)x=\int_0^t\bar{S}(r)x\mathrm{d}r,t\geqslant0,x\in E_0$$

推论2 设 A 稠定，则下列命题等价 $(n\in N\cup\{0\})$：

(1) A 生成 n 次积分半群 $S(t)$，$\|S(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$；

(2)定理4的命题(2)成立.

证明 (1)⇒(2). 设 A 生成 n 次积分半群 $S(t)$，$\|S(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$，则 A 也生成 $n+1$ 次积分半群 $\bar{S}(t)=\int_0^t S(r)\mathrm{d}r$，且易验证 $\bar{S}(t)$ 满足定理4的命题(1)中条件(Ⅰ)式，从而定理4的命题(2)成立.

(2)⇒(1). 由定理4和引理3知，A 在 $E_0\triangleq\overline{D(A)}$ 上生成 n 次积分半群. 另外由假设 $\overline{D(A)}=E$，于是(1)成立. 证毕.

由定理3知，当 E 具有 Radon-Nikodyn 性质时，定理1关于空间 E 成立. 因此，自然希望在不假定 A 稠定的条件下，推论2同样成立.

推论3 设 E 具有 Radon-Nikodyn 性质，或者 E 为对偶空间且 E_* 具有 Radon-Nikodyn 性质，则下列命题等价：

(1)存在半群 $S(t)$，$(t>0)$，即 $S(t+h)=S(t)S(h)$，$(h,t>0)$，并且 $S(t)$，$(t>0)$ 在 $t>0$ 上强连续，存在常数 M,ω 使 $\|S(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$，$(t>0)$，且

$$R(\lambda,A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)\mathrm{d}t,\qquad\lambda>\omega$$

(2)定理4的命题(2)成立.

证明 依据定理2或定理3，其余类似于文[2,Th5.1]的证明.