第13卷 第1期 1996年3月
工 程 数 学 学 报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol. 13 No. 1 Mar. 1996

关于非线性周期微分方程的Floquet 问题*

李小让 彭济根
（西安交通大学理学院，西安710049）

提 要

A 本文给出反例，证明了n≥2 时，R^n 上的非线性周期微分方程的Floquet 定理是不成立的。

关键词 非线性，周期系统，拓扑等价，Floquet 定理，横截同宿点，混沌
分类号 34A34

周期微分方程

线性周期微分方程组有一条重要性质，即Floquet 定理。史金麟在[1]中提出了这样的问题，即Floquet 定理能否推广到非线性周期系统？他给出了拓扑等价的定义，并证明了 R^1 上的周期微分方程拓扑等价于 R^1 一个上的自治微分方程。本文将指出，当 $n\geq 2$ 时在 R^n 上此结论是不成立的。

首先按照[1]给出周期系统拓扑等价于自治系统的定义。考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)\qquad x\in R^n \tag{1}$$

其中 $f:R\times R^n\to R^n$ 连续且有 $\omega>0$，使

$$f(t+w,x)=f(t,x)\qquad t\in R,\quad x\in R^n$$

假设对任意$(t_0,x_0)\in R\times R^n$，(1) 的满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x(t;t_0,x_0)$ 唯一存在于$(-\infty,\infty)$。对任意 $t_1,t_2\in R$，定义映射族 $T_{t_1}^{t_2}:R^n\to R^n$ 如下

$$T_{t_1}^{t_2}y=x(t_2;t_1,y)$$

则 T 满足 $T_{t_0}^{t_0}=I$，$T_{t_2}^{t_3}T_{t_1}^{t_2}=T_{t_1}^{t_3}$，$T_{t_1+\omega}^{t_2+\omega}=T_{t_1}^{t_2}$，其中 $t_0,t_1,t_2,t_3\in R$，称 T_0^ω 为(1) 的 Poincare 映射。

又设方程

$$\frac{dy}{dt}=g(y),\qquad y\in R^n \tag{2}$$

定义了 R^n 上的一个流 ϕ^t，$t\in R$。

定义 称周期系统(1) 拓扑等价于自治系统(2)，如果存在一族同胚 $h_t:R^n\to R^n$，$t\in R$ 满足

---

* 本文1994年6月4日收到。

(i)　$h: R \times R^n \to R^n$ 连续，其中 $h(t,x) = h_t x$

(ii)　$h_{t+\omega} = h_t$,　$t \in R$

(iii)　$h_t \phi^{t-\tau} = T_\tau^t h_\tau$,　　$t, \tau \in R$。

根据这个定义，当(1) 为线性方程时，它必拓扑等价于某一自治线性系统，且 h_t 为线性同胚，这就是线性周期系统的 Floquet 定理。

以下给出拓扑等价的一个充要条件

引理 1　n 维周期微分方程(1) 拓扑等价于一个 n 维自治系统的充要条件是其 Poincare 映射拓扑共轭于一个同胚 $H: R^n \to R^n$，且 H 可嵌入一个 R^n 上的 C^1 流 ϕ^t，即 $H = \phi^\omega$。

证明　由定义中的(iii) 有

$$T_0^\omega = h_\omega \phi^\omega h_0^{-1} = h_0 \phi^\omega h_0^{-1}$$

故 Poincare 映射 T_0^ω 拓扑共轭于 ϕ^ω，而 ϕ^ω 显然可以嵌入 R^n 上的 C^1 流 ϕ^t，这就证明了必要性。

充分性　设 ϕ^t 是 R^n 上的 C^1 流，H、$P: R^n \to R^n$ 分别为 C^0 和 C^1 同胚且 $T_0^\omega = P^{-1}HP$，$H = \phi^\omega$，则令

$$h_t = T_0^t P^{-1} \phi^{-t}$$

则

$$\begin{aligned} h_{t+\omega} &= T_0^{t+\omega} P^{-1} \phi^{-t-\omega} = T_\omega^{t+\omega} T_0^\omega P^{-1} \phi^{-\omega} \phi^{-t} \\ &= T_0^t P^{-1} H P P^{-1} \phi^{-\omega} \phi^{-t} = T_0^t P^{-1} H \phi^{-\omega} \phi^{-t} \\ &= T_0^t P^{-1} \phi^{-t} = h_t \end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned} h_t &= \phi^{t-\tau} = T_0^t P^{-1} \phi^{-t} \phi^t \phi^{-\tau} = T_0^t P^{-1} \phi^{-\tau} \\ &= T_\tau^t T_0^\tau P^{-1} \phi^{-\tau} = T_\tau^t h_\tau \end{aligned}$$

故定义中的(ii)，(iii) 都满足，(i) 则是显然的，由于 ϕ^t 是 R^n 上的 C^1 流，故它可由 R^n 上的微分方程生成，充分性证毕。

以下考虑 $n = 2$ 时的情形。

引理 2　设 $\phi^t: R^2 \to R^2$，$t \in (-\infty, \infty)$ 是 C^1 流，则同胚 $\phi^\omega: R^2 \to R^2$ 不存在横截同宿点。

证明　显然若 q 为微分同胚 ϕ^ω 的横截同宿点，则必为 ϕ^t 的横截同宿点。因而我们只须证明 ϕ^t 没有横截同宿点。平面动力系统的非游荡点集 $\Omega(\phi^t)$ 只能取平衡点、闭轨、同宿环或者异宿环[4]，若 q 是横截同宿点，则 $q \in \Omega(\phi^t)$[2]，显然 q 不可以是平衡点，也不能位于闭轨异宿环上。若 q 位于同宿环上，即 $q \in W^s(P) \cap W^u(P)$，则在 q 点 $W^s(P)$ 与 $w^u(P)$ 是相切的，即非横截的，故 ϕ^t 没有横截同宿点。

但是平面周期微分方程组$(1)^{n=2}$ 的 Poincare 映射 T_0^ω 可以有横截同宿点。事实上，著名的 Melinkov 方法常用来判定自治系统在周期扰动下，其 Poincare 映射的横截同宿点的存在性。

兹举一例如下(周期激励的 Duffing 方程)

$$\ddot{x} + x - x^3 = -\varepsilon\delta\dot{x} + \varepsilon f\cos\omega t$$

其等价方程组为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^3 - \varepsilon(\delta y + f\cos\omega t) \end{cases} \tag{3}$$

当$\frac{f}{\delta} > \frac{2}{3z\omega}\mathrm{sh}(\frac{\sqrt{2}}{2}x\omega)$时，$(3)_{\delta<<1}$的Poincare映射$T_0^\omega$存在横截同宿点。证明见[3]或[5]。

由于两个拓扑共轭的微分同胚，其动力学性质是相同的，根据引理1和引理2我们可以断定，当$\frac{f}{\delta} > \frac{2}{32\omega}\mathrm{sh}(\frac{\sqrt{2}}{2}z\omega)$且$\varepsilon << 1$时，不存在一个平面自治系统使(3)与之等价。

根据Smale-Birkhoff定理，同胚T具有横截同宿点意味着T在一个不变集上的作用拓扑共轭于一个有限型子移位，特别地，有自然数N使TN在一个不变集上共轭于Smale马蹄映射。这意味着混沌现象的出现。系统(3)将表现出复杂的动力学行为，比如，将出现一个游荡的Cantor集，其中包含无穷多个周期任意大的不稳定周期轨道，无穷多个有界非周期轨道等(见[3])这些都是在平面自治系统不可能出现的。因此即使修改拓扑等价的定义，也不能建立一般R^2上非线性周期系统与自治系统的"等价"关系。

最后，我们再指出，对于$R^n(n > 2)$上的周期微分方程，反例也是容易构造的。如对$n = 3$的情形，考虑

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^3 - \varepsilon(\delta y + f\cos\omega t) \end{cases} \qquad \dot{z} = 0 \tag{4}$$

设其Poincare映射为S_0^ω，则

$$S_0^\omega\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0^\omega\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \pi_0^\omega z \end{pmatrix}$$

其中T_0^ω是方程(3)的Poincare映射，$\pi_0^\omega z = z + \omega$易证，若$S_0^\omega$拓扑共轭于$H$，$H$可比嵌入$R^3$上的一个$C^1$流，则$T_0^\omega$拓扑共轭于一个能嵌入$R^2$上的$C^1$流的微分同胚，而当$\frac{f}{\delta} > \frac{2}{3z\omega}\mathrm{sh}(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega)$且$\varepsilon << 1$时，这是不可能的。

参考文献

[1] 史金麟 关于非线性周期系的理论，数学学报，36(1)1993，1320。

[2] 朱德明 韩茂安 光滑动力系统，华东师范大学出版社，1993。

[3] 李继彬 混沌与Melnikov方法，重庆大学出版社，1989。

[4] 陆启韶 常微分方程的定性方法和分叉，北京航空航天大学出版社，1989。

[5] Guckenheimer, J. and Holmes, P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations Springer-Verlag, 1986.

[6] 张芷芬等 微分方程定性理论，科学出版社，1985。

On Floquet Theory of Nonlinear Periodic Differential Equations

Li Xiaorang Peng Jigen

(Department of Mathematics, Xi'an Jiaotong University)

Abstract

A counter example is given to show that Floquet theory of nonlinear periodic systems does not hold on $R^n, n \geqslant 2$.