第 29 卷 第 6 期 西 安 交 通 大 学 学 报 Vol. 29 №6
1995 年 6 月 JOURNAL OF XI' AN JIAOTONG UNIVERSITY Jun. 1995

15 101－107

连续函数空间上迁移方程解的渐近展开*

宋德功 彭济根 杨根科
(西安交通大学) (太原重型机械学院)

O175.6
O411.1

摘 要

A 在连续函数空间上讨论有界凸体内能量零隔离的粒子迁移系统. 利用算子积分半群理论,证明了系统解的存在唯一性,并给出解在 max 范数意义下的渐近展开.

关键词:迁移方程 连续函数空间 渐近展开
中国图书资料分类法分类号:O175.6

0 引 言

自 Lehner、Wing 和 Jörgens 等的文章[1~3]发表以来,迁移方程作为一类典型的数学物理方程受到数学家和物理学家的高度重视,开展了许多系统而出色的工作. 但限于数学工具,以往的工作大多限于 L^p 空间($1\leqslant p\leqslant+\infty$). 对于连续函数空间,由于迁移算子的定义域不稠定,C_0-半群理论难以应用,故解的适定性成为一个难题. 至于解按本征函数的渐近展开等问题则几乎是空白. 本文利用近年出现的算子积分半群理论在连续函数空间上对散射裂变各向异性非均匀有界凸介质内能量零隔离的迁移系统给出解的存在唯一性及解在 max 范数意义下的渐近展开,并通过按占优本征函数的展开给出解的渐近性质.

在连续函数空间上考虑如下迁移系统

$$
\text{(I)}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\Psi(r,v,\Omega,t)}{\partial t}=-v\Omega\cdot\operatorname{grad}_r\Psi(r,v,\Omega,t)-\sigma(r,v)\Psi(r,v,\Omega,t)\\ \qquad\qquad+\displaystyle\int_D\int_E k(r,v,\Omega,v',\Omega')\Psi(r,v',\Omega',t)\mathrm{d}v'\mathrm{d}\Omega'\\ \Psi(r,v,\Omega,t)=0\quad \text{对 } r\in\partial V \text{ 及进入 } V \text{ 的方向 } \Omega \text{ 成立}\\ \Psi(r,v,\Omega,0)=\Psi_0(r,v,\Omega)\end{cases}
$$

其中$(r,v,\Omega)\in G:=V\times E\times D$,$V$ 是 R^3 中的有界闭凸体,$E:=[v_m,v_M]$,$0<v_m<v_M<+\infty$,D

收到日期:1993-02-24. 宋德功,男,1966 年 1 月生,理学院信息与系统科学研究所,副教授.
* 国家自然科学基金资助项目.

是 R^3 中单位球的表面，$\Psi\in C$，C 是 G 上所有连续复函数全体按范数 $\|f\|=\max\limits_G|f(r,v,\Omega)|$ 组成的 Banach 空间. 函数 σ、k 和 Ψ 的物理意义参见文[3].

本文假设 σ 和 k 分别是 $V\times E$ 和 G 上的非负连续函数，且存在球 $P:=\{r\,|\,|r-r_0|\leqslant R\}\subset V$ 使 $k(r,v,\Omega,v',\Omega')\geqslant k_0$(常数)$>0$ 在 $P\times V\times E\times V\times E$ 上成立. 同时，假设 V 强凸，其表面 ∂V 光滑，使得边界函数 $S_0(r,\Omega):=\inf\{s>0\,|\,r-s\Omega$ 不属于 V 的内部$\}$(即从点 r 处沿 $-\Omega$ 方向到 ∂V 的距离)是 $V\times E$ 上的连续函数.

在 C 上定义如下算子

$$K\cdot=\int_D\int_E k(r,v,\Omega,v',\Omega')\cdot\mathrm{d}v'\mathrm{d}\Omega'$$

$$B\cdot=-v\Omega\cdot\mathrm{grad}_r\cdot-\sigma(r,v)\cdot,\qquad A\cdot=B\cdot+K\cdot$$

$D(K)=C$，$D(B)=D(A)=\{\Psi\in C\,|\,B\Psi\in C;\Psi(r,v,\Omega)=0$ 对 $r\in\partial V$ 及进入 V 的方向 Ω 成立$\}$，则系统(I)化为$\dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=A\Psi$，$\Psi(0)=\Psi_0$

1 解的存在唯一性及渐近展开

记 $\lambda^*=\min\sigma(r,v)$. 不难证明如下引理成立.

引理 1 B 和 A 均是不稠定的闭算子；$\sigma(B)=\Phi$，且当 $\mathrm{Re}\lambda>-\lambda^*$ 时 $\|(\lambda I-B)^{-1}\|\leqslant(\mathrm{Re}\lambda+\lambda^*)^{-1}$；$\{\lambda\,|\,\mathrm{Re}\lambda>\|K\|-\lambda^*\}\subset\rho(A)$，且当 $\mathrm{Re}\lambda>\|K\|-\lambda^*$ 时 $\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant(\mathrm{Re}\lambda+\lambda^*-\|K\|)^{-1}$.

定理 1 A 生成局部 Lipschitz 连续积分半群 $S(t)$；记 A_F 是 A 在 $F:=\overline{D(A)}$ 上的限制，即对任一 $\Psi\in D(A_F)=\{\Psi\in D(A)\,|\,A\Psi\in\overline{D(A)}\}$，$A_F\Psi=A\Psi$，则 A_F 在 F 上生成正 C_0-半群 $T(t)$ 且 $T(t)=S'(t)|_F$；对任一 $\Psi_0\in D(A_F)$，方程(I)的解 Ψ 存在唯一，且 $\Psi=S'(t)\Psi_0=T(t)\Psi_0$.

证明 由引理 1 及文献[4,5]知，A 生成局部 Lipschitz 连续积分半群 $S(t)$，从而对$\forall\ \Psi_0\in D(A_F)$，(I)的解存在唯一，且 $\Psi=S'(t)\Psi_0$. 由于 $\beta>\|K\|-\lambda^*$ 时$(\beta I-A_F)^{-1}$是 F 上的正算子，由文[6]P. 340 知 A_F 在 F 上生成正 C_0-半群 $T(t)$，且对$\forall\ \varphi\in F$，$S'(t)\varphi=T(t)\varphi$. 证毕.

注：由于$\overline{D(A)}\neq C$，所以不可能对$\forall\ \Psi_0\in D(A)$，(I)的解都存在唯一(参见文[6]).

引理 2 对$\forall\ \lambda\in C$，$K(\lambda I-B)^{-1}K$ 是 $L^\infty(G)$到 C 上的紧算子.

证明 利用算子 K 和$(\lambda I-B)^{-1}$的表达式(参见文[7])经过一系列的运算和整理，最终得知对任一 $\Psi\in L^\infty(G)$

$$\begin{aligned}&K(\lambda I-B)^{-1}K\Psi(r,v,\Omega)\\&=\int_V\mathrm{d}r'\int_E\mathrm{d}v'\int_D\mathrm{d}\Omega'\Psi(r',v',\Omega')\int_E\frac{\mathrm{d}w}{w|r-r'|^2}k\Big(r,v,\Omega,w,\frac{r-r'}{|r-r'|}\Big)\\&\quad\cdot k\Big(r',w,\frac{r-r'}{|r-r'|},v',\Omega'\Big)\exp\Big\{-\frac{|r-r'|}{w}\Big[\lambda+\int_0^1\sigma(tr+(1-t)r',w)\mathrm{d}t\Big]\Big\}\end{aligned}\qquad(1)$$

要证明 $K(\lambda I-B)^{-1}K$ 是 $L^\infty(G)$到 C 上的紧算子，只要说明 $K(\lambda I-B)^{-1}K$ 将 $L^\infty(G)$上的任一有界集 U 映成有界的等度连续集即可. 由式(1)，$K(\lambda I-B)^{-1}KU$ 显然有界，因此只要再说明它是等度连续集即可.

对(r_1,v_1,Ω_1)、$(r_2,v_2,\Omega_2)\in G$，由式(1)不难得知对任一 $\Psi\in U$，

$$
\begin{aligned}
&K(\lambda I-B)^{-1}K\Psi(r_1,v_1,\Omega_1)-K(\lambda I-B)^{-1}K\Psi(r_2,v_2,\Omega_2)\\
&=\int_V \mathrm{d}r'\int_E \mathrm{d}v'\int_D \mathrm{d}\Omega'\Psi(r',v',\Omega')\\
&\qquad\cdot\int_E\frac{\mathrm{d}w}{w|r_1-r'|^2}\exp\Big\{-\frac{|r_1-r'|}{w}\Big[\lambda+\int_0^1\sigma(tr_1+(1-t)r',w)\mathrm{d}t\Big]\Big\}\\
&\qquad\cdot[k(r_1,v_1,\Omega_1,w,(r_1-r')/|r_1-r'|)k(r',w,(r_1-r')/|r_1-r'|,v',\Omega')\\
&\qquad-k(r_2,v_2,\Omega_2,w,(r_2-r')/|r_2-r'|)k(r',w,(r_2-r')/|r_2-r'|,v',\Omega')]\\
&+\int_V \mathrm{d}r'\int_E \mathrm{d}v'\int_D \mathrm{d}\Omega'\Psi(r',v',\Omega')\int_E\frac{\mathrm{d}w}{w}k(r_2,v_2,\Omega_2,w,\frac{r_2-r'}{|r_2-r'|})k(r',w,\frac{r_2-r'}{|r_2-r'|},v',\Omega')\\
&\qquad\cdot\Big\{|r_1-r'|^{-2}\exp\{-\frac{|r_1-r'|}{w}[\lambda+\int_0^1\sigma(tr_1+(1-t)r',w)\mathrm{d}t]\}\\
&\qquad-|r_2-r'|^{-2}\exp\{-\frac{|r_2-r'|}{w}[\lambda+\int_0^1\sigma(tr_2+(1-t)r',w)\mathrm{d}t]\}\Big\}\\
&=I_1+I_2.
\end{aligned}
$$

考虑 I_2. 对任一 $\varepsilon>0$，用类似文[8]P. 18～20 中使用的方法可以证明存在仅与 ε 有关的正数 δ，使当 $|r_1-r_2|<\delta$ 时，

$$
\begin{aligned}
&\int_V \mathrm{d}r'\Big|\,|r_1-r'|^{-2}\exp\{-\frac{|r_1-r'|}{w}[\lambda+\int_0^1\sigma(tr_1+(1-t)r',w)\mathrm{d}t]\}\\
&\qquad-|r_2-r'|^{-2}\exp\{-\frac{|r_2-r'|}{w}[\lambda+\int_0^1\sigma(tr_2+(1-t)r',w)\mathrm{d}t]\}\Big|<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

于是，当 $|r_2-r_1|$ 时，

$$|I_2|\leqslant C_1\varepsilon \tag{2}$$

其中 C_1 以及下文中出现的 $C_2,C_3,\cdots$ 均为正常数.

再考虑 I_1. 设 $|\Delta r|=|r_1-r_2|$，$d=\mathrm{dia}(V):=\max\{|x-y|\,|\,x,y\in V\}$，$\Delta V:=\{r'\in V\,|\,|r'-r_1|\leqslant(d|\Delta r|)^{1/2}\}$. 不妨设 $|\Delta r|<d/4$，则当 $r'\in V\backslash\Delta V$ 时，

$$|(r_2-r')/|r_2-r'|-(r_1-r')/|r_1-r'||\leqslant 4(|\Delta r|/d)^{1/2}$$

考察

$$
\begin{aligned}
I_1^*&=\int_V|r'-r_1|^{-2}[k(r_1,v_1,\Omega_1,w,(r_1-r')/|r_1-r'|)k(r',w,(r_1-r')/|r_1-r'|,v',\Omega')\\
&\qquad-k(r_2,v_2,\Omega_2,w,(r_2-r')/|r_2-r'|)k(r',w,(r_2-r')/|r_2-r'|,v',\Omega')]\mathrm{d}r'\\
&=\int_{\Delta V}|r'-r_1|^{-2}[\cdots]\mathrm{d}r'+\int_{V/\Delta V}|r'-r_1|^{-2}[\cdots]\mathrm{d}r'=I_3+I_4
\end{aligned}
$$

利用球面坐标变换知

$$|I_3|\leqslant C_2\int_{\Delta V}|r'-r_1|^{-2}\mathrm{d}r'=C_2\int_{\{r'\,|\,|r'-r_1|\leqslant(d|\Delta r|)^{1/2}\}}|r'-r_1|^{-2}\mathrm{d}r'\leqslant C_3|\Delta r|^{1/2} \tag{3}$$

对于 I_4，利用函数 k 的一致连续性知对任一 $\varepsilon>0$，存在仅与 ε 有关的正数 δ，当 $|r_1-r_2|^2+|v_1-v_2|^2+|\Omega_1-\Omega_2|^2<\delta^2$ 时（注意这时 $|(r_2-r')/|r_2-r'|-(r_1-r')/|r_1-r'||<4(|\Delta r|/d)^{1/2}<4\delta/d^{1/2}$），

$$|I_4|\leqslant C_4\varepsilon\int_{V\backslash\Delta V}|r'-r_1|^{-2}\mathrm{d}r<C_4\varepsilon\int_{\{r'\,|\,|r'-r_1|<d\}}|r'-r_1|^{-2}\mathrm{d}r'<C_5\varepsilon \tag{4}$$

注意到 $|I_1|$ 同 $|I_1^*|$、$|I_3|$、$|I_4|$ 的关系，由式(2)、(3)、(4)即知 $K(\lambda I-B)^{-1}KU$ 是等度连续集. 引理 2 证毕.

推论 1 $K(\lambda I-B)^{-1}K$ 是 C 上的紧算子

由于 $\lambda\in P_\sigma(A)$ 当且仅当 $1\in P_\sigma(K(\lambda I-B)^{-1})$，利用 Shmulyan 定理[5]知 $\sigma(A)$ 仅由离散本征值组成．类似文[9]可证若 Ψ 是 A 在 $L^1(G)$ 上的本征函数，则 $\Psi\in L^\infty(G)$，从而由引理 2 知 $\Psi\in C$．反之显然成立．于是由文[3]可得如下结果．

定理 2 $\sigma(A)$ 不依空间 C 和 $L^p(G)(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ 的选取而变化；$\sigma(A)$ 非空，且由至多可数个具有有限代数重数的孤立本征值组成；$\sigma(A)\subset\{\lambda\,|\,\mathrm{Re}\lambda\leqslant\|K\|-\lambda^*\}$；任何平行于虚轴的有限宽度的条带中只有有限多个 $\sigma(A)$ 中的点．

引理 3 任意给定 $\beta_2>\beta_1>-\infty$，则对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在与 $\beta\in[\beta_1,\beta_2]$ 无关的 $\tau^*>0$，使 $\|K(\lambda I-B)^{-1}K\|<\varepsilon$ 在 $\{\lambda=\beta+i\tau\,|\,\beta_1\leqslant\beta\leqslant\beta_2,|\tau|\geqslant\tau^*\}$ 上一致成立．

证明 对任一 $\varepsilon>0$，存在多项式 σ_1 和 k_1 使 $\|B-B_1\|<\varepsilon$，$\|K-K_1\|<\varepsilon$，其中

$$B_1\cdot=-v\Omega\cdot\mathrm{grad}_r\cdot-\sigma_1(r,v)\cdot,\qquad K_1\cdot=\int_D\int_E k_1(r,v,\Omega,v',\Omega')\cdot\mathrm{d}v'\mathrm{d}\Omega'$$

$D(B_1)=D(B)$，$D(K_1)=C$．对任一 $\Psi\in C$，不妨设 $\|\Psi\|=1$，则由式(1)知

$$|K_1(\lambda I-B_1)^{-1}K_1\Psi(r,v,\Omega)|\leqslant\int_E\mathrm{d}v'\int_D\mathrm{d}\Omega'\int_V\mathrm{d}r'\,\frac{|F(\lambda,|r-r'|,\cdots)|}{|r-r'|^2}\tag{5}$$

其中 $F(\lambda,|r-r'|,\cdots)=\int_E\frac{\mathrm{d}w}{w}k_1\Big(r,v,\Omega,w,\frac{r-r'}{|r-r'|}\Big)k_1\Big(r',w,\frac{r-r'}{|r-r'|},v',\Omega'\Big)$

$$\cdot\exp\Big\{-\frac{|r-r'|}{w}\Big[\beta+i\tau+\int_0^1\sigma_1(tr+(1-t)r',w)\mathrm{d}t\Big]\Big\}$$

易知 $|F(\lambda,|r-r'|,\cdots)|\leqslant C_6$．由于 σ_1 和 k_1 是多项式函数，类似文[10]通过分部积分可得

$$|F(\lambda,|r-r'|,\cdots)|\leqslant C_7|\tau|^{-1}|r-r'|^{-1}$$

记 $D_0=\{s:0<s\leqslant d\}$，$D_1=\{s:s<|\tau|s\leqslant1\}$，$D_2=\{s:|\tau|s>1\}$．当 $r'\notin V$ 时对 σ_1 和 k_1 进行适当延拓，利用球面坐标变换可以得到

$$\Delta:=\int_V|r-r'|^{-2}|F(\lambda,|r-r'|,\cdots)|\mathrm{d}r'\leqslant\int_{\{r':|r'-r|\leqslant d\}}|r-r'|^{-2}|F(\lambda,|r-r'|,\cdots)|\mathrm{d}r'$$

$$=C_8\int_{D_0\cap D_1}|F(\lambda,s,\cdots)|\mathrm{d}s+C_8\int_{D_0\cap D_2}|F(\lambda,s,\cdots)|\mathrm{d}s\leqslant C_9\int_{D_0\cap D_1}\mathrm{d}s+C_{10}\int_{D_0\cap D_2}|\tau|^{-1}s^{-1}\mathrm{d}s$$

对任一 $q>1$，利用 Hölder 不等式，并作变换 $y=|\tau|s$，得

$$\Delta\leqslant C_9\int_{D_0\cap D_1}\mathrm{d}s+C_{11}\Big(\int_{D_2}|\tau|^{-q}s^{-q}\mathrm{d}s\Big)^{1/q}$$

$$\leqslant C_9\int_0^1|\tau|^{-1}\mathrm{d}y+C_{11}\Big(\int_1^\infty|\tau|^{-1}y^{-q}\mathrm{d}y\Big)^{1/q}\leqslant C_{12}|\tau|^{-1/q}$$

所以由式(5)得

$$\|K_1(\lambda I-B_1)^{-1}K_1\|\leqslant C_{13}|\tau|^{-1/q}\tag{6}$$

记 $\Delta K=K-K_1$，$\Delta B=B-B_1$，则

$$K(\lambda I-B)^{-1}K=(K_1+\Delta K)(\lambda I-B_1-\Delta B)^{-1}(K_1+\Delta K)$$

$$=(K_1+\Delta K)[(\lambda I-B_1)^{-1}+(\lambda I-B_1)^{-1}\Delta B(\lambda I-B)^{-1}](K_1+\Delta K)\tag{7}$$

注意到对任一 $\varepsilon>0$ 可选取 σ_1,k_1 使 $\|\Delta B\|<\varepsilon$，$\|\Delta K\|<\varepsilon$，由式(6)、(7)即知引理成立．证毕．

由于 A_F 在 F 上生成 C_0-半群 $T(t)$，所以当 $\Psi_0\in D(A_F)$ 时，系统(I)的解

$$\Psi = T(t)\Psi_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}(\lambda I - A_F)^{-1}\Psi_0 d\lambda$$

其中 $\gamma > \|K\| - \lambda^*$, $\gamma \neq 0$(参见文[11]). 又 $\varphi \in F$ 时 $(\lambda I - A_F)^{-1}\varphi = (\lambda I - A)^{-1}\varphi$, 因此

$$\Psi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1}\Psi_0 d\lambda$$

由上式及引理3,仿文[9,12]中的方法可得如下结果.

定理3 对$\forall\ \Psi_0 \in D(A^2)$,(I)的解 Ψ 存在唯一,且

$$\left\|\Psi - \sum_{n=1}^{m} e^{\lambda_n t}P_n(t)\Psi_0\right\| = o(e^{bt})$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \cdots$ 是 A 的按实部大小排列的全部本征值,即 $\mathrm{Re}\lambda_1 \geqslant \mathrm{Re}\lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{Re}\lambda_m > \mathrm{Re}\lambda_{m+1} \geqslant \cdots$, $P_n(t)$ 是对应于 λ_n 的投影多项式算子(参见文[12,13]), b 是 $(\mathrm{Re}\lambda_{m+1}, \mathrm{Re}\lambda_m)$ 内任一实数.

定理3的结果可以加强. 为此,先证明如下引理

引理4 记 $t_0 = \mathrm{dia}(V)/v_m$. 当 $t \geqslant 6t_0$ 时, $T(t)$ 是 F 上的紧算子.

证明 将 A 视作 $L^2(G)$ 上的算子,则由文[3]知 A 在 $L^2(G)$ 上生成 C_0-半群 $E(t)$, 当 $t \geqslant 3t_0$ 时 $E(t)$ 是 $L^2(G)$ 上的紧算子,且对$\forall\ f \in L^2(G)$, $|E(t)f| \leqslant Ce^{\lambda_0 t}|||f|||$(参见文[3]P. 226),这里 C 是与 r, v, Ω 和 t 无关的常数, $\lambda_0 = \|K\| - \lambda^*$, $|||\cdot|||$ 表示 $L^2(G)$ 上的范数.

注意到 $\mathrm{Re}\lambda > \lambda_0$, $\Psi \in F$ 时 $(\lambda I - A)^{-1}\Psi = (\lambda I - A_F)^{-1}\Psi$, 利用 C_0-半群的指数公式(参见文[14]P. 33,定理8.3)不难说明对$\forall\ \Psi \in F$, 当把 $T(t)\Psi$ 看作 $L^2(G)$ 中的函数时, $T(t)\Psi = E(t)\Psi$. 因此,当 $t \geqslant 3t_0$ 时 $T(t)$ 将 F 中的有界集映成 $L^2(G)$ 中的致密集,且对$\forall\ \Psi \in F$, $|T(t)\Psi| \leqslant Ce^{\lambda_0 t}|||\Psi|||$.

设序列 $\{\Psi_k\} \subset F$ 且 $\|\Psi_k\| \leqslant 1$. 当 $t \geqslant 6t_0$ 时,注意到 $\|T(t)\Psi_m - T(t)\Psi_n\| = \|T(t-3t_0)[T(3t_0)\Psi_m - T(3t_0)\Psi_n]\| \leqslant Ce^{\lambda_0(t-3t_0)}|||T(3t_0)\Psi_m - T(3t_0)\Psi_n|||$ 及 $\{T(3t_0)\Psi_k\}$ 是 $L^2(G)$ 中的致密集即知 $\{T(t)\Psi_k\}$ 是 F 上的致密集. 引理证毕.

利用引理4仿文[3]P. 236定理5.2的证明过程即得如下渐近展开定理.

定理4 对$\forall\ \Psi_0 \in D(A_F)$,(I)的解 Ψ 存在唯一,且 t 足够大时,

$$\left\|\Psi - \sum_{n=1}^{m} e^{\lambda_n t}P_n(t)\Psi_0\right\| \leqslant C_m(\varepsilon)\exp[(\mathrm{Re}\lambda_{m+1} + \varepsilon)t]\,\|\Psi_0\|$$

其中 $\lambda_n, P_n(t)$ 的含义同定理3, ε 是任一正数, $C_m(\varepsilon) = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1}\{\|T(t)\|\exp[-(\mathrm{Re}\lambda_{m+1} + \varepsilon)t]\}$.

记 $W = \{r \in V \mid k(r, v, \Omega, v', \Omega') > 0, \forall\ v, v' \in E, \Omega, \Omega' \in D\}$, 并假设 $\mathrm{dis}(V \backslash W, \partial V) > 0$, 则在 $L^2(G)$ 上 A 的占优本征值 β_0 存在(参见文[7]). 利用引理2和定理2不难说明 β_0 也是 A 在 C 中的占优本征值,且相应的本征函数 $\Psi_{\beta_0} > 0$ a.e. $\Psi_{\beta_0} \in C$.

定义算子 $K' \cdot = \int_D\int_E k(r, v', \Omega', v, \Omega)\cdot dv' d\Omega'$, $B' \cdot = v\Omega \cdot \mathrm{grad}_r \cdot - \sigma(r, v)\cdot$, $D(K') = C$, $D(B') = \{\Psi \in C \mid B'\Psi \in C, \Psi(r, v, \Omega) = 0$ 对 $r \in \partial V$ 及远离 V 的方向 Ω 成立$\}$. 由文[7]知在 $L^2(G)$ 空间上 β_0 是 $A' = B' + K'$ 的简单本征值,且相应的本征函数 $\Psi_{\beta_0}^* > 0$ a.e.

类似引理1不难证明在 C 空间上任何复数 λ 都是 B' 的正则点且 $R(\lambda I - B') = C$. 由 $\beta_0\Psi_{\beta_0}^* = (B' + K')\Psi_{\beta_0}^*$ 得

$$\Psi_{\beta_0}^* = (\beta_0 I - B')^{-1}K'\Psi_{\beta_0}^* = (\beta_0 I - B')^{-1}K'(\beta_0 I - B')^{-1}K'\Psi_{\beta_0}^* \tag{8}$$

类似引理2可以证明 $K'(\beta_0 I-B')^{-1}K'$ 是 $L^\infty(G)$ 到 C 的紧算子，又 $\Psi^*_{\beta_0}\in L^\infty(G)$（证明可参见文[9]），故由式(8)知 $\Psi^*_{\beta_0}\in C$. 注意到 β_0 是算子 A' 在 $L^2(G)$ 上的简单本征值，不难说明在 C 空间上 β_0 也是 A' 的简单本征值，$\Psi^*_{\beta_0}$ 也是相应的正本征函数.

由定理4及以上讨论可得如下结论.

定理5 设 $\mathrm{dis}(V\backslash W,\partial V)>0$，则 A 的占优本征值 β_0 存在；对 $\forall\ \Psi_0\in D(A_F)$，方程(I)的解 Ψ 存在唯一，且 t 足够大时，$\|\Psi-e^{\beta_0 t}(\Psi_0,\Psi^*_{\beta_0})(\Psi_{\beta_0},\Psi^*_{\beta_0})^{-1}\Psi_{\beta_0}\|\leqslant C(\varepsilon)e^{(\beta_0-\varepsilon)t}\|\Psi_0\|$，其中 $(\cdot,\cdot)$ 是 $L^2(G)$ 上的内积，ε 是任一小于 $\beta_0-\sup\{\mathrm{Re}\lambda\,|\,\lambda\in\sigma(A),\lambda\neq\beta_0\}$ 的正数，$C(\varepsilon)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\{\|T(t)\|\exp[(\varepsilon-\beta_0)t]\}$；设 $\Psi_0\geqslant 0,\Psi_0\neq 0$，则当 $t\to+\infty$ 时，Ψ 依 $\beta_0<0,\beta_0>0$ 和 $\beta_0=0$ 按 max 范数分别趋于 $0,+\infty$ 和 $(\Psi_0,\Psi^*_{\beta_0})(\Psi_{\beta_0},\Psi^*_{\beta_0})^{-1}\Psi_{\beta_0}$.

2 一个注记

在 $L^2(G)$ 中考虑系统(I). 这时相应的迁移算子 A 的定义域为 $\mathscr{D}(A)=\{\Psi\in L^2(G)\,|\,A\Psi\in L^2(G);\Psi(r,v,\Omega)=0$ 对 $r\in\partial V$ 及进入 V 的方向 Ω 成立$\}$. 由文[3]，A 在 $L^2(G)$ 中生成 C_0-半群 $E(t)$ 且由引理3的证明过程知对 $\forall\ \Psi\in F$，$E(t)\Psi=T(t)\Psi$. 因此，可认为 $E(t)$ 将 F 中的元映为 F 中的元.

对任何一个 $f\in L^2(G)$，由于 F 是 $L^2(G)$ 中的稠密集，所以存在 $f_n\in F$，使当 $n\to\infty$ 时，$|||f_n-f|||\to 0$. 当 $t\geqslant 3t_0$ 时，由文[3]P. 226知（参见引理4证明过程）

$$|E(t)f_n-E(t)f|\leqslant Ce^{\lambda_0 t}|||f_n-f|||,\quad |E(t)f_n-E(t)f_m|\leqslant Ce^{\lambda_0 t}|||f_n-f_m|||$$

所以当 $n,m\to\infty$ 时，

$$\|E(t)f_n-E(t)f\|\leqslant Ce^{\lambda_0 t}|||f_n-f|||\to 0,$$
$$\|E(t)f_n-E(t)f_m\|\leqslant Ce^{\lambda_0 t}|||f_n-f_m|||\to 0$$

从而 $E(t)f\in F\subset C$. 这表明当 $t\geqslant 3t_0$ 时，$E(t)$ 将 $L^2(G)$ 中任一元素 f 映成 $F\subset C$ 中的元素，于是得到下述结果.

定理6 对任一 $\Psi_0\in\mathscr{D}(A)$，方程(I)在 $L^2(G)$ 空间上的解 Ψ 存在唯一，且当 $t\geqslant 3t_0$ 时，$\Psi(r,v,\Omega,t)$ 是 (r,v,Ω) 的连续函数.

上述讨论强化和修正了文[3]§7的一些结果. 顺便指出，由于 $D(A)$ 在 C 中不稠密，因此 A 不可能在 C 中生成如文[3]§7定理7.1中所说的“满足性质(1.6)的解算子 $E(t)$”（事实上就是 C_0 半群），从而文[3]§7的讨论对于连续函数空间是失效的. 这其中一个重要的原因是当时缺乏处理定义域不稠发展系统的有力的数学工具（如算子积分半群，等等）.

参考文献

1 Lehner J, Wing G M. On the spectrum of an unsymmetric operator arising in the transport theory of neutrons. Comm Pure Appl Math, 1955,8:217～234

2 Lehner J, Wing G M. Solution of the linearized Boltzmann equation for slab geometry. Duke Math J, 1956,23:125～142

3 Jörgens K. An asymptotic expansion in the theory of neutron transport. Comm Pure Ap-

pl Math, 1958, 11: 219～243

4 Kellermann H, Hilber M. Integrated semigroups. J Func Anal, 1989, 84(1): 160～180

5 Neubrander F. Integrated semigroup and their applications to the abstract Cauchy problem. Pacific J Math, 1988, 135(1): 111～555

6 Arendt W. Vector-valued Laplace transform and Cauchy problems. Israel J Math, 1987, 59(3): 327～352

7 阳名珠，朱广田. 具各向异性散射和裂变的迁移算子的谱. 中国科学，1981，24(1)：25～30

8 符拉基米诺夫 B C. 粒子单速迁移的数学问题. 数学译丛，1964，2：1～85

9 Shikhov S B. Problems of the mathematical theory of reactor. Moscow: Atomizdat, 1973 (in Russian).

10 宋德功，王绵森，朱广田. 能量从零到有限值连续变化的中子迁移算子的谱. 科学通报，1991，36(16)：1205～1208

11 Hill E, Phillips R S. Functional analysis and semigroups. Providence R I: Amer Math Soc Colloquium Publications, Vol. 31, 1957

12 Song Degong, Wang Miansen, Zhu Guangtian. Asymptotic expansion and asymptotic behavior of the solution for the time dependent neutron transport problem in a slab with generalized boundary conditions. Sys Sci & Math Scis, 1990, 3(2): 102～125

13 Song Degong, Wang Miansen, Zhu Guangtian. A note on the spectrum of transport operator in a slab with generalized boundary conditions. ibid, 1992, 5(2): 97～107

14 Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York: Springer-Verlag, 1983

（编辑 朱元昌）

ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE SOLUTION OF TRANSPORT EQUATION IN THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

Song Degong *Peng Jigen*
(Xi'an Jiaotong University)

Yang Genke
(Taiyuan Heavy Machinery Institute)

Abstract

This paper is devoted to investigate particle transport system in a finite convex body with the particle energy bounded away from the origin. By virtue of the theory of integrated semigroups, the existence-uniqueness problem is solved in the space of continuous functions, and the asymptotic expansion of the time dependent solution is obtained under the maximum norm.

Keywords: *transport equation* *space of continuous functions* *asymptotic expansion*