第11卷 第2期
1994年6月

工 程 数 学 学 报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol.11.No.2
Jun.1994

19

抽象 Cauchy 问题的(n, k)—适定性①

123-126　　O175.2

彭济根　王绵森

(西安交通大学数学系，西安 710049)

提　要

本文在生成元非稠定的情况下讨论了抽象 Cauchy 问题的(n, k)—适定性与积分半群的关系.

关键词　抽象 Cauchy 问题，适定性，n 次积分半群.　抽象初值问题，
分类号　20M07

设E是任意Banach空间，定义E中的抽象Cauchy问题：

(ACP)　　$\dot{u}(t)=Au(t),\ u(o)=x$

考虑到系数算子 A 不稠定的情况，1988 年 Neubrander.F 引进了 (ACP) 的 $(n,k)-$ 适定性定义[2]：如果存在 $n\in N$、$k\in Z^{+}$，$o\leqslant k\leqslant n$，以及局部有界函数 $P(\cdot)$，使得对任意 $x\in D(A^{n})$，(ACP) 存在唯一的解 $u(\cdot)$，满足 $\|u(\cdot)\|\leqslant P(\cdot)|x|_{k}$（其中 $|x|_{k}=\sum_{i=0}^{k}\|A^{i}x\|$），则称 (ACP) 是 $(n,k)-$ 适定的；特别，如果 $P(\cdot)=Me^{w\cdot}$，则称 (ACP) 指数 $(n,k)-$ 适定．同时，在 A 稠定的假定条件下，Neubrander. F 本人也讨论了 (ACP) 指数 $(n,n-1)-$ 适定性与 A 生成 n 次积分半群的关系，之所以需要“A 稠定”和“指数有界”两个条件，关键在于古典 Laplace 方法的应用和以便解算子在整个空间上的延拓．本文的主要目的在于，在 A 非稠定及解算子非指数有界的情况下讨论 (ACP) 的 $(n,k)-$ 适定性与 A 生成 n 次积分半群的关系．

一类单参数有界线性算子族 $S(t)$ $(t\geqslant 0)$ 称为 n 次积分半群，如果 $S(t)$ 关于 t 强连续且满足：$S(o)=0,S(t)S(s)=\frac{1}{(n-1)!}[\int_{t}^{t+s}(t+s-r)^{n-1}s(r)dr-\int_{0}^{s}(t+s-r)^{n-1}s(r)dr]$．线性算子 A：$D(A)\subseteq E\rightarrow E$ 称为 n 次积分半群 $S(t)$ 的生成元，如果对任意 $x\in D(A)$，$y=Ax$，$S(t)\in C^{1}([0,\infty),E)$ 且 $S'(t)x=S(t)y+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x$；反之，若存在 $y\in E$，使得

①本文1993年2月23日收到．

$S'(t)x = S(t)y + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x$ 成立，则 $x \in D(A)$ 且 $y = Ax$[4]。

定理1 如果$\rho(A) \neq \Phi$，则下列命题等价：

i) (ACP)是$(n+1,n)$－适定的；

ii) A生成n次积分半群；

iii) $\forall x \in D(A^{n+1})$，(ACP)都存在唯一的解$u(t)$，

iv) $\forall x \in D(A^{n+1})$，(ACP)都存在唯一解$u(t)$，并且解$u(t)$在如下意义下对初值x连续依赖：若$x_k \in D(A^{n+1})$，$\|x_k\|_n \to 0$(当$k \to \infty$)，则$u_k(\cdot) \to 0$在紧集上一致.

证明 i)⇒ii) 由半群的扰动原理[3]，不妨令$0 \in \rho(A)$，对任意的$x \in E$，$y = A^{-n-1}x \in D(A^{n+1})$，令$u(t,x)$是以$y$为初值的$(ACP)$的解．由解的唯一性知$u(t,x)$关于$x$线性，令$\alpha(t)x = u(t,x)$ $(\forall x \in E)$，$S(t)x = A\alpha(t)x - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}A^{-n+k}x$．下$S(t)$ $(t \geqslant 0)$就是A生成的n次积分半群.

a) 明显地$s(t)\cdot(t \geqslant 0)$线性且$S(o) = 0$，另外，对任意固定的$t > 0$，$\|\alpha(t)x\| \leqslant P(t)\|A^{-n-1}x\|_n \leqslant M(t)\|x\|$ (其中$M(t) = P(t)\sum\limits_{k=1}^{n+1}\|A^{-k}\|$)．由$A$的闭性知$A\alpha(t)$是闭的，从而$S(t)$是有界的.

b) 对任意$t,s > 0$，由定义，$\alpha'(t)x = A\alpha(t)x$且$\alpha(o)x = A^{-n-1}x$，$S(t)x = S'(t)A^{-1}x - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{-1}x$ $(\forall x \in E)$，于是由分部积分法及归纳得.

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{s+t}(s+t-r)^{n-1}s(r)xdr$$

$$= S(t+s)A^{-n}x - \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{s+t}r^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t+s-r)^k}{k!}A^{-n+k}xdr$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t(s+t-r)^{n-1}S(r)xdr$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^k}{k!}A^{-n+k}x - \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t r^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t+s-r)^k}{k!}A^{-n+k}xdr$$

另一方面，由解的唯一性知$\alpha(t)A\alpha(s)x = \alpha(t+s)A^{-n}x$，从而

$$S(t)S(s)x = S(t+s)A^{-n}x + \sum_{k=0}^{n-1}(t+s)^k/k! \quad A^{-2n+k}x - I_1 - I_2$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{t^l}{l!}\frac{s^k}{k!}A^{-2n+l+k}x$$

其中$I_1 = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}S(s)A^{-n+k}x$，$I_2 = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{s^k}{k!}S(t)A^{-n+k}x$，由归纳

$$\frac{1}{(n-1)!}\left(\int_0^t+\int_0^s-\int_0^{t+s}\right)r^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t+s-r)^k}{k!}A^{-n+k}xdr$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t+s)^k}{k!}A^{-2n+k}x-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{s^k}{k!}\cdot\frac{t^l}{l!}A^{-2n+l+k}x.$$

从而由以上各关系式得

$$S(t)S(s)x=\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{s+t}(s+t-r)^{n-1}S(r)xdr-\frac{1}{(n-1)!}\int_0^s(s+t-r)^{n-1}S(r)xdr$$

即$S(t)$ $(t\geqslant 0)$满足半群关系.

C) 设$S(t)$的生成元为$\overline{A}$，由定义易知$A\subseteq\overline{A}$，反之，任取$x\in D(\overline{A})$，$S'(t)x=S(t)\overline{A}x+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x$，另外由$S(t)$的定义$S'(t)x=AS(t)x+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x$，于是$S(t)\overline{A}x=AS(t)x$ $(t\in[0,\infty))$，$A^{-1}\overline{A}x=x$，即$\overline{A}\subseteq A$。从而得证$S(t)$是由A生成的n次积分半群.

ii)⇒iii) 由文献[2][3].

iii)⇒iv) 参见[[2]，$Th3.1$].

iv)⇒i) 设$E_1=D(A^{n+1})$，赋以范数$\|x\|_n=\sum_{k=0}^{n}\|A^kx\|$，任取$t\geqslant 0$，定义算子$S_t$: $E_1\to C([0,t+1),E)$，$S_t(x)=u(\cdot)$（其中$C([0,t+1),E)$赋以范数$v\in C([0,t+1),E)$,$\|v\|=\sup\limits_{r\in[0,t+1)}\|v(r)\|$；$u(t)$是$(ACP)$以$x$为初值的解）．由解对初值的连续依赖性易知$S_t$是定义在$E_1$的有界线性算子，即存在$M_t<\infty$使得$\sup\limits_{r\in[0,t+1)}\|u(r)\|\leqslant M_t\|x\|_n$，特别$\|u(t)\|\leqslant M_t\|x\|_n$．从而iv)⇒i) 成立.

定理2 若$\rho(A)\neq\Phi$，则下列命题:

i) (ACP)是(n,k)适定的$(0\leqslant k\leqslant n-1)$.

ii) A生成$n-1$次积分半群.

满足: i)⇒ii)；若$k=n-1$，则i)⇒ii)

证明 i)⇒ii). 若$k\leqslant n-1$，则由定义(n,k)适定隐含$(n,n-1)$适定，于是由定理1即得，若$k=n-1$，由定理1.

注1° 在定理2中，若$0\leqslant k<n-1$，则ii)⇒i)可能不成立，如下面例子[5].

例1 设$E=l^2$，$S(t)$: $\{x_n\}\to\{\int_0^t\exp(a_ns)ds\cdot x_n\}$，其中$a_n=n+2^{n+2}\pi i$，$S(t)$ $(t\geqslant 0)$是定义在E中的积分半群，若$x=\{x_n\}\in l^2$满足$S(t)x=\{\int_0^t\exp(a_ns)dsx_n\}=0$，则$x_n=0$ $(n\in N)$即$S(t)$是非退化的，从而$S(t)$有生成元A，并且由定义知$D(A)=\{x\in l^2$: $\{a_nx_n\}\in l^2\}$，$D(A^2)=\{x\in l^2$: $\{a_n^2x_n\}\in l^2\}$，考虑抽象 Cauchy 问题:

(ACP) $\quad u'(t)=Au(t)$，$u(0)=x$

根据定理1，(ACP)是$(2,1)$适定的．但不是(2.0)适定的．事实上，设$x^k=\{x_n^k\}$，

其中 $x_n^k=\frac{1}{k}$，$n=k$；$x_n^k=0, n\neq k$. 明显地 $x^k\in D(A^2)$ $(\forall k\in N)$ 且 $x^k\to 0$ （当 $k\to\infty$）

但 $|x^k|_1=\|x^k\|+\|Ax^k\|=\frac{1}{k}+1\nrightarrow 0$. x^k 为初值的解 $u_k(t)=s'(t)x^k$

$=\{\exp(a_n t)x_n^k\}$, $\|u_k(t)\|=|e^{a_k t}\cdot\frac{1}{k}|\nrightarrow 0$(当 $k\to\infty$).

2° 无任是定理 2 还是定理 1 中，都不要求算子 A 稠定及半群指数有界. 例如注 1° 中的例 1 中，A 生成的积分半群是非指数有界的，但 $0\in\rho(A)$ 且 (ACP) 是 (2,1) 适定的.

参考文献

〔1〕 J.Hadamard, Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Yale Univ. Press, New Haven,1923.

〔2〕 F. Neubrauder, Integrated Semigroups and their applications to the abstract Cauchy problems, Proc. J. Math. 135(1988).111−155.

〔3〕 郑 权，积分半群与抽象Cauchy问题，数学进展，Vol.21,No.3.

〔4〕 H.K. Thieme, Integrated Semigroups and integrated solutions to abstract Cauchy problems, J. Math. Anal. Appl. 152(1990), 416−447.

〔5〕 Kellerman, H. and Hieber, M., Integrated semigroups,J. Funct. Anal., 84(1989),160−180.

〔6〕 F. Neubrander, Well−posedness of abstract Cauchy problems. Semigroup Forum, 29(1984).

The (n,k)−Wellposedness of Abstract Cauchy Problem

Peng Jigen Wang Mianshen

(Dept. of Math., Xi'an Jiaotong University, Xi'an,710049)

Abstract

In the case that the generator is not densely defined, this paper studies the relations between the (n,k)−wellposedness of abstract Cauchy problem and n−times integrated semigroups.