宏观吸收截面，最优控制，控制函数

第27卷 第4期　　西安交通大学学报　　Vol. 27 №4
1993年8月　　JOURNAL OF XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY　　Aug. 1993

(22) 123-125

最优宏观吸收截面的控制

汤才木　彭济根　王绵森
（数学系）

O231

1　问题提法

考虑如下系统 $\begin{cases} L\varphi + \sigma\varphi = \dfrac{1}{\lambda(\alpha)}k\varphi \\ (h,\varphi) = P \end{cases}$

其中 P 为正常数，h 是 $L^2(\Omega)$ 中一给定的非负数，α 是控制函数，其容许控制集定义为

$$\mathscr{U} = \{\alpha \in L^\infty(\Omega_1) \mid 0 \leqslant a(x) \leqslant \alpha(x) \leqslant b(x) < \infty, a.e.\}$$

$a(x), b(x) \in L^\infty(\Omega_1)$，$\lambda(\alpha)$ 为 $L\varphi + \alpha\varphi = \dfrac{1}{\lambda(\alpha)}k\varphi$ 的临界本征值（Ω_1, Ω_2 是 R^n, R^m 中有界可测集，$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$）.

现给定 γ（正数），求 $\alpha \in u$ 使得 $\lambda(\alpha) = \gamma$ 且使下面指标泛函取得最小值

$$J(\alpha) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} |\varphi(\alpha) - M\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上述问题可转化为如下问题

$W \triangleq \{\varphi \in L^2(\Omega) \mid$ 存在 $\alpha \in \mathscr{U}$，使得 $\lambda(\alpha) = \gamma$，且对任意 $\varphi \in L^2(\Omega)$ 及任意 $\varepsilon > 0$，存在 δ，当 $|h| < \delta$ 时，$\int_\Omega |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon\}$

$$(P)\begin{cases} \min\{J(\varphi) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} |\varphi - M\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\} \\ \varphi \in W \end{cases}$$

其中　$$M\varphi = \frac{1}{mes(\Omega)}\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} \varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

收到日期：　1993-03-18

2 存在性

引理 1[1] X 是线性拓扑空间，$f: X\to R^1\cup\{\infty\}$ 是任一实值函数，则下述命题相互等价：

1) f 是 X 上的下半连续函数；

2) 任意 $r\in R^1$，水平集 $S_r^{\leqslant}(f)=\{x\in X\mid f(x)\leqslant r\}$ 在 X 中闭；

3) f 的上图 $\mathrm{epi}(f)$ 在乘积空间 $X\times\bar{R}$ 内是闭的，$\bar{R}=R^1\cup\{\infty\}$.

引理 2[2] S 是 $L^2(\Omega)$ 的一子集，扩张 S 中函数的定义域到全空间，通过定义在 Ω 外为 0 的方式，那么 S 相对紧：若任意 ε，存在 δ，任意 $f\in S$，$|h|<\sigma$

$$\int_\Omega |f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x<\varepsilon$$

引理 3 $J(\varphi)$ 是 $L^2(\Omega)$ 上的弱下半连续泛函.

证明 由引理 1 可知：要证 $J(\varphi)$ 弱下半连续，只要证 $S_r^{\leqslant}(J)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中弱闭即可. 易知 $S_r^{\leqslant}(J)$ 凸，则弱闭与强闭等价. 若 $\varphi_n\xrightarrow{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}\varphi_0$，则 $\varphi_0\in L^2(\Omega)$.

又 $J(\varphi)$ 关于 φ 连续，$\varphi_n\to\varphi_0$（按范数），

$J(\varphi_n)\to J(\varphi_0)$，故 $J(\varphi_0)\leqslant\gamma$

$\therefore \varphi_0\in S_r^{\leqslant}(J)$ 证毕.

引理 4 $J(\varphi)$ 的极小化序列有界.

证明 设 $J(\varphi)$ 的极小化序列为 $\{\varphi_n\}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}J(\varphi_n)=\inf\limits_{\varphi\in W}J(\varphi)<\infty$

$\therefore \{\varphi_n-M\varphi_n\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中有界，$(\varphi_n-M\varphi_n,\sigma_n)$ 有界.

但 $(\varphi_n-M\varphi_n,\sigma_n)=(\varphi_n,\sigma_n)-(M\varphi_n,\sigma_n)=4\prod P-M\varphi_n(1,\sigma_n)$

由于 $4\prod c_1m(\Omega)\leqslant(c_1,\sigma_n)\leqslant 4\prod c_2m(\Omega)$

其中

$$c_1=\int_\Omega a(x)\mathrm{d}x\quad,\quad c_2=\int_\Omega b(x)\mathrm{d}x$$

$\therefore \{M\varphi_n\}$ 有界，可得 $\{\varphi_n\}$ 有界.

引理 5 W 强闭.

证明 由 W 的定义易知，故略.

定理 1 问题 (P) 存在最优解.

证明 设 $\{\varphi_n\}\subset W$ 为极小化序列，由引理 4 可知，存在 M（常数），使得 $\|\varphi_n\|\leqslant M$，由引理 1 可得，W 是相对紧集，$\therefore$ 存在 $\{\varphi_n\}$ 一个子列仍记为 $\{\varphi_n\}$，使得：$\varphi_n\xrightarrow{\|\cdot\|}\varphi_0\in W$（由引理 5）. $\because J(\varphi)$ 下半连续，$\therefore J(\varphi_0)\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}J(\varphi_n)=\inf\limits_{\varphi\in W}J(\varphi)$，$\therefore J(\varphi_0)=\inf\limits_{\varphi\in W}J(\varphi)$，即得存在性.

3 最优性条件

引理 6[3] $J(\varphi)$ 关于 φ 的 Fréchet 导数存在且对任意 $h\in L^2(\Omega)$

$$(J'(\varphi),h)=(\varphi-M\varphi,h)$$

定理 2 $\lambda_0\in\mathscr{U}$ 是最优宏观吸收截面当且仅当对任意 $\sigma\in\mathscr{U}$，$(\psi,(\lambda_0-\lambda)\varphi)\geqslant0$. 其中 ψ 满足

$$L^*\psi+\lambda_0\psi=\frac{1}{\gamma}k\psi+(\varphi_0-M\varphi_0)-(\varphi_0-M\varphi_0,\varphi_0)$$

证明 依[3]，对应 λ_0 的 λ_0 是(P)的解当且仅当对任意 $\varphi\in W$，$(J'(\varphi_0),\varphi-\varphi_0)\geqslant0$，由引理 6，$(J'(\varphi_0),h)=(\varphi_0-M\varphi_0,h)$.

∴上式等价于对任意 $\varphi\in W$，$(\varphi_0-M\varphi_0,\varphi-\varphi_0)\geqslant0$，现引进共轭态 ψ

$$L^*\psi+\lambda_0\psi=\frac{1}{\gamma}k\psi+(\varphi_0-M\varphi_0)+ah$$

其中 a 待定. 令 $\tilde{\psi}=(L^*+\lambda_0)$. 则可得

$$\tilde{\psi}=\frac{1}{\gamma}((L+\lambda_0)-1K)^*\tilde{\psi}+(\varphi_0-M\varphi_0)+ah) \qquad (*)$$

由 Fredholm 交替定理可得[4]

$(*)$有解当且仅当$(\varphi_0-M\varphi_0+ah,\varphi_0)=0$，从而有

$$a=-\frac{(\varphi_0-M\varphi_0,\varphi_0)}{h}$$

$$\begin{aligned}
\therefore(\varphi_0-M\varphi_0,\varphi-\varphi_0)&=(L^*\psi+\lambda_0\psi-\frac{1}{\gamma}k\psi-ah,\varphi-\varphi_0)\\
&=(L^*\psi+\lambda_0\psi-\frac{1}{\gamma}k\psi,\varphi-\varphi_0)\\
&=(\psi,(L+\lambda_0-\frac{1}{\gamma}k))(\varphi-\varphi_0)\\
&=(\psi,(\lambda_0-\lambda)\varphi)
\end{aligned}$$

证毕.

利用 Kuhu-Tucker 定理[5]也可得到另一种形式的最优性条件，方法与[3]的所用方法类似，感兴趣的读者不妨一试，本文从略.

参考文献

1 游兆永，龚怀云，徐宗本. 非线性分析. 西安交大出版社，1992

2 Hutson V，Pym J S. Applications of functional analysis and operator theory. New York：Academic Press，1980

3 冯德兴，朱广田. 散射裂变截面的最优设计，系统科学与数学，1985，5(1)：73～80

4 关肇直. 泛函分析讲义. 高等教育出版社，1958

5 Girsanou I V. Lectures on mathematical theory of extremum problems. New York，Springer-Verlag，1972

（编辑 赵红）

THE OPTIMAL CONTROL OF THE MACROSCOPIC ABSORBTION CROSS SECTION

Tang Caimu *Peng Jigen* *Wang Miansen*

(Depiartment of Mathematics)