(33)

残疾人口系统的适定性*

彭济根　　李惜雯

（西安交通大学数学系，西安 710049）

摘　要　本文利用算子半群理论首次研究了残疾人口系统的适定性，从而证明了文[1]对残疾人口方程所提定解条件的合理性。

关键词　残疾人口系统，C_0 半群，适定性

一、记号与等价系统

文[1]在视正常人口与残疾人口群体各为一整体时，建立了残疾人口系统的连续发展模型，并指出，在社会环境较安定的情况下，残疾人口的这一模型可由如下系统描述：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v(r,t)}{\partial r}+\dfrac{\partial v(r,t)}{\partial t}=\sigma(r)w(r,t)-[\mu(r)+\delta(r)]v(r,t) & r\in(0,r_m),t>0\\ \dfrac{\partial w(r,t)}{\partial r}+\dfrac{\partial w(r,t)}{\partial t}=\delta(r)v(r,t)-[\overline{\mu}(r)+\sigma(r)]w(r,t) & r\in(0,r_m),t>0\\ v(r,0)=v_0(r),w(r,0)=w_0(r) & \\ w(0,t)=\alpha\int_{r_1}^{r_2}h(r)k(r)v(r,t)dr+\overline{\alpha}\int_{r_1}^{r_2}\overline{h}(r)\overline{k}(r)w(r,t)dr & \\ v(0,t)=\beta\int_{r_1}^{r_2}h(r)k(r)v(r,t)dr+\overline{\beta}\int_{r_1}^{r_2}\overline{h}(r)\overline{k}(r)w(r,t)dr & \\ \lim\limits_{r\to r_m^-}v(r,t)=\lim\limits_{r\to r_m^-}w(r,t)=0 & t\geqslant 0\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $v(r,t)$，$w(r,t)$ 分别表示 t 时刻年龄为 r 的正常人口和残疾人口的密度函数；$\mu(r)$，$\overline{\mu}(r)$，$\sigma(r)$，$\overline{\sigma}(r)$，$h(r)$，$\overline{h}(r)$，$k(r)$，$\overline{k}(r)$，$\alpha,\beta,\overline{\alpha},\overline{\beta}$ 的含意同文[1]。由物理意义，作如下假设：

i）注意到 $\mu(r)$ 与 $\overline{\mu}(r)$ 分别表示正常人与残疾人的具年龄结构的相对死亡率模（age-specific mortality modulus），故式

$$\pi(0,r)=\exp[-\int_0^r\mu(t)dt],\ \overline{\pi}(0,r)=\exp[-\int_0^r\overline{\mu}(t)dt]$$

分别表示正常人和残疾人从零岁活到 r 岁的概率。于是可假定

$$\lim_{r\to r_m^-}\pi(0,r)=\exp[-\int_0^{r_m}\mu(t)dt]=0,\ \lim_{r\to r_m^-}\overline{\pi}(0,r)=\exp[-\int_0^{r_m}\overline{\mu}(t)dt]=0\tag{1.2}$$

ii）治愈率 $\sigma(r)$ 和致残率 $\delta(r)$ 非负可测，且 $0\leqslant\sigma(r)\leqslant1$，$0\leqslant\delta(r)\leqslant1$；女性比例 $k(r)$，$\overline{k}(r)$ 非负可测，且 $0<k(r)<1$，$0<\overline{k}(r)<1$；生育模式函数 $h(r)$、$\overline{h}(r)$ 有界可测，且满足下列规格化条件：

---

* 国家自然科学基金资助课题。

$$\left.\begin{aligned} & h(r)=\bar{h}(r)=0, r \notin [r_1, r_2] \\ & \forall r \in [0, r_m], h(r), \bar{h}(r) \leqslant h_0 \\ & \int_{r_1}^{r_2} h(r) d r=\int_{r_1}^{r_2} \bar{h}(r) d r=1 \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

iii) $\mu(r), \bar{\mu}(r)$ 在 $[0, r_m]$ 上非负可测且有本性下界。

正常人口和残疾人口密度函数 $v(r,t), \omega(r,t)$ 的 $L[0,r_m)$ 的范数 $\int_0^{r_m}|v(r,t)|dr=\int_0^{r_m}v(r,t)dr$ 和 $\int_0^{r_m}|w(r,t)|dr=\int_0^{r_m}w(r,t)dr$ 分别表示 t 时刻正常人口总数和残疾人口总数。故选取 $E=L[0,r_m)\times L[0,r_m)$ 作为系统的状态空间，$\varphi(r)=(\varphi_1(r),\varphi_2(r))^T\in E$ 的范数 $\|\varphi(r)\|_E=\|\varphi_1(r)\|_{L[0,r_m)}+\|\varphi_2(r)\|_{L[0,r_m)}$，$B(E)$ 记 E 上有界线性算子的全体所构成的 Banach 代数，C^2 是赋以范数 $|a|_2=|a_1|+|a_2|$ 的二维复数空间，$B(c^2)$ 是 C^2 上二阶矩阵的全体，则在下述意义下，$B(c^2)\subset B(E)$：对任意 $A\in B(c^2)$，$\varphi(r)\in E$，

$$A\varphi=A(\varphi_1(r),\varphi_2(r))^T=(a_{11}\varphi_1+a_{12}\varphi_2, a_{21}\varphi_1+a_{22}\varphi_2)^T$$

且 $\|A\|_E=\max\{|a_{11}|,|a_{12}|,|a_{21}|,|a_{22}|\}$。

若在空间 E 中定义算子 $A: D(A)\subset E\to E$：

$$A\varphi=\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial r}\varphi_1(r)-[\mu(r)+\delta(r)]\varphi_1(r)+\sigma(r)\varphi_2(r) \\ -\frac{\partial}{\partial r}\varphi_2(r)-[\bar{\mu}(r)+\delta(r)]\varphi_2(r)+\delta(r)\varphi_1(r) \end{bmatrix}$$

$$B\varphi=\begin{bmatrix} \beta\int_{r_1}^{r_2}h(r)k(r)\varphi_1(r)dr+\bar{\beta}\int_{r_1}^{r_2}\bar{h}(r)\bar{k}(r)\varphi_2(r)dr \\ \alpha\int_{r_1}^{r_2}h(r)k(r)\varphi_1(r)dr+\bar{\alpha}\int_{r_1}^{r_2}\bar{h}(r)\bar{k}(r)\varphi_2(r)dr \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

其中 $D(A)=\{\varphi(r)\in E: \varphi_1(r), \varphi_2(r)$ 绝对连续且 $A\varphi\in E, \varphi(0)=B\varphi\}$，$D(B)=E$，则残疾人口系统(1.1)等价于如下抽象的初边值问题：

$$(AOP)\begin{cases} \dot{u}(t)=Au(t) \qquad u(0)=u_0=(v_0(r),w_0(r))^T \\ \lim\limits_{r\to r_m}u(r,t)=0 \end{cases}$$

以下我们称 A 为残疾人口算子，B 为生育算子。

对于人口系统，宋健、朱广田、于景元等人作过细致而深入的研究工作，所得结果为我国人口控制提供了丰富的理论依据[2][3]。

残疾人口系统(1.1)是一个闭环耦合系统，这是残疾人口系统区别于一般人口系统的显著特征，这为检验残疾人口算子 A 是否生成 c_0 半群带来了困难。本文利用文[4]中得到的结果证明了 A 生成 c_0 半群，由此分析了系统(1.1)的适定性问题。

二、适定性

引理 1 残疾人口算子 A 是稠定的线性算子，生育算子 $B: E\to C^2\subset E$ 是有界线性算子，且

$$\|B\|\leqslant\max\{\alpha,\bar{\alpha},\beta,\bar{\beta}\}\cdot\max\{\operatorname*{esssup}_{r_1\leqslant r\leqslant r_2}h(r)k(r), \operatorname*{esssup}_{r_1\leqslant r\leqslant r_2}\bar{h}(r)\bar{k}(r)\} \qquad (证明略)$$

引理 2 残疾人口算子 A 是闭的，当 $\lambda>\frac{\ln\|B\|+r_2}{r_1}-\lambda^*$ 时，$R(\lambda I-A)=E$，且

$\left\{\lambda\in R:\lambda>\dfrac{\ln\|B\|+r_2}{r_1}-\lambda^*\right\}\subset\rho(A)$(其中 $\lambda^*=\min\{\operatorname*{essinf}_{r_1\le r\le r_2}\mu(r),\operatorname*{essinf}_{r_1\le r\le r_2}\bar{\mu}(r)\}$，$\rho(A)$表 A 的预解集)。　　　　(证明略)

引理 3[4]　设 A 是闭稠定线性算子，则下列等价：

1) A 生成正 C_0 半群 $T(t)$，$\|T(t)\|\leqslant Me^{wt}$；

2) 存在 $w\in R$，$(w,\infty)\subset\rho(A)$，$(\lambda I-A)^{-1}\geqslant 0$ 且

$$\left.\begin{array}{l}\left\|\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{kj}\cdot\lambda(\lambda jI-A)^{-1}\right\|_E\leqslant M\\ \|\lambda(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant M\end{array}\right\}\ \lambda>w,k\in N\ \text{充分大}\qquad(2.1)$$

定理 1　残疾人口算子 A 生成正 c_0 半群 $E(t)$，$\|E(t)\|\leqslant Me^{wt}$.

证明　只要用引理 2 及 Lebesgue 控制收敛定理验证引理 3 的条件 2)成立即可。

推论　以残疾人口算子 A 所引导的抽象 Cauchy 问题

$$\dot{u}(t)=Au(t)\quad u(0)=x\qquad(ACP)$$

若 $C\in D(A)$，则(ACP)有唯一解 $u(t,x)=T(t)x$，且解 $u(t,x)$在如下意义下对初值 x 连续依赖：若 $x_n\in D(A)$，$x_n\to 0$，则 $u(t,x_n)\to 0\ (n\to\infty)$，且收敛在 t 的紧集上一致。

证明　依文[5]及定理 1 即得。

定理 2　若初始人口密度$(v_0(r),w_0(r))^T\in D(A)$，则在假设条件 i)下，残疾人口系统(1.1)有且仅有唯一解为：

$$\begin{cases}(v(r,t),w(r,t))^T=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{ntj}\cdot n\{\int_0^r e^{\int_s^r\Delta}(v_0(s),w_0(s))^T ds\\ \qquad+e^{\int_0^r\Delta}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(Be^{\int_0^{r_m}\Delta})^k B\int_0^{r_m}e^{\int_s^{r_m}\Delta}(v_0(s),w_0(s))^T ds\}\\ v(r,0)=v_0(r),w(r,0)=w_0(r)\end{cases}\qquad(2.2)$$

其中极限按 E 的范数收敛且在 t 的紧集上一致(这里记号$\int_0^r\Delta=\int_0^r[\Delta(nj,s)+F(s)]ds$). 在李亚谱诺夫意义下，若$(v(r,t),w(r,t))^T$ 是残疾人口系统对应初始人口密度分布$(v_0(r),w_0(r))^T\in D(A)$的平衡解，则此平衡解是一致稳定的。

证明　依定理 1 之推论及[4]，只需验证(2.2)式在自然条件(1.2)式下满足$\lim\limits_{r\to r_m}v(r,t)=\lim\limits_{r\to r_m}w(r,t)=0$. 注意到(2.2)中的因子 $e^{\int_0^r[\Delta(nj,s)+F(s)]ds}$在(1.2)下：$e^{\int_0^{r_m}\Delta}=0$，由定理 1 证明中关于 $\lambda\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{kj}((\lambda jI-A)^{-1}g)(r)$的估计及(2.2)式中收敛方式，结合 Lebesgue 控制收敛定理，易于验证：$\lim\limits_{r\to r_m}v(r,t)=v(r_m,t)=\lim\limits_{r\to r_m}w(r_m,t)=0$. 证毕。

参　考　文　献

[1]　李错雯，周义仓，工程数学学报，Vol. 11，No. 3(1994)

[2]　宋　健，于景元，中国科学，A 辑，No. 2，(1986)PP. 113—123

[3]　宋　健，于景元，人口控制论，科学出版社，北京 1986

[4]　彭济根，王绵森，朱广田，科学通报，Vol. 139，No. 6(1994)

[5]　Fattorini H. O.，The Cauchy problems，Addison Welsoy，Reading，Mass.，1983

[6] Hille E. and Phillips R. S. Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc. Collog, Publ, 1957

The WellPosedness of the Disabled Population System

Peng Jigen   Li Xiwen
(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract With the theory of semigroup of operators, this paper studies first the wellposedness of disabled population system, therefore, the rationality of the sovable conditions of the disabled population system given by [1] is proved.

Keywords Disabled population system, C_0—Semigroups, Wellposedness