(32)

残疾人口系统的渐近性态*

李惜雯　　　彭济根

（西安交通大学数学系，西安 710049）

摘　要　本文通过对残疾人口算子的谱分析研究了残疾人口系统的渐近性态，由此给出了残疾人口系统稳定性的有关结论及解的渐近展开式。

关键词　残疾人口算子、本征值、稳定性

一、引　　言

我们在文[1]中研究了残疾人口系统

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial V(r,t)}{\partial r}+\frac{\partial V(r,t)}{\partial t}=\sigma(r)W(r,t)-[\mu(r)+\delta(r)]V(r,t)\\
&\frac{\partial W(r,t)}{\partial r}+\frac{\partial W(r,t)}{\partial t}=\delta(r)V(r,t)-[\bar{\mu}(r)+\sigma(r)]W(r,t)\quad r\in(0,r_m),t>0\\
&V(r,0)=V_0(r),\qquad W(r,0)=W_0(r)\\
&W(0,t)=\alpha\int_{r_1}^{r_2}h(r)k(r)V(r,t)dr+\bar{\alpha}\int_{r_1}^{r_2}\bar{h}(r)\bar{k}(r)W(r,t)dr\\
&V(0,t)=\beta\int_{r_1}^{r_2}h(r)k(r)V(r,t)dr+\bar{\beta}\int_{r_1}^{r_2}\bar{h}(r)\bar{k}(r)W(r,t)dr\\
&\lim_{r\to r_m}V(r,t)=\lim_{r\to r_m}W(r,t)=0\qquad t\geqslant 0
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

的适定性（(1)中有关参数的物理意义见[2]）。本文在[1]的基础上讨论系统(1)解的渐近性态。

如同文[1]，取状态空间 $E=L[0,r_m)\times L[0,r_m)$，$E_+=L_+[0,r_m)\times L_+[0,r_m)$，则$(E,E_+,\|\cdot\|)$构成序 Banach 空间。在空间 E 中定义算子 $A:D(A)\subset E\to E$，$B:E\to E$ 如下：

$$\begin{aligned}
&A\varphi=\begin{bmatrix}-\frac{\partial}{\partial r}\varphi_1(r)-[\mu(r)+\delta(r)]\varphi_1(r)+\sigma(r)\varphi_2(r)\\-\frac{\partial}{\partial r}\varphi_2(r)-[\bar{\mu}(r)+\sigma(r)]\varphi_2(r)+\delta(r)\varphi_1(r)\end{bmatrix}\\
&B\varphi=\begin{bmatrix}\beta\int_{r_1}^{r_2}h(r)k(r)\varphi_1(r)dr+\bar{\beta}\int_{r_1}^{r_2}\bar{h}(r)\bar{k}(r)\varphi_2(r)dr\\ \alpha\int_{r_1}^{r_2}h(r)k(r)\varphi_1(r)dr+\bar{\alpha}\int_{r_1}^{r_2}\bar{h}(r)\bar{k}(r)\varphi_2(r)dr\end{bmatrix}
\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $\varphi(r)=(\varphi_1(r),\varphi_2(r))^T\in E$，$D(A)=\{\varphi\in E:\varphi_1(r),\varphi_2(r)$绝对连续且 $A\varphi\in E$，$\varphi(0)=B\varphi\}$，则系统(1)等价于如下抽象的初边值问题：

* 国家自然科学基金资助课题

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = AU(t), U(0) = U_0 \equiv (V_0(r), W_0(r))^T & (AOP) \\ \lim\limits_{r \to r_m} U(r,t) = 0 \end{cases}$$

保留[1]的假设 ii),iii)。由[1]知,(1)的解存在且唯一,算子 A 生成正 C_0 半群 $E(t)$,$(t \geqslant 0)$,若记 $\lambda^* = \min\{\operatorname*{essinf}\limits_{r \in [r_1, r_2]} \mu(r), \{\operatorname*{essinf}\limits_{r \in [r_1, r_2]} \bar{\mu}(r)\}$ 则 $\{\lambda \in C: \mathrm{Re}\lambda > \frac{\ln\|B\| + r_2}{r_1} - \lambda^*\} \subset \rho(A)$(这里 $\rho(A)$ 为 A 的预解集)。

众所周知,线性系统 $\dot{U}(t) = AU(t)$,$U(0) = x$ 的渐近性态与系数算子 A 的谱分布密切相关,这种关系对于有限维系统来说是简单的,而对无穷维系统来说就复杂得多。本文通过对残疾人口算子 A 的谱分析,应用 C_0 半群的谱映象定理来刻划残疾人口系统(1)的渐近性态。

二、渐近性态

引理 1[3] 设 $A: D(A) \subset E \to E$ 是任一线性闭算子,$0 \neq \lambda_0 \in \rho(A)$,则 $\{\lambda_0 - \frac{1}{\lambda}: \lambda \in P_\sigma(\lambda I - A)^{-1}\} \subseteq P_\sigma(A) \subseteq \{\lambda_0 - \frac{1}{\lambda}: \lambda \in P_\sigma((\lambda I - A)^{-1}\} \cup \{0\}$ 其中 $P_\sigma(A)$ 为 A 的特征谱集)。

注:若 $P_\sigma((\lambda I - A)^{-1}) = \sigma((\lambda I - A)^{-1})$ 则易证 $\sigma(A) \subseteq P_\sigma(A) \cup \{0\}$。

引理 2 残疾人口算子 A 最多有可数多个本征值,每个本征值具有有限重数,并且 $\sigma(A) \subseteq P_\sigma(A) \cup \{0\}$

证明 任取 $\lambda_1 > \frac{\ln\|B\| + r_2}{r_1} - \lambda^*$,$g(r) \in E$,则由[1]

$$\begin{cases} ((\lambda_1 I - A)^{-1} g)(r) = \exp(\int_0^r [\Delta(\lambda t) + F(t)] dt)(C \\ + \int_0^r \exp\left\{-\int_0^t [\Delta(\lambda, s) + F(s)]\right\} g(t) dt) \\ c \triangleq (c_1, c_2)^T = (I - B\exp(\int_0^r [\Delta(\lambda t) + F(t)] dt))^{-1} B \int_0^r \exp(\int_t^r [\Delta(\lambda, \delta) + F(s)] ds) g(t) dt \end{cases}$$

其中 $\Delta(\lambda, r) = \begin{pmatrix} -\lambda - \mu(r) & 0 \\ 0 & -\lambda - \bar{\mu}(r) \end{pmatrix}$, $F(r) = \begin{pmatrix} -\delta(r) & \sigma(r) \\ \delta(r) & -\sigma(r) \end{pmatrix}$

经整理可得

$$((\lambda I - A)^{-1} g)(r) = \int_0^r \exp(\int_t^r [\Delta(\lambda, s) + F(s)] ds) g(t) dt$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \exp\int_0^r \Delta (B\exp(\int_0^r \Delta))^k B \int_0^r \exp(\int_t^r [\Delta((\lambda, s) + F(s)]) ds\, g(t) dt \quad (3)$$

其中
$$\int_0^r \Delta = \int_0^r [\Delta(\lambda, s) + F(s) ds$$

若定义算子 $K(\lambda): E \to E$, $K(\lambda)\varphi = \int_0^r \exp(\int_t^r [\Delta(\lambda, \delta) + F(s)] ds)\, \varphi(t) dt$,则由[1]知 $K(\lambda)$ 是紧算子,从而 $(\lambda I - A)^{-1} = K(\lambda) + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp(\int_0^r \Delta (B\exp(\int_0^r \Delta)^n) K(\lambda)$ 是紧算子,由紧算子谱性质及引理 1 知本引理成立。

引理 3 $(E, E_+, \|\cdot\|)$ 是 AL—空间,即对任意的 $g_1, g_2 \in E_+$, $\|g_1 + g_2\| = \|g_1\| + \|$

$g_2\|$。证明略。

定理 1　若 $r_0 \triangleq \dfrac{\ln\|B\| + r_2}{r_1} - \lambda^* < 0$，则系统(1)零解是一致指数渐近稳定的，即存在 $\omega < 0, M > 0$，若 $(V(r,t), W(r,t))^T$ 是系统(1)的对应于初始分布 $(V_0(r), W_0(r))^T$ 的解，则

$$\int_0^{r_m} |V(r,t)|dr + \int_0^{r_m} |W(r,t)|dr \leqslant Me^{\omega t}\left(\int_0^{r_m} |V_0(r)|dr + \int_0^{r_m} |W_0(r)|dr\right)$$

证明　由[1]知 A 生成正 C_0 半群 $E(t)$，由引理 3 知 C_0 半群的谱映象定理成立，即 $\omega(A) = r_s(A)$（其中 $\omega(A)$ 为 $E(t)$ 的增长阶，$r_s(A)$ 为 A 的谱界），再由文[1]之引理 2 知 $r\sigma(A) < r_0$，故 $\int_0^{r_m} |V(r,t)|dr + \int_0^{r_m} |W(r,t)|dr = \|T(t)(V_0(r), w_0(r))^T\|_B \leqslant Me^{r_0 t}\left(\int_0^{r_m} |V_0(r)|dr + \int_0^{r_m} |W_0(r)|dr\right)$，取 $w = r_0 < 0$ 即可，证毕。

引理 4　在复平面上任意平行于虚轴的带中仅有有限多个 A 的本征值。（证明略）

由引理 2 及引理 4，我们可以将 A 的本征值按实部大小作排列 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_k, \cdots$，其中，$\mathrm{Re}\lambda_k \geqslant \mathrm{Re}\lambda_{k+1}, k = 0, 1, 2, \cdots$，设 $\mathrm{Re}\lambda_m > \mathrm{Re}\lambda_{m+1}$，取 $a_1 \neq 0$，使得 $\mathrm{Re}\lambda_m > a_1 > \mathrm{Re}\lambda_{m+1}$，则在垂直线 $\mathrm{Re}\lambda = a_1$ 上没有 A 的谱点。另外由 C_0 半群的 Laplace 反演：

$$T(t)g = \frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty} e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1} g\, d\lambda \qquad g \in D(A), \qquad r > r_0 \tag{4}$$

取 τ_0 充分大使 $\tau_0 > \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant m}\{|\mathrm{Im}\,\lambda_i|\}$，则 $(\lambda I - A)^{-1}$ 在区域：$a_1 \leqslant \mathrm{Re}\lambda < \gamma, |\mathrm{Im}\lambda| \geqslant \tau_0$ 中解析，对(6)平移积分路径：

$$\begin{aligned} T(t)g = & \sum_{k=0}^{m} \underset{\lambda=\lambda_k}{\mathrm{Residue}}[e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1} g] \\ & + \lim_{\tau_0 \to \infty}\Big\{\frac{1}{2\pi i} e^{a_1 t}\int_{-\tau_0}^{\tau_0} e^{i\tau t}((a_1 + i\tau)I - A)^{-1} g\, d\tau \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{a_1}^{r} e^{(s+i\tau_0)t}((s + i\tau_0)I - A)^{-1} g\, ds \\ & + \frac{1}{2\pi i}\int_{r}^{a_1} e^{(s-i\tau_0)t}((s + i\tau_0)I - A)^{-1}) g\, ds\Big\} \end{aligned}$$

定理 2　设 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_m, \lambda_{m+1}, \cdots$ 是残疾人口算子 A 的所有本征值，$\mathrm{Re}\lambda_i \geqslant \mathrm{Re}\lambda_{i+1}, i = 0, 1, 2, \cdots, \mathrm{Re}\lambda_m > \mathrm{Re}\lambda_{m+1}$，若 $(V(r,t), W(r,t))^T$ 是系统(1)对应初始分布 $(V_0(r,t), W_0(r,t))^T \in D(A)$ 的分布，则

$$(V(r,t), W(r,t))^T = \sum_{k=0}^{m} \underset{\lambda=\lambda_k}{\mathrm{Residue}}(\lambda I - A)^{-1} e^{\lambda t}(V_0(r), W_0(r))^T + o(e^{a_1 t}),$$

（其中 $\mathrm{Re}\lambda_m > a_1 > \mathrm{Re}\lambda_{m+1}$），当 t 充分大时对任意 $r \in [0, r_m)$ 成立

证明　因为 $(V(r,t), W(r,t))^T = T(t)(V_0(r), W_0(r))^T$，应用 Riemann 积分定理，易于验证(4)式中的第三、四项为零(t 充分大)，另外，记 $(V_0(r), W_0(r))^T = g_0(r)$

$$\begin{aligned} & \int_{-\tau_0}^{\tau_0} e^{i\tau t}((a_1 + i\tau)I - A)^{-1} g_0(r)\, d\tau \\ & = \int_0^r \exp\left(\int_s^r [\Delta(a_1, x) + F(x)]dx\right)\int_{-\tau_0}^{\tau_0} e^{i\tau(t-r+s)} d\tau\, g_0(s)\, ds \\ & + \int_{-\tau_0}^{\tau_0} e^{i\tau t}\exp\left(\int_0^r \Delta\right)\left(I - B\exp\int_0^{r} \Delta\right)^{-1} B\int_s^{r}\exp\left(\int_0^{s} \Delta\right) g_0(s)\, ds\, d\tau \triangleq T_1 + T_2 \end{aligned}$$

明显地，$|T_1| < \dfrac{4}{t}\displaystyle\int_0^r \exp\left(\int_s^r [\Delta(a_1, x) + F(x)]dx\right) g_0(s)\, ds$，当 t 充分大时处处成立。

$$T_2 = \frac{\tau_0}{i\tau_0(t-r)}[e^{i\tau_0 t}G(a_1 + i\tau_0, r) - e^{-i\tau_0 t}G(a_1 - i\tau_0, r)]$$

$$- \frac{\tau_0}{i\tau_0(t-r)}\int_{-1}^{1} e^{i\tau_0 \tau(t-r)} G_\tau'\ (a_1 + i\tau_0\tau, r)d\tau$$

其中，$G(a_1+i\tau,r)=\exp(\int_0^r[\Delta(a_1,s)+F(s)]ds)\ (I-B\ \exp(\int_0^r \Delta))^{-1}B\int_0^r \exp\ (\int_s^r \Delta)\ g_0(s)ds$ 注意到 $g_0(r)\in D(A)$ 绝对连续且 $g_0'(r)\in E$，$G_\tau'(a_1+i\tau_0\tau,r)$ 是关于 r 的一个积分式，利用分部积分及 Reimann 积分定理，最终可得到估计式：

$$|T_2| < \frac{1}{t}M(r), \qquad t \text{ 充分大}, \tau_0 \to \infty$$

其中 $M(r)$ 关于 r 本性有界，将 T_1，T_2 的估计式代入(4)式可得(5)成立，证毕。

注 相似于人口系统，如果能证明 A 是严格占优本征值存在[2]，则由定理 1，残疾人口分布可以在占优本征值处展开——这个一个非常简单的渐近展开，限于篇幅，我们将另文探讨这个问题。

参 考 文 献

[1] 彭济根、李惜雯：残疾人口系统的适定性(投本次大会论文集)

[2] 李惜雯、周义仓，工程数学学报，Vol 11. N0. 3. (1994)

[3] Taylor. A. E. An Introduction to Functional Analysis, New York, John Wiley & Sons, Inc. 1958

[4] 宋键、于景元等，中国科学，A 辑，No. 2 (1986)，PP113—123

The Asymptotic Behaviors of Disabled Population System

Li Xiwen　　Peng Jigen

(Department of Mathematics, Xi' an Jiaotong Unversity, Xi' an 710049)

Abstract This paper studies the asymptotic behaviors of disabled population systems by the analysis of the spectrum of disabled population operator, therefore, some results about the stability and the saymptotic expansion of the disabled population system are given.

Keywords Disabled population operator, Eigenvalue Stability