科 学 通 报
第 39 卷 第 10 期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1994 年 5 月

连续函数空间中具零边界的非稳态迁移方程解的存在唯一性 *

彭济根 王绵森 朱广田

(西安交通大学数学系，西安 710049) (中国科学院系统科学研究所，北京 100080)

关键词 具零边界的非稳态迁移方程、存在唯一性

在某些情况下有必要将中子迁移方程置于连续函数空间中进行研究(例如研究离散纵标法的合理性)．用于研究非稳态的迁移方程的传统数学工具是算子半群理论．然而，在连续函数空间中，对于具零边界的非稳态方程，迁移算子 A 的正则集为空集（文中引理 1 显示这一点)，因此 A 不生成 C_0-半群或积分半群．针对这种情况，本文引进了一种新的方法，证明了具零边界的非稳态迁移方程连续解的存在唯一性，并给出了解的表示.

考虑如下具有零边界、连续能变、具各向异性散射和裂变的平板模型的中子迁移方程 (1.1)— (1.4)：

$$\frac{\partial N(x,v,u,t)}{\partial t}=-v\mu\frac{\partial N(x,v,\mu,t)}{\partial x}-v\sum(x,v)N(x,v,\mu,t)$$
$$+\int_0^{v_M}\int_{-1}^{1}K(x,v,v',\mu,\mu')N(x,v',\mu',t)\mathrm{d}\mu'\mathrm{d}v', \tag{1.1}$$

$$N(-a,v,\mu,t)=0,\ 0<\mu\leqslant 1, \tag{1.2}$$

$$N(a,v,\mu,t)=0\quad -1\leqslant\mu<0, \tag{1.3}$$

$$N(x,v,\mu,0)=N_0(x,v,\mu), \tag{1.4}$$

其中 $N(x,v,\mu,t)$, $\sum(x,u)$, $k(x,v,v',\mu,\mu')$的物理意义见文献[1].

设 $v\sum(x,v)$, $k(x,v,v',\mu,\mu')$ 分别是$[-a,a]\times[0,v_M]$和$[-a,a]\times[0,v_m]\times[0,v_M]\times[-1,1]\times[-1,1]$上的非负连续函数．记 $\Omega=[-a,a]\times[0,v_M]\times[-1,1]$, $C(\Omega)$ 记为 Ω 上的连续函数全体赋以极大范数而构成的 Banach 空间，$C_0(\Omega)=\{f\in C(\Omega): f(-a,v,\mu)=f(a,v,-\mu)=0,\ \mu=0\}$. 在 $C(\Omega)$ 中定义如下算子:

$$B\cdot\ =-v\mu\frac{\partial}{\partial x}\ \cdot-v\sum(x,v)\cdot\ ,$$

$$K\cdot\ =\int_0^{v_M}\int_{-1}^{1}k(x,v,v',\mu,\mu')\cdot\ \mathrm{d}\mu'\mathrm{d}v', \tag{1.5}$$

$$A\ \cdot=B\cdot+K\cdot\ ,$$

1993-04-05 收稿．
* 国家自然科学基金资助项目．

其中 $D(A)=D(B)=\{(x,v,\mu)\in C(\Omega): BN\in C(\Omega), N(-a,v,\mu)=N(a,v,-\mu)=0, 0\leqslant\mu\leqslant 1\}, D(K)=C(\Omega)$.
则迁移方程(1.1)—(1.4)等价于如下抽象 Cauchy 问题:

$$N'(t)=AN(t),\ N=N_0(x,v,\mu). \tag{1.6}$$

定理 1　设 $F(\lambda)\in C(0,\infty)$, 如果 $F(\lambda)$ 满足 $|\lambda F(\lambda)|<M_1$ 且

$$M_2\overset{\Delta}{=}\mathrm{Sup}\left\{\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{nj}\lambda F(\lambda j)\right|:\lambda>0,\ n\text{ 充分大}\right\}<\infty,$$

则存在 $f(\cdot)\in L^{\infty}(0,\ \infty)$ 使得

$$F(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t,\ \otimes\lambda>0.$$

证　设 $f(t)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{nj}\cdot\frac{n}{t}F(\frac{nj}{t})$, 则由条件知$\{f_n(\cdot)\}\subset L^{\infty}(0,\ \infty)$是有界序列, 因此 $L^{\infty}(0,\ \infty)$ 作为 $L^1(0,\ \infty)$ 的对偶空间, $\{f_n\}$存在子序列$\{f_{nk}\}$弱 * 收敛于某个函数 $f(t)\in L^{\infty}(0,\ \infty)$. 特别地, $\otimes\lambda>0$, $\int_0^{\infty}f_{n_k}(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\to\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\quad(n_k\to\infty)$.

另一方面, 对任意充分大的 n, 由 Fubini 定理, $\otimes\lambda>0$,

$$\int_0^{\infty}f_n(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{nj}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\cdot\frac{n}{t}F\left(\frac{nj}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\infty}\exp(-e^{n(1-\lambda t)})e^{n(1-\lambda t)}\cdot\frac{n}{t}F\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-n}^{\infty}\exp(-e^{-r})e^{-r}\cdot\frac{n}{r+n}F\left(\frac{\lambda n}{r+n}\right)\mathrm{d}r.$$

注意到条件及应用 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}fn(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-e^{-r})e^{-r}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+r}F\left(\frac{\lambda n}{r+n}\right)\mathrm{d}r$$

$$=F(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-e^{-r})e^{-r}\mathrm{d}r=F(\lambda).$$

于是, 定理到此得证.

推论 1　设 E 是任意 Banach 空间, 若 $F(\lambda)\in C((0,\ \infty),\ E)$ 满足条件: $\|\lambda F(\lambda)\|\leqslant M_1<\infty$ 且

$$M_2\overset{\Delta}{=}\mathrm{Sup}\left\{\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{nj}\lambda F(\lambda j)\right\|:\lambda>0,\ n\text{ 充分大}\right\}<\infty,$$

则存在函 $\alpha(t):[0,\ \infty)\to E,\ \alpha(0)=0,\ \|\alpha(t+h)-\alpha(t)\|\leqslant M_2h$ 使得

$$F(\lambda)=\lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\alpha(t)\,\mathrm{d}t,\ \ \lambda>0. \tag{1.7}$$

引理 1　$\rho(B)=\phi$. 若记 $\lambda^*=\inf\{v\sum(k,v):(x,v)\in[-a,a]\times[0,v_M]\}$, 则当 $\lambda>-\lambda^*$ 时, $\lambda\in\sigma_r(B)$ (剩余谱)且值域 $\mathscr{R}(\lambda-B)=C_0(\Omega)$.

证　设 $g(x,v,\mu)\in C(\Omega)$, 解方程 $(\lambda-B)f=g$ 得[1]

$$f(x,v,\mu)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-a}^{x}\exp\left[-\frac{1}{v\mu}\int_{x'}^{x}(\lambda+v\sum(r,v))\,dr\right]\frac{g(x',v,\mu)}{v\mu}\,\mathrm{d}x',\ \ \mu>0,\\[2ex] \displaystyle\frac{1}{\lambda+v\sum(x,v)}\,g(x,v,0),\ \ \mu=0,\\[2ex] \displaystyle\int_{x}^{a}\exp\left[\frac{1}{v\mu}\int_{x}^{x'}(\lambda+v\sum(r,v))\,\mathrm{d}r\right]\frac{g(x',v,\mu)}{-v\mu}\,\mathrm{d}x',\ \ \mu<0.\end{cases} \tag{1.8}$$

明显地, 只有 $g(\pm a,v,0)=0$ 时, 才能保证 $f(x,v,\mu)$ 在点 $(a,v,0)$ 和 $(-a,v,0)$ $(v\in[0,v_M])$ 处连续, 因此值域 $\mathscr{R}(\lambda-B)\subseteq C_0(\Omega)$, 从而 $\rho(B)=\phi$. 当 $\lambda>-\lambda^*$ 时, 若 $g\in C_0(\Omega)$, 则可以证明由(1.8)式给出的 f 在 Ω 中连续, 即 $f\in D(B)$, 于是 $\mathscr{R}(\lambda-B)=C_0(\Omega)$.

对(1.8)式进行适当的估计易得如下引理.

引理 2　设 $g\in C_0(\Omega)$, 记 $F(\lambda)=(\lambda-B)^{-1}g(\otimes\lambda>-\lambda^*)$, 则 $F(\lambda)$ 满足定理 1 的条件, 且其中 $M=\|g\|$.

引理 3[2]　设 $F(\lambda)=\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\alpha(t)\,\mathrm{d}t(\lambda>0)$, $\alpha(t):[0,\infty)\to E$, $\alpha(0)=0$, $\|\alpha(t+h)-\alpha(t)\|\leqslant Mh$ $(t,h\geqslant 0)$, 则 $\otimes t\geqslant 0$,

$$\alpha(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\cdot\frac{1}{j!}e^{njt}F(nj),\ \ (t\geqslant 0).$$

引理 4　设 $K(D(A))\subset C_0(\Omega)$, 则当 $\lambda>\|K\|\lambda^*$ 时, $\lambda\in\sigma_r(A)$, $(\lambda-A)^{-1}\in L(C_0(\Omega),C(\Omega))$ 且

$$\|(\lambda-A)^{-1}\|\leqslant\|(\lambda-A)^{-1}\|/(1-\|K\|\cdot\|(\lambda-B)^{-1}\|).$$

证　注意到 $C_0(\Omega)$ 是 $C(\Omega)$ 的子 **Banach** 空间, 由引理 1 及文献[3] Theorem 1.16, 即得引理成立.

定理 2　若初值 $N_0(x,v,\mu)\in D(B^2)\cap C_0(\Omega)$, 则迁移方程(1.1)—(1.4)存在唯一解 $N(x,v,\mu,t)$, 且 $\otimes t\geqslant 0$,

$$N(x,v,\mu,t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}e^{njt}(nj-A)^{-1}N_0(x,v,\mu). \tag{1.9}$$

证　由引理 2 及推论 1, 任给 $g\in C_0(\Omega)$, 存在 $\alpha(t,g):[0,\infty)\to C(\Omega)$, $\alpha(0,g)=0$, $\|\alpha(t+h,g)-\alpha(t,g)\|\leqslant\|g\|\cdot h$ $(t,h\geqslant 0)$ 使

$$(\lambda-B)^{-1}g=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{d}\alpha(t,g),\ \ \otimes\lambda>0>-\lambda^*.$$

令 $S(t)g=\alpha(t, g)$, 则由变换的唯一性易得证, $S(t)$ 是 $C_0(\Omega)$ 上的有界线性算子, 即 $S(t)\in L(C_0(\Omega), C(\Omega))$ (t 固定). 注意到 $D(B)$ 中的边界条件, $K(D(B))\subseteq C_0(\Omega)$, 于是由引理 4, 当 $\lambda>\|K\|-\lambda^*$ 时, $(\lambda-A)^{-1}\in L(C_0(\Omega),C(\Omega)), K(\lambda-B)^{-1}\in L(C_0(\Omega))$ 且 $\|K(\lambda-B)^{-1}\|\leqslant \dfrac{\|K\|}{\lambda+\lambda^*}<1$. 另外, 任给 $n\in N$, $g\in C_0(\Omega)$.

$$[(\lambda-A)^{-1}g]^{(n)}=[(\lambda-B)^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}(K(\lambda-B)^{-1})^l g]^{(n)}$$

$$=\int_0^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(-t)^j C_n^j e^{-\lambda t}\mathrm{d}S(t)\left[\sum_{l=0}^{\infty}(K(\lambda-B)^{-1})^l g\right]^{(n-j)}$$

将上式展开进行估计可得

$$M\overset{\Delta}{=}\mathrm{Sup}\left\{\frac{1}{n!}(\lambda+\lambda^*-\|K\|)^{n+1}\|[(\lambda-A)^{-1}g]^{(n)}\|: n\in N,\ \lambda>\|K\|-\lambda^*+1\right\}<\infty.$$

于是由文献[4] Theorem 1.1, 存在 $u(t, g):[0, \infty)\to C(\Omega)$, $u(0, g)=0$, $\|u(t+h, g)-u(t, g)\|\leqslant Me^{wt}(\omega>-\lambda^*+\|K\|+1)$, 使得

$$(\lambda-A)^{-1}g=\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}u(t, g)\,\mathrm{d}t,\ \lambda>\omega.$$

由定理中初值条件, 令 $N(x, v, \mu, t)=u(t, AN_0)+N_0$, 则

$$(\lambda-A)^{-1}N_0=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}N(x, v, \mu, t)\,\mathrm{d}t,\ \lambda>\omega.$$

由 Laplace 变换唯一性, 易证 $u(t, AN_0)=\int_0^t(u(r, A^2N_0)+AN_0)\,\mathrm{d}r$, 于是 $N(x, v, \mu, t)=u(t, AN_0)+N_0$ 连续可微, 且 $N(x, v, \mu, 0)=N_0$. 另外, 由 A 的闭性及引理 3, $u(t, A^2N_0)=Au(t, AN_0)$, 于是, $N'(x, v, \mu, t)=AN(x, v, \mu, t)$. 从而 $N(x, v, \mu, t)$ 是方程的解, 并且由 Laplace 变换的唯一性知解 $N(x, v, \mu, t)$ 是唯一的. (1.9) 式由引理 3 即可得. 证毕.

参　考　文　献

[1] Yang Minzhu, Zhu Guang-tian, *Progress in Nuclear Energy*, 1982, **8**: 269—282.

[2] Neubrander, F., Hennig, B., *Semesterbericht Funktionalanalysis*, Tübingen, Wintersemster, 1989/1990, 85—107.

[3] Kato, T., *Perturbation Theory for Linear Operator*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[4] Arendt, W., *Isreal J. Math.*, 1987, **59**(3): 327—352.