(14)

数 学 年 刊
21A: 3(2000),325-330.

Korovkin 定理的推广与算子半群的渐近性**

彭济根*　徐宗本*

提　要

本文探讨常数函数在 Korovkin 定理中的作用，并由此将 Korovkin 定理由连续函数空间推广到 $L^p(\Omega)$ 空间 (其中 $\Omega=[a,b]$ 或 (a,b)). 这个推广的重要性之一在于：L^p 空间上的每个一致有界正算子半群的渐近稳定性完全由三个简单函数 c, $c\cdot id$, $c\cdot id^2$ (其中 $c\in L^p$ 为任意一个满足 $\operatorname*{ess\,inf}_{r\in\Omega} c(r)>0$ 的函数，$id(r)=r$, $id^2(r)=r^2$, $r\in\Omega$) 所决定，由此，本文给出了 L^p 上正算子半群渐近稳定的一些新的判别准则.

关键词 Korovkin 定理，正算子，检验泛函，正算子半群，渐近稳定性
MR (1991) 主题分类 47D06, 34B40
中图法分类 O175, O177.3　**文献标识码** A
文章编号 1000-8314(2000)03-0325-06

§1. 引　言

设 X 为紧度量空间，$C(X)$ 为 X 上的实值连续函数全体赋予极大范数而构成的 Banach 空间. 线性算子 $L: C(X)\to C(X)$ 称为正的 (记为 $L\geq 0$), 如果 $f\geq 0$ 蕴含 $Lf\geq 0$.

设 C^* 为 $C(X)$ 的对偶空间，Γ 为 $C(X)$ 的子集. 取定 $x\in X$, 定义 $J_x: C(X)\to R$, $J_x(f)=f(x)$. 明显地 $J_x\in C^*$ 且 $J_x\geq 0$. 正线性泛函 $\mu\in C^*$ 称为 $x\in X$ 的相应于 Γ 的检验泛函，如果 $\mu|_\Gamma=J_x|_\Gamma$ (其中 $\mu|_\Gamma$ 表示 μ 在 Γ 上的限制).

若 $X=[a,b]$, 记 e 和 id 分别为 $C[a,b]$ 上的常数函数和单位函数 (即 $e(x)\equiv 1$; $id(x)=x$, $x\in[a,b]$). Korovkin[1] 与 Bauer[2,Theorem 2] 分别对 $C[a,b]$ 与 $C(X)$ 上的正线性算子列的收敛性证明了重要而有趣的定理.

Korovkin 定理表明，要判断 $C[a,b]$ 上的正线性算子列是否强收敛于单位算子，只需检验其在子集 $\{e,id,id^2\}$ 上的收敛性. 而 Bauer 定理则进一步揭示了：对于一般的连续函数空间 $C(X)$, 如何选取这样的子集 Γ 使其具有与 $\{e,id,id^2\}$ 同样的作用.

值得注意的是，无论是 Korovkin 定理，还是 Bauer 定理，它们对检验集 Γ 都有一个共同的假设：$e\in\Gamma$. 事实上，因为 Bauer 定理的证明 [2] 运用了 Choquet 边界理论 [4], 因此，其本质地依赖于这个假设.

一个自然的问题是，$e\in\Gamma$ 在以上定理中起什么作用？本文将给以圆满的回答.

本文 1998 年 10 月 13 日收到，1999 年 9 月 23 日收到修改稿.
*西安交通大学理学院信息与系统科学研究所，西安 710049.
E-mail: pengjgn@263.net; zbxu@mail.xjtu.edu.cn
**西安交通大学科学研究基金与理科基金资助的项目.

另外, 由 X 的紧性易知 [3], 若正线性算子序列 $\{L_n\}$ 满足 $\|L_ne-e\|\to 0$, 则 $\|L_n\|\to 1$, 从而算子序列 $\{L_n\}$ 一致有界 (即, 存在常数 $M>0$ 使 $\forall n\in N$, $\|L_n\|\le M$). 由此可知, $e\in\Gamma$ 蕴含: 每个在 Γ 上收敛的正线性算子序列都是一致有界的.

基于这样的认识, 本文将 Korovkin 定理由连续函数空间推广到了 L^p 空间. 这一推广为刻画 L^p 上的一致有界正算子半群的渐近稳定性提供了极为简便的方法.

§2. 常数函数对 Bauer 定理的贡献

设 $m\in C(X)$. 若 $\forall x\in X$, $m(x)>0$, 则以下称 m 是常正的. 由于 X 是紧的, 因此, 若 m 常正, 则存在 $\alpha>0$ 使 $\forall x\in X$, $m(x)\ge\alpha$. 正如 Bauer[2] 所指出, 假设 "存在常正函数 $m\in\Gamma$" 与 "$e\in\Gamma$" 是等价的. 事实上, 只需令 $\Gamma^*=\{f/m:f\in\Gamma\}$, 并对所考虑的正算子列 $\{L_n\}$ 作如下变换

$$L_n^*f=\frac{1}{m}L_n(m\cdot f),\quad \forall f\in C(X).$$

定理 2.1 若 Bauer 定理中的两条件有一个成立, 则必存在常正函数 $m\in\overline{\mathrm{Span}(\Gamma)}$ (其中 $\overline{\mathrm{Span}(\Gamma)}$ 表示 Γ 的线性扩张闭包).

证 反证. 假设 $\overline{\mathrm{Span}(\Gamma)}$ 中不存在常正函数. 令 $Y=\mathrm{Span}(\{e\}\cup\overline{\mathrm{Span}(\Gamma)})$, 并定义泛函 $v:Y\to R$ 如下

$$v(f)=\alpha,\quad f=\alpha e+g,\quad g\in\overline{\mathrm{Span}(\Gamma)}$$

则 v 是子空间 Y 上的有界线性泛函, 且 $v(\overline{\mathrm{Span}(\Gamma)})=\{0\}$. 下证 v 是正的.

明显地, v 分别限制在 $\mathrm{Span}\{e\}$ 与 $\mathrm{Span}(\Gamma)$ 上是正的. 另外, 因为 $\overline{\mathrm{Span}(\Gamma)}$ 中不存在常正函数, 所以不存在 $\lambda>0$ 与 $g\in\overline{\mathrm{Span}(\Gamma)}$, 使 $g\ge\lambda e$. 由此易知, $\alpha e+g\ge 0$ $(g\in\overline{\mathrm{Span}(\Gamma)})\Longrightarrow\alpha\ge 0$. 从而 v 在 Y 上是正的.

由于 $e\in Y$, 因此由 Kantorovich 定理 [3,Corollary 1. 5. 9] 知, v 可延拓至 $C(X)$ (记为 $\overline{v}$), 且 $\overline{v}\ge 0$. $\forall x\in X$, 令 $\mu=\overline{v}+J_x$, 则 $\mu\in C^*$ 且为 x 的相应于 Γ 的检验泛函, 但 $\mu\ne J_x$. 因此, Bauer 定理的充分条件不成立.

另外, 定义

$$L_n:C(X)\to C(X),\quad L_nf=\overline{v}(f)e+\frac{n}{n+1}f,\ f\in C(X).$$

显然 $L_n\ge 0$, 且 $\forall f\in\Gamma$,

$$L_nf=\frac{n}{n+1}f\to f.$$

但 $L_ne\to 2e$. 即知 Bauer 定理的必要条件也不成立, 矛盾.

注 2.1 注意到, $C(X)$ 中的任何一致有界正算子序列在子集 Γ 上与其在子空间 $\overline{\mathrm{Span}\Gamma}$ 上的收敛性是等价的, 因此, 定理 2.1 的意义在于: 它表明常数函数 (或常正函数) 在 Bauer 定理中的作用是本质的.

正如引言中所指明的, 若 $C(X)$ 中的正线性算子序列作用在常数函数 (一般地, 常正函数) 上是收敛的, 则该算子序列是一致有界的. 基于这种认识, 我们不假设 $e\in\Gamma$, 而直接考察 $C(X)$ 上的一致有界的正算子序列. 由此, 有以下结论.

定理 2.2 设 $\forall x\in X$, 唯有 J_x 为 x 的相应于 Γ 的检验泛函, $\{L_n\}$ 为任意正算子

列. 若 $\{L_n\}$ 有界, 且 $\forall f\in\Gamma$, $\|L_nf-f\|\to 0$, 则 $\forall f\in C(X)$,

$$\|L_nf-f\|\to 0.$$

证 设序列 $\{L_n\}$ 有界, 且 $\forall f\in\Gamma$, $\|L_nf-f\|\to 0$. 取定 $f\in C(X)$. $\forall x\in X$, 记

$$\alpha(x)=\lim_{n\to\infty}\inf(L_nf)(x),\quad \beta(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}(L_nf)(x),$$

下证

$$[\alpha(x),\beta(x)]\subset\{\mu(f):\mu\text{ 为}x\text{ 的相应于}\Gamma\text{ 的检验泛函}\}\tag{2.1}$$

$\forall\alpha\in[\alpha(x),\beta(x)]$, 定义 $\mu:\{\lambda f:\lambda\in R\}\to R$, $\mu(\lambda f)=\lambda\alpha$; $P:C(X)\to R$, $P(g)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(L_ng)(x)$, 则易知 P 为正齐次次可加凸泛函, 且 $\forall\lambda\in R$, $\mu(\lambda f)\le P(\lambda f)$. 于是, μ 可延拓到整个空间 $C(X)$ 上 (仍记为 μ), 且

$$\mu(g)\le P(g)\ (\forall g\in C(X)).$$

设 $g\ge 0$, 因为 $\mu(-g)\le P(-g)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}L_n(-g)(x)\le 0$, 所以 $\mu(g)\ge 0$, 即 μ 为正泛函. 另外, 由于 $\{L_n\}$ 是 Γ 允许的, 因此 $\forall g\in\Gamma$,

$$P(g)=\overline{\lim_{n\to\infty}}(L_ng)(x)=g(x)=J_x(g),$$

即得 $\mu(g)\le J_x(g)$. 又因为

$$\mu(-g)\le P(-g)=\overline{\lim_{n\to\infty}}(L_n(-g))(x)=-g(x)=-J_x(g),$$

所以, $\mu(g)=J_x(g)$, 即 μ 为 x 的相应于 Γ 的检验泛函, 且 $\mu(f)=\alpha$. 于是 (2.1) 成立.

由于只有 J_x 为相应于 Γ 的检验泛函, 所以 $\mu=J_x$. 从而 $\alpha(x)=\beta(x)=\alpha=J_x(f)=f(x)$, 即, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(L_nf)(x)$ 存在, 且等于 $f(x)$. 下证 $L_nf\to f$.

假设 L_nf 不收敛于 f, 则由 X 的紧性知, 存在 $\epsilon>0$ 及序列 $\{x_n\}$, 使得

$$|(L_nf)(x_n)-f(x_n)|>\epsilon.\tag{2.2}$$

不妨设 $x_n\to x_0$. 取 $\alpha\in\Big[\lim\limits_{n\to\infty}\inf(L_nf)(x_n),\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(L_nf)(x_n)\Big]$, 并定义

$$\mu:\{\lambda f:\lambda\in R\}\to R,\quad \mu(\lambda f)=\lambda\alpha;\quad P:C(X)\to R,\quad P(g)=\overline{\lim_{n\to\infty}}(L_nf)(x_n).$$

同样的方法可证, μ 是 x_0 的相应于 Γ 的检验泛函, 即 $\mu=J_{x_0}$, 且 $\alpha=\mu(f)=f(x_0)$. 于是, 由 α 的任意性知, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(L_nf)(x_n)$ 存在, 且等于 $f(x_0)$. 又因为 $f(x_n)\to f(x_0)$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}|(L_nf)(x_n)-f(x_n)|=0.$$

这与 (2.2) 相矛盾.

§3. Korovkin 定理的推广

设 $1\le p<\infty$, $-\infty<a,b<\infty$, $L^p[a,b]$ 中的范数记为 $\|\cdot\|_p$. 熟知, $\|\cdot\|_p$ 是单调的.

定理 3.1 设 $L^p[a,b]$ 上的正有界线性算子列 $\{L_n\}$ 有界. 若 $\forall f\in\{e,id,id^2\}$, $\|L_nf-f\|_p\to 0$, 则 $\forall f\in L^p[a,b]$, $\|L_nf-f\|_p\to 0\ (n\to\infty)$.

证 $\forall k\in N$, 定义 $id^k\in C[a,b]$ 为 $id^k(x)=x^k$. 下面归纳证明

$$L_n(id^k)\to id^k\ (n\to\infty).$$

设 $k < m$ 时命题成立. 当 $k = m$ 时,

(i) 若 $m = 2l$ $(l \geq 2)$. 记 $M = \max\limits_{x,y\in[a,b]} \sum\limits_{i=0}^{l-1} |x^i y^{l-1-i}|$, 则 $\forall x, y \in [a,b]$,

$$0 \leq x^{2l} + y^{2l} - 2x^l y^l \leq M^2(x^2 + y^2 - 2xy).$$

于是, 由 L_n 的正性与 $x, y \in [a,b]$ 的任意性易知

$$\begin{aligned}0 &\leq L_n(id^m) + id^m L_n(e) - 2id^l L_n(id^l)\\ &\leq M^2(L_n(id^2) + id^2 L_n(e) - 2id L_n(id)).\end{aligned}$$

从而, 由假设知 $\|L_n(id^m) - id^m\|_p \to 0$.

(ii) 若 $m = 2l+1$ $(l \geq 2)$. 注意到 $l+1 < m$, 故同 (i) 可证 $L_n(id^{m+1}) \to id^{m+1}$. 记

$$M_1 = \max_{x,y\in[a,b]} \sum_{i=0}^{l} |x^i y^{l-i}| + |x^i y^{l-1-i}|),$$

则易验证

$$\begin{aligned}0 &\leq x^{m+1} + 2x^m + x^{m-1} + ((y+1)y^l)^2 - 2(x+1)(y+1)x^l y^l\\ &\leq M_1^2(x^2 + y^2 - 2xy).\end{aligned}$$

故同 (i) 可证, $L_n(id^m) \to id^m$.

于是, 由 (i) 与 (ii) 知 $k = m$ 时命题成立. 从而对每个多项式函数 $P \in L^p[a,b]$, 皆有 $L_n(P) \to P$. 又因为多项式函数全体在 $L^p[a,b]$ 中稠密, 且算子列 $\{L_n\}$ 一致有界, 所以 $\forall f \in L^p[a,b]$, $\|L_n f - f\|_p \to 0$.

注 3.1 由于 $C[a,b]$ 上的正线性算子是连续的, 并且其作用在常数函数 e 上的收敛性蕴含该算子序列的有界性, 因此, 定理 3.1 对 Korovkin 定理的推广是明显的.

若正算子序列换以正算子网, 且 (或) $L^p[a,b]$ 换以 $L^p(a,b)$, 则定理结论同样成立.

明显地, 对于正算子列 (或网) $\{T_n\}$, $L_n := T_n + I$ 强收敛于单位算子 I 等价于 T_n 强收敛于 0. 由此, 依定理 3.1 有: 设正有界线性算子列 (或网) $\{T_n\}$ 有界. 若 $\forall f \in \{e, id, id^2\}$, $T_n f \to 0$, 则 $\forall f \in L^p[a,b]$, $T_n f \to 0$.

§4. 正算子半群的渐近稳定性

熟知, L^p 空间是实际物理系统的分析中最常选用的状态空间. 因此, 寻求 L^p 上正线性算子半群渐近稳定的判别准则具有重要意义. 由定理 3.1 知, 若正算子半群一致有界, 则其渐近稳定性完全取决于其在三个简单函数 e, id, id^2 上的收敛性. 基于此, 下面将给出 L^p 上正算子半群 [6,7] 渐近稳定的一些新的准则. 以下记 $\Omega = [a,b]$ 或 (a,b).

定理 4.1 设 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ 为 $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ 上的正 C_0 半群, $\|T(t)\| \leq M$, $R(\lambda, A)$ 为其生成元 A 的豫解式.

若对于 $f \in \{e, id, id^2\}$, $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} \lambda R(\lambda, A) f = 0$, 则 $\{T(t)\}$ 是强 Cesaro 遍历的, 即 $\forall f \in L^p(\Omega)$, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t T(r) f dr = 0$.

进一步地, 若下列条件之一满足

(1) $\{f \in D(A) : Af \geq 0$ 或 $-Af \geq 0\}$ 在 $L_+^p(\Omega)$ 中稠密.

(2) $p \neq 1$, $e \in D(A)$, $Ae \geq 0$ 或 $-Ae \geq 0$.

(3) $\sigma(A)\cap iR$ 是可数的 (其中 $\sigma(A)$ 为 A 的谱集).

则 $\lim\limits_{t\to\infty} T(t)f=0, \forall f\in L^p(\Omega)$.

证 因为 $\{T(t)\}$ 一致有界，所以正算子网 $\{\lambda R(\lambda,A)\}_{\lambda>0}$ 一致有界．于是，由注 3.1 知，$\forall f\in L^p(\Omega)$, $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\lambda R(\lambda,A)f=0$, 即知 $\{T(t)\}$ Cesaro 遍历收敛 [7,定理4.23]

下面分别在条件 (1)-(3) 下，证明：$\forall f\in L^p(\Omega), T(t)f\to 0$.

设 $f\in L^p(\Omega)$. 由于 $\forall\lambda>0$, $AR(\lambda,A)f=\lambda R(\lambda,A)f-f$, 因此

$$\lim_{\lambda\to 0^+} AR(\lambda,A)f=-f.$$

由此易验明：A 为单射，且 $\forall g\in R(A)$ (A 的值域),

$$\lim_{\lambda\to 0^+} R(\lambda,A)g=A^{-1}g.$$

设 $f\in D(A)$, $Af\in L_+^p(\Omega)$,$\forall g\in L_+^q(\Omega)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(p\neq 1);q=\infty(p=1)\right)$, 由于 $\forall t\geq 0$,

$$\begin{aligned}0\leq\left\langle\int_0^t T(r)Afdr,g\right\rangle&=\lim_{\lambda\to 0^+}\left\langle\int_0^t e^{-\lambda r}T(r)Afdr,g\right\rangle\\&\leq\overline{\lim_{\lambda\to 0^+}}\left\langle\int_0^\infty e^{-\lambda r}T(r)Afdr,g\right\rangle=\langle -f,g\rangle\end{aligned}$$

且 $j(t)=\langle\int_0^t T(r)Afdr,g\rangle$ 是 t 的单调增函数．因此，弱积分 $\omega-\int_0^\infty T(r)Afdr$ 存在．于是，由 Dini 定理 [8,Chapter II, Theorem 5.9] 知，强积分 $\int_0^\infty T(t)Afdt$ 存在，且等于 $-f$. 因此 $\forall f\in D(A)$, 若 $Af\geq 0$ (或 $Af\leq 0$), 则

$$T(t)f=-\int_t^\infty T(r)Afdr\to 0\quad(t\to\infty).$$

于是，若条件 (1) 成立，则由 $\{T(t)\}$ 的一致有界性知，$\forall f\in L^p(\Omega), T(t)f\to 0$.

若条件 (2) 成立，则由以上证明知，积分 $\int_0^\infty T(r)Aedr$ 存在，因而 $T(t)e\to 0$. 设 $f\in G:=\{f\in L_+^p(\Omega): f^q\in L_+^p(\Omega)\}$, 则由 [5, 定理 1] 知

$$0\leq T(t)f\leq (T(t)f^q)^{\frac{1}{q}}\cdot(T(t)e)^{\frac{1}{p}},$$

因此

$$\begin{aligned}\|T(t)f\|^p&\leq\int_a^b (T(t)f^q)^{\frac{p}{q}}(s)\cdot(T(t)e)(s)ds\\&\leq\left(\int_a^b (T(t)f^q)^p(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_a^b (T(t)e)^p(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leq\|T(t)\|^{\frac{p}{q}}\|f^q\|^{\frac{p}{q}}\cdot\|T(t)e\|\to 0.\end{aligned}$$

于是，由 G 在 $L^p(\Omega)$ 中的稠密性知，$\forall f\in L^p[a,b], T(t)f\to 0$.

因为已证明：$\forall f\in L^p(\Omega)$,

$$\lim_{\lambda\to 0^+} AR(\lambda,A)f\quad -f.$$

这表明 A 为单射且值域 $R(A)$ 稠密，因而 $0\in\sigma_c(A)$ (为 A 的连续谱). 另外，$\forall r\in R$, $f\in L_+^p(\Omega)$, 因为 $|\lambda R(\lambda+ir,A)f|\leq\lambda R(\lambda,A)f(\forall\lambda>0)$, 且

$$(ir-A)R(\lambda+ir,A)f=f-\lambda R(\lambda+ir,A)f,$$

因此，由 $T(t)$ 的 Cesaro 遍历性知，

$$(ir - A)R(\lambda + ir, A)f \to f(\lambda \to 0^+).$$

这表明，$ir - A$ 是单射且值域 $R(ir - A)$ 稠密，即 $ir \in \sigma_c(A)$. 于是，若条件 (3) 成立，则由 [7, 定理 4. 29] 知，$T(t)$ 是强遍历的，即 $\forall f \in L^p[a,b]$, $T(t)f \to 0$,

注 4.1 对 $L^p(\Omega)$ 中每个常正函数 c, 若以 $c, c\cdot id, c\cdot id^2$ 分别代替 e, id, id^2, 则定理 4.1 依然成立. 基于此，可以预计，定理 4.1 在许多数学物理问题的渐近稳定性分析中将会得到重要应用，限于篇幅，对此我们将另文讨论.

参 考 文 献

[1] Korovkin, P. P., Linear operators and approximation theory [M], Delhi India: Hindustan Publ. Corp., 1960.

[2] Bauer, H., Approximation and abstract boundaries [J], *Amer. Math. Monthly*, **85**:8 (1978), 631–647.

[3] Nieberg, P. M., Banach lattices [M], New York, Springer Verlag, 1989.

[4] Phelps, R. R., Lectures on Choquet's theorem [M], New York, D. Van Nostrand Company Inc., 1965.

[5] 彭济根、王绵森、朱广田, L^p 空间上一类 C_0 半群的稳定性及其应用 [J], 数学物理学报, **15**:4(1995), 461–466.

[6] Nagel R. (ed.), One parameter semigroups of positive operators [M], Lecturs Notes in Math., 1184, Berlin, Springer Verlag, 1984.

[7] 郑 权, 强连续线性算子半群, 华中理工大学出版社，武汉， 1994.

[8] Schaefer, H. H., Banach lattices and positive operators, Berlin: Springer Verlag, 1974.